

# Sciences industrielles pour l'ingénieur

## 1<sup>re</sup> année MPSI-PCSI-PTSI

**Jean-Dominique Mosser**

*Professeur agrégé de sciences industrielles  
en classes préparatoires scientifiques  
au lycée Kléber à Strasbourg*

**Jean-Jacques Marchandau**

*Professeur agrégé de sciences industrielles  
en classes préparatoires scientifiques  
au lycée Camille Vernet à Valence*

**Jacques Tanoh**

*Professeur agrégé de sciences industrielles  
en classes préparatoires scientifiques  
au lycée Kléber à Strasbourg*

DUNOD

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	---	--

© Dunod, Paris, 2015

5 rue Laromiguière 75005 Paris

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

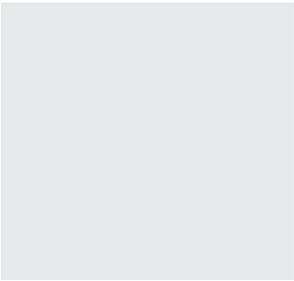
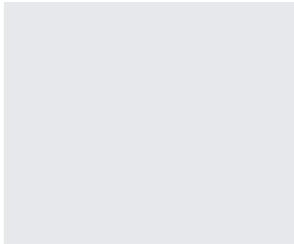
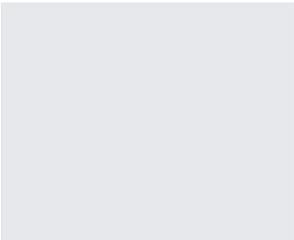
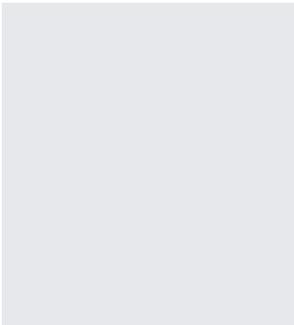
ISBN 978-2-10-070308-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Étude des systèmes</b>	<b>1</b>
	1.1 Concepts et vocabulaire pour l'étude de systèmes pluritechnologiques	1
	1.2 Modèle	6
	1.3 Les systèmes automatisés	9
<b>2</b>	<b>Les bases de la mécanique</b>	<b>15</b>
	2.1 Orienter l'espace	16
	2.2 Définir un angle	18
	2.3 Les différents repères d'espace	20
	2.4 Vecteurs – Opérations sur les vecteurs	23
	2.5 Torseurs – Opérations sur les torseurs	27
	2.6 Dérivation vectorielle	31
	<b>Exercices d'application</b>	36
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	38
	<b>Solutions des exercices</b>	39
<b>3</b>	<b>Cinématique du solide indéformable</b>	<b>45</b>
	3.1 Les mouvements	46
	3.2 Trajectoires et lois horaires	48
	3.3 Vecteurs position, vitesse et accélération	50
	3.4 Le solide indéformable	53
	3.5 Le champ des vecteurs vitesse	54
	3.6 Composition des mouvements	57
	3.7 Le champ des vecteurs accélération	60
	3.8 Mouvements particuliers	62
	<b>Exercices d'application</b>	65
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	66
	<b>Solutions des exercices</b>	69

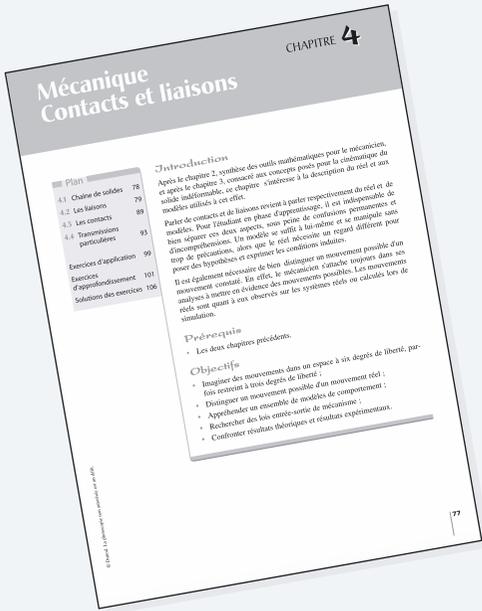
<p><b>4</b></p> 	<p><b>Contacts et liaisons</b></p> <p>4.1 Chaîne de solides</p> <p>4.2 Les liaisons</p> <p>4.3 Les contacts</p> <p>4.4 Transmissions particulières</p> <p><b>Exercices d'application</b></p> <p><b>Exercices d'approfondissement</b></p> <p><b>Solutions des exercices</b></p>	<p><b>75</b></p> <p>76</p> <p>77</p> <p>87</p> <p>91</p> <p>97</p> <p>100</p> <p>105</p>
<p><b>5</b></p> 	<p><b>Actions mécaniques</b></p> <p>5.1 Concept d'action mécanique</p> <p>5.2 Modèles d'actions mécaniques transmissibles</p> <p>5.3 Les lois du frottement</p> <p><b>Exercices d'application</b></p> <p><b>Exercices d'approfondissement</b></p> <p><b>Solutions des exercices</b></p>	<p><b>117</b></p> <p>118</p> <p>125</p> <p>132</p> <p>137</p> <p>140</p> <p>143</p>
<p><b>6</b></p> 	<p><b>Les lois de l'équilibre</b></p> <p>6.1 Théorèmes de l'équilibre</p> <p>6.2 Méthodologie de résolution</p> <p>6.3 Équilibres particuliers</p> <p><b>Exercices d'application</b></p> <p><b>Exercices d'approfondissement</b></p> <p><b>Solutions des exercices</b></p>	<p><b>151</b></p> <p>151</p> <p>154</p> <p>159</p> <p>166</p> <p>169</p> <p>174</p>
<p><b>7</b></p> 	<p><b>Les systèmes automatiques</b></p> <p>7.1 Notion de système en automatique</p> <p>7.2 Systèmes Continus, Linéaires et Invariants</p> <p>7.3 Systèmes asservis</p> <p>7.4 Évaluation des performances des systèmes</p> <p><b>Exercices d'application</b></p> <p><b>Exercices d'approfondissement</b></p> <p><b>Solutions des exercices</b></p>	<p><b>187</b></p> <p>187</p> <p>191</p> <p>193</p> <p>196</p> <p>204</p> <p>207</p> <p>209</p>

<b>8</b>	<b>Modélisation des systèmes continus</b>	<b>213</b>
	8.1 Fonction de transfert	213
	8.2 Schémas-blocs	218
	8.3 Modèle de connaissance – modèle de description	226
	<b>Exercice d'application</b>	228
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	231
	<b>Solutions des exercices</b>	236
<b>9</b>	<b>Modèles de référence</b>	<b>249</b>
	9.1 Analyse temporelle, analyse harmonique	250
	9.2 Le modèle proportionnel	252
	9.3 Modèle du premier ordre ou d'ordre 1	253
	9.4 Modèle du deuxième ordre ou modèle d'ordre 2	259
	9.5 Système intégrateur	271
	9.6 Identification de modèles de comportement	272
	<b>Exercices d'application</b>	276
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	279
	<b>Solutions des exercices</b>	282
<b>Annexe 1</b>	<b>Le langage SysML</b>	<b>293</b>
<b>Annexe 2</b>	<b>Transformée de Laplace</b>	<b>299</b>
<b>Annexe 3</b>	<b>Modèle d'ordre 2</b>	<b>305</b>
<b>Index</b>		<b>307</b>

# Pour bien utiliser

## La page d'entrée de chapitre

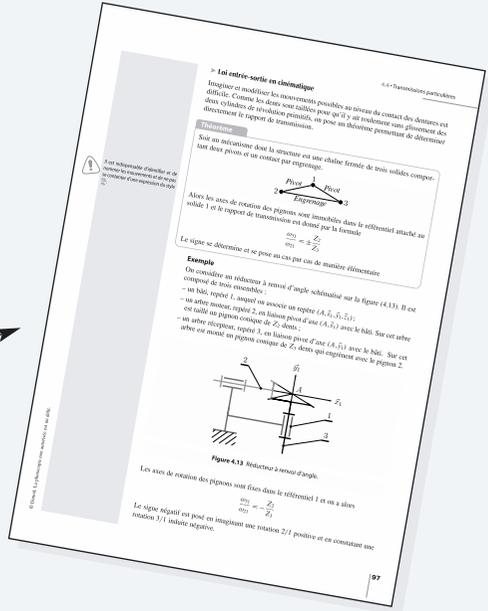
Elle propose une introduction au cours, un rappel des prérequis et des objectifs, ainsi qu'un plan du chapitre.



## Le cours

Le cours aborde toutes les notions du programme de façon structurée afin d'en faciliter la lecture.

La colonne de gauche fournit des remarques pédagogiques qui accompagnent l'étudiant dans l'assimilation du cours. Il existe quatre types de remarques, chacun étant identifié par un pictogramme.



## Les pictogrammes dans la marge



Commentaires pour bien comprendre le cours (reformulation d'un énoncé, explication d'une démonstration...).



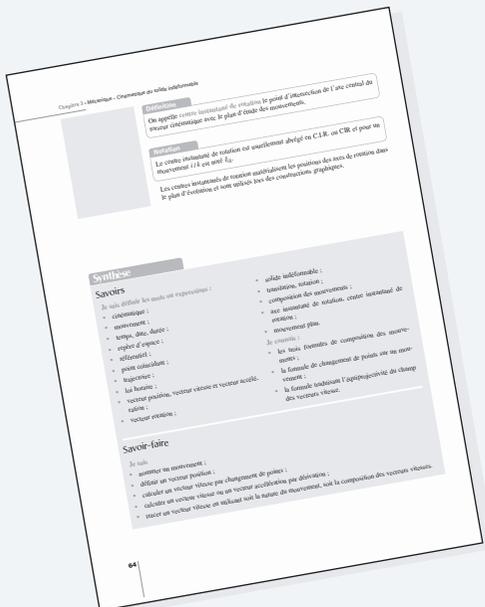
Indication du degré d'importance d'un résultat.

Mise en garde contre des erreurs fréquentes.

Rappel d'hypothèse ou de notation.

## La synthèse

En fin de chapitre, elle propose un récapitulatif des savoirs et savoir-faire indispensables.





# Avant-propos

Cet ouvrage est destiné au jeune bachelier scientifique et lui propose de découvrir les sciences industrielles de l'ingénieur en s'appuyant sur le programme officiel des classes préparatoires aux grandes écoles de première année.

Sa finalité est de donner outils et méthodes nécessaires à l'approche de réalisations industrielles pluritechnologiques modernes en privilégiant un point de vue particulier : le calcul, la commande et le contrôle des mouvements.

Sa structure est ainsi logique :

- le premier chapitre présente les outils de description des systèmes et définit la frontière entre réel et modèle ;
- les cinq chapitres suivants initient à la mécanique, science des mouvements, en détaillant la cinématique et les actions mécaniques ;
- les trois derniers posent les bases de l'automatique, science de la commande et du contrôle.

Cet ouvrage développe des compétences dont l'approfondissement est en adéquation avec la filière suivie par l'étudiant, comme le précise la figure 1.

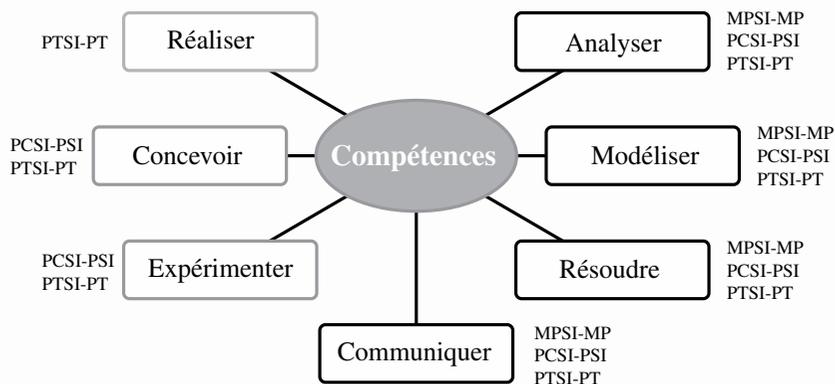


Figure 1 – Les compétences développées dans les trois voies de formation

Leur finalité est d'initier le lecteur à la démarche de l'ingénieur au travers d'activités caractéristiques identifiées par le programme officiel et illustrées sur la figure 2 :

- conduire une analyse fonctionnelle, structurelle et comportementale d'un système pluritechnologique ;
- vérifier les performances attendues d'un système, par l'évaluation de l'écart entre un cahier des charges et des réponses expérimentales ;
- proposer et valider des modèles d'un système à partir d'essais, par l'évaluation de l'écart entre les performances mesurées et les performances calculées ou simulées ;
- prévoir les performances d'un système à partir de modélisations, par l'évaluation de l'écart entre les performances calculées ou simulées et les performances attendues au cahier des charges ;
- analyser ces écarts et proposer des solutions en vue d'une amélioration des performances.

Le cours est concis, avec des notations simples et transversales. Il nécessite une lecture attentive. Les exercices sont tous corrigés de façon détaillée pour offrir au lecteur le temps de se forger ses propres convictions. De plus, dès lors que les compétences acquises le permettent, des résultats d'expérimentation sont joints aux exercices, afin de confronter les résultats théoriques calculés à la réalité constatée.

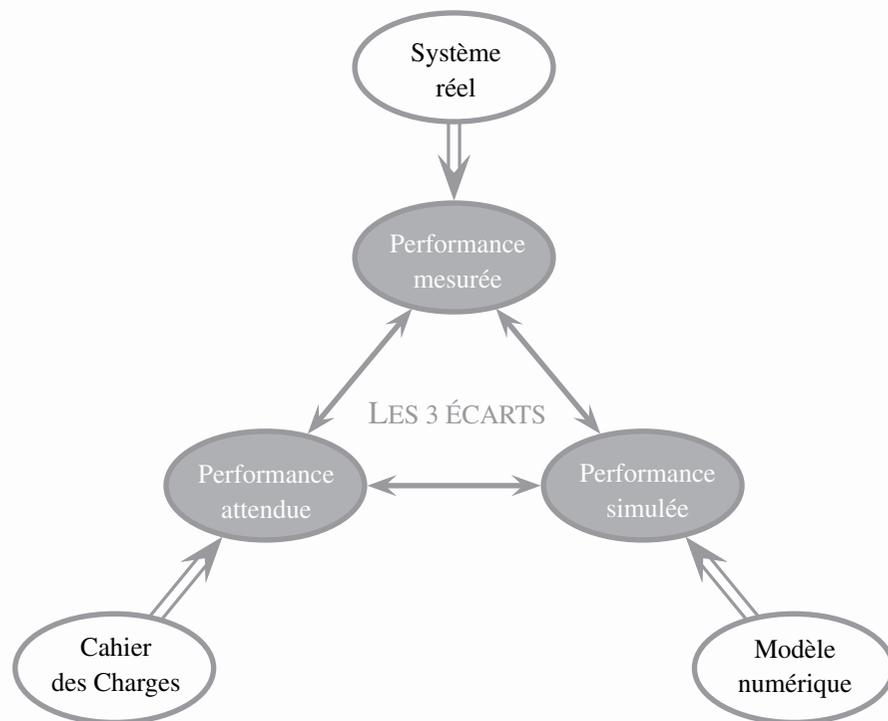


Figure 2 – Évaluation des performances d'un système pluritechnologique

Cet ouvrage sollicite capacités d'abstraction et aptitudes scientifiques. Il les développe en vue de mettre en œuvre :

- des méthodes plus que des recettes ;
- de la réflexion plus que des calculs ;
- des clés plus que des solutions.

Les auteurs confient aux lecteurs la tâche de retourner remarques et suggestions en utilisant le courrier électronique à l'adresse [s3i@jdotec.net](mailto:s3i@jdotec.net) ou postal aux bons soins des éditions Dunod, et souhaitent à chacun d'eux une passionnante découverte des sciences pour l'ingénieur.

Jean-Dominique Mosser



## Plan

1.1 Concepts et vocabulaire pour l'étude de systèmes pluritechnologiques	1
1.2 Modèle	6
1.3 Les systèmes automatisés	9

## Introduction

« Le métier de base de l'ingénieur consiste à résoudre des problèmes de nature technologique, concrets et souvent complexes, liés à la conception, à la réalisation et à la mise en œuvre de produits, de systèmes ou de services. Cette aptitude résulte d'un ensemble de connaissances techniques d'une part, économiques, sociales et humaines d'autre part, reposant sur une solide culture scientifique. »

Cette définition du métier d'ingénieur est proposée par la Commission des Titres d'Ingénieur. Elle résume bien ce que l'on entend par « Étude des systèmes ». Ce chapitre s'attache à exposer les concepts de base associés, et à définir une partie du vocabulaire spécifique à cette activité.

## Prérequis

Ce chapitre d'introduction est construit sans prérequis disciplinaire, mais requiert néanmoins :

- le sens du concret ;
- de la rigueur et de la cohérence.

## Objectifs

- Acquérir le vocabulaire concernant les notions fondamentales relatives à l'étude de systèmes complexes ;
- S'entraîner aux changements d'approche et de point de vue ;
- Comprendre la notion de modèle ;
- S'approprier quelques outils de représentation.

## 1.1 Concepts et vocabulaire pour l'étude de systèmes pluritechnologiques

L'expression « système complexe » n'est pas à entendre au sens de difficile, mais au sens où la multitude des paramètres qui interviennent fait qu'un projet industriel n'a pas *une* solution unique. La solution adoptée est issue d'un ensemble de solutions possibles. Son choix est le résultat d'un compromis nécessaire entre des intérêts rarement convergents.

Un servomécanisme est un mécanisme dont au moins une grandeur mécanique est contrôlée, par exemple une position, une vitesse...

## 1.1.1

Le champ d'activités de cet ouvrage se limite à la mécanique et à l'automatique concernant des servomécanismes :

- la **mécanique** est la science des mouvements ;
- l'**automatique** est la science de la commande et du contrôle.

# Système

## Système et milieu environnant

Le mot système est un de ces mots génériques que l'on trouve dans tous les domaines. Que l'on étudie un système solaire, un système sanguin, un système technique ou un système d'équations, on trouve toujours dans le thème abordé la racine grecque du mot signifiant *un assemblage* ou *une composition*.

### Définition

Un **système** est un arrangement d'éléments en interaction, organisé en vue d'atteindre un ou plusieurs objectifs définis.

Les idées fondamentales exprimées par cette définition sont nombreuses :

- un système est un ensemble ;
- cet ensemble peut être décrit à partir d'éléments ;
- les éléments de cet ensemble sont en relation ;
- un système a une finalité exprimée.

On peut compléter ces propositions en constatant qu'un élément peut être lui-même un système, et un système peut être lui-même un élément d'un système plus grand.

### Exemple

- une **machine** est un système transformateur d'énergie ;
- un **mécanisme** est un élément de la classe des machines qui transforme de l'énergie mécanique en énergie mécanique, autrement dit un système de transformation de mouvement ;
- un **moteur** est un élément de la classe des machines qui fournit de l'énergie mécanique, à partir d'énergie électrique, thermodynamique ou chimique.

Toute analyse commence par la définition du système dont on parle : il s'agit de délimiter ce système, pour identifier son environnement. On imagine pour cela une frontière fictive entourant le système. Tout ce qui n'appartient pas au système ainsi circonscrit et qui entre en contact ou en relation avec le système définit le milieu environnant.

### Définition

On appelle **milieu environnant** d'un système l'ensemble des éléments de l'univers en relation avec lui.

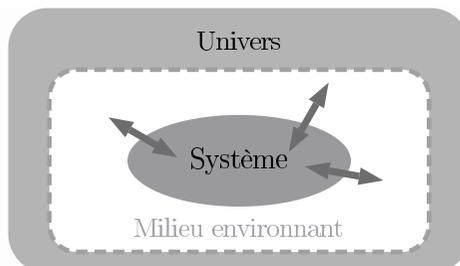


Figure 1.1 Le milieu environnant d'un système



Définition proposée par la norme ISO/IEC 15288:2002

Les principales définitions à connaître concernant les diagrammes SysML sont données en annexe.

Les éléments du milieu environnant sont généralement classés dans quatre grandes familles :

- l'environnement humain ;
- l'environnement matériel ;
- l'environnement énergétique ;
- la matière d'œuvre.

Les éléments du milieu environnant peuvent être énoncés par un diagramme de contexte, un diagramme très librement adapté des diagrammes SysML. La figure 1.2 caractérise par exemple l'environnement d'un robot distributeur de médicament installé dans une pharmacie.

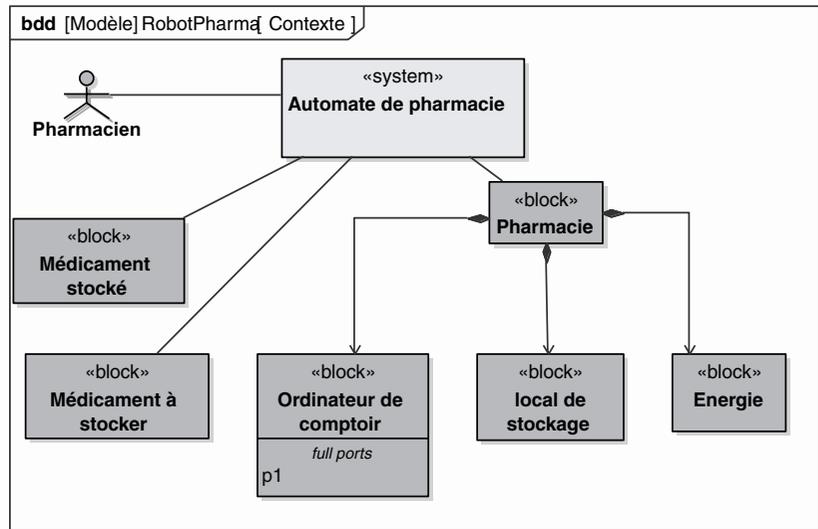


Figure 1.2 Un robot de pharmacie dans son environnement

## Matière d'œuvre et valeur ajoutée

### Définition

On appelle **matière d'œuvre** d'un système tout élément modifié par son intervention.

Il existe trois grands types de matière d'œuvre :

- un produit ou une matière ;
- une énergie ;
- une information.

### Définition

On appelle **valeur ajoutée** ce qui caractérise la modification des propriétés de la matière d'œuvre après passage dans le système.

Cette modification concerne la forme, la position ou l'état de la matière d'œuvre.

### Exemple

On s'intéresse à un des objets les plus courants dans une habitation : un aspirateur ménager. La matière d'œuvre est constituée de :

- l'air du lieu ;
- un sac filtre ;
- les éléments rencontrés par l'embout.

La matière d'œuvre ne change pas de nature ! Seules évoluent ses caractéristiques.



Même sur des systèmes apparemment simples, une analyse fonctionnelle conduit à des propositions pertinentes.

Entrent dans le système un sac *propre* et de l'air chargé de poussières et ressortent du système un sac de poussières et de l'air *propre*.

La valeur ajoutée peut être alors exprimée par la proposition : la poussière est transférée de l'air aspiré au filtre sans endommager son support initial.

### Cycle de vie

La notion de *cycle de vie* est indissociable d'un système technologique. Elle exprime les différentes étapes qui vont de sa conception initiale jusqu'au recyclage de ces constituants.

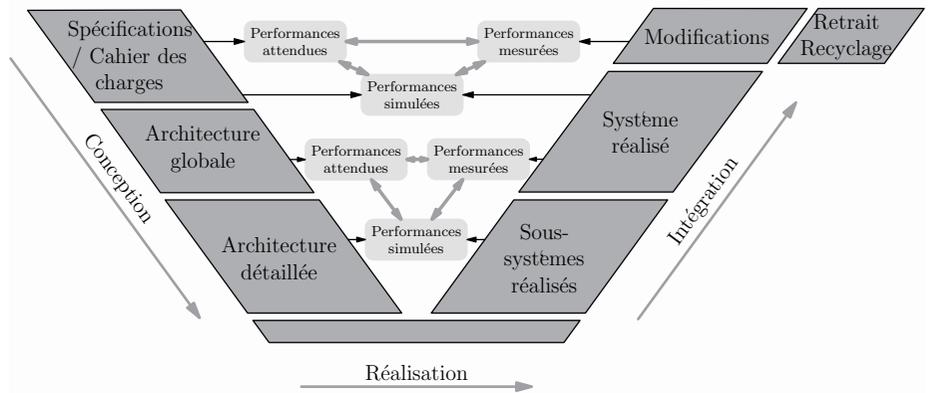


Figure 1.3 Représentation usuelle du cycle de vie sous la forme d'un vé.

La figure 1.3 les explicite et rappelle que l'évaluation des performances se fait à tous les niveaux.

## 1.1.2 Fonction d'un système

### Définition

On appelle **fonction** d'un système ce pour quoi il a été conçu.

### Notation

Une fonction s'énonce par une phrase commençant par un verbe à l'infinitif.

Il n'y a pas équivalence entre fonction et système. Un système remplit une fonction qui est directement liée à un besoin exprimé. Réciproquement, une fonction peut être réalisée par de multiples systèmes différents. Passer de l'objet à sa finalité permet de s'en détacher et ouvre ainsi le champ de l'innovation.

### Exemple

L'observation des activités dans une officine de pharmacie montre beaucoup de déplacements entre un comptoir où l'on sert un client et les étagères ou tiroirs où sont stockés les médicaments. Il serait peut-être intéressant de disposer d'un système automatisé réalisant les opérations de déstockage, et éventuellement celles de stockage. La **fonction globale** de ce système, appelée robot de pharmacie, pourrait être énoncée comme « déstocker automatiquement des médicaments ».

La fonction globale d'un système exprime et résume la mission qui lui est assignée.

## 1.1.3

## Analyse et expression du besoin

## Expression du besoin

La première question à se poser lorsque l'on étudie ou on conçoit un système est « Pourquoi le produit existe-t-il ? »

Ce désir de comprendre et de justifier prend racine dans la volonté de satisfaire le besoin du « client ».

La question initiale est à diversifier dans cinq directions :

- À qui rend-il service ?
- Sur quoi agit-il ?
- Quel est son but ?
- Qu'est-ce qui pourrait faire évoluer le besoin ?
- Qu'est-ce qui pourrait faire disparaître le besoin ?

Le client est à associer à cette démarche initiale afin qu'il puisse expliciter son besoin. La codification de son attente se fait en trois étapes :

- identifier les éléments du milieu environnant ;
- pour chacun d'eux, appliquer la grille précédente en vue d'énoncer la fonction correspondant au service rendu ;
- définir les critères que l'on applique pour évaluer la réalisation de la fonction.

Une fonction ainsi énoncée est souvent appelée *fonction de service*.

## Cahier des Charges Fonctionnels (CdCF)

On appelle *Cahier des Charges Fonctionnel* (CdCF) le document qui expose l'ensemble des caractéristiques attendues des fonctions de service. La figure 1.4 en donne une allure générale, présentée sous la forme d'un tableau.

N°	Expression de la fonction	Critère	Niveau	Flexibilité

Figure 1.4 Cahier des Charges Fonctionnel

Ce tableau comporte cinq colonnes :

- un numéro d'index ;
- l'énoncé de la fonction traitée ;
- la liste des performances attendues et des critères d'évaluation retenus ;
- la valeur chiffrée pour les critères retenus ;
- la flexibilité possible concernant la valeur chiffrée. Cette dernière est difficile à aborder sans connaître le coût financier des solutions adoptées. Accepter un niveau de performance dégradé peut être possible si l'économie réalisée augmente la compétitivité du produit.

Ce document sert de contrat entre le client et le fournisseur. Du point de vue du client, chaque ligne permet un contrôle de la prestation fournie, et du point de vue du fournisseur, chaque ligne induit un niveau d'exigence à la conception.

## Cas d'utilisation

On peut également préciser ce que l'on attend du système en décrivant des scénarios montrant comment le système va interagir avec son environnement dans des situations bien précises.

Un **critère** est une règle que l'on définit en vue d'émettre une opinion ou de prendre une décision.

L'énoncé de la fonction commence par un verbe à l'infinitif.



Les principales définitions concernant les diagrammes SysML sont données en annexe.

Ces informations sont alors disponibles dans un diagramme de cas d'utilisation ; ce dernier peut être avantageusement complété par du texte détaillant ces scénarios.

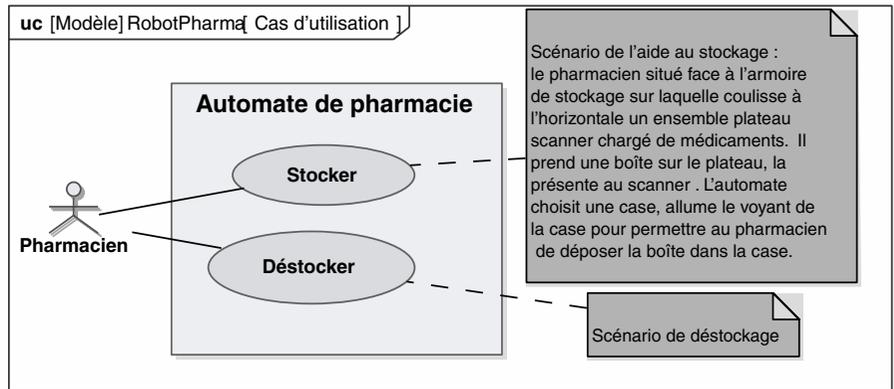


Figure 1.5 Les relations entre le pharmacien et son robot

### Spécification d'un système

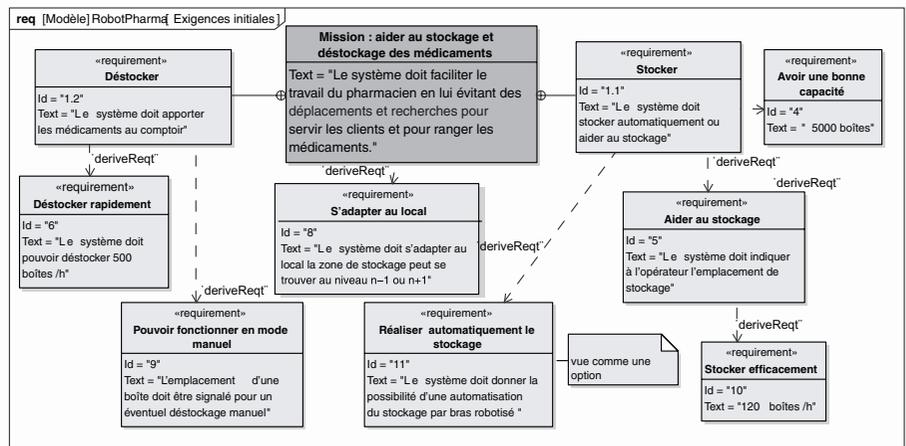


Figure 1.6 Éléments du cahier des charges du robot de pharmacie exprimés par un diagramme des exigences.

Pour des systèmes de plus en plus complexes, ce n'est pas un seul tableau ou un seul diagramme qui exprimera tout ce qui est attendu. Il faut s'attendre à un ensemble de documents dont on donne deux exemples supplémentaires :

- la figure 1.6 propose un diagramme des exigences ;
- la figure 1.7 un diagramme de séquence.

Les principales définitions à connaître concernant les diagrammes SysML sont données en annexe.

## 1.2 Modèle

### Définition

Un **modèle** est une description simplifiée du réel destinée à en représenter un des aspects.

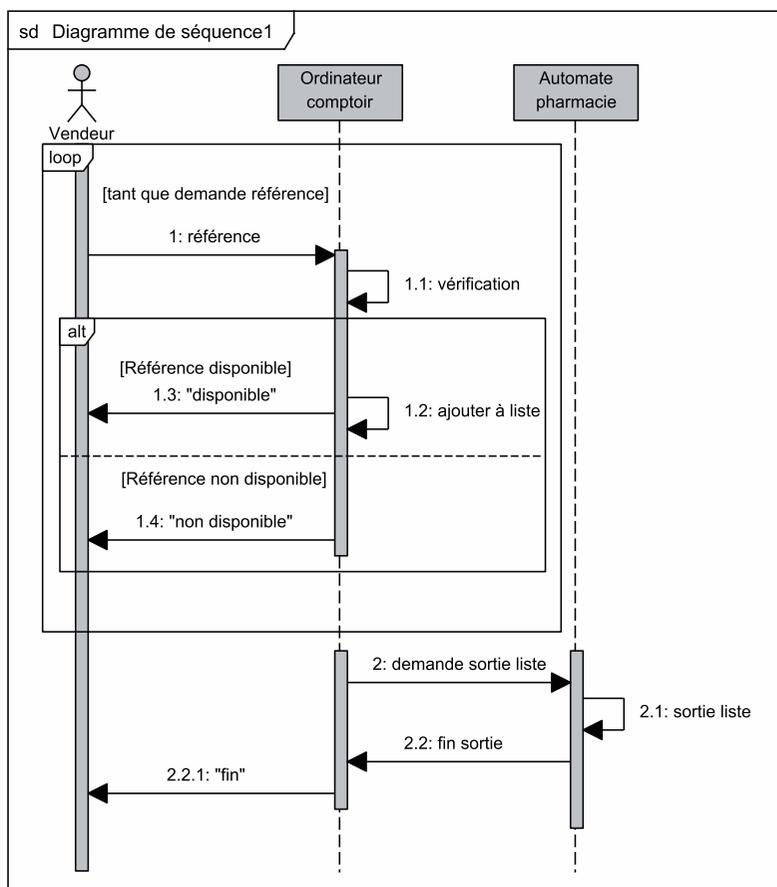


Figure 1.7 Scénario d'utilisation du robot de pharmacie exprimé par un diagramme de séquence.

Un modèle se doit de posséder quatre qualités essentielles :

- la simplicité, pour être facile à élaborer et à simuler ;
- la validité, pour assurer la cohérence entre les approches théorique et empirique ;
- l'exhaustivité, pour être transposable à d'autres systèmes ;
- la fécondité, pour générer de nouveaux modèles.

## 1.2.1 Modélisation

### Définition

On appelle **modélisation** l'activité qui consiste à associer des modèles à un système.

Cette activité consiste en un va-et-vient permanent entre le réel et ses modèles, comme l'illustre la figure 1.8 :

- au système correspond le champ empirique, domaine de l'expérimentation et de la mesure ;
- aux modèles correspond le champ théorique, qui conduit aux calculs et à la simulation.

La comparaison des performances mesurées et des performances simulées a trois conséquences :

- permettre la validation d'un modèle proposé ;
- provoquer la recherche de nouveaux modèles ;
- inciter à l'évolution du système étudié.

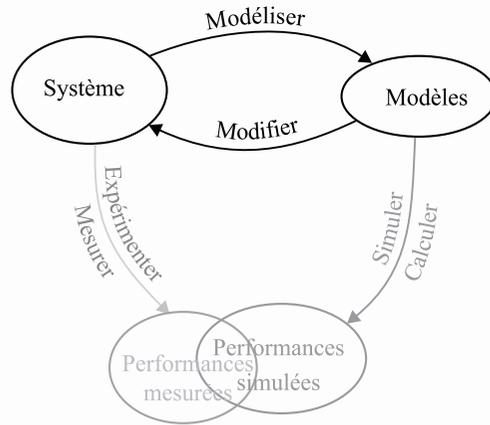


Figure 1.8 Les activités associées à la modélisation

## 1.2.2 Différentes approches d'un système

L'intérêt porté à un système technique se traduit souvent par des questions :

- à quoi ça sert ?
- comment ça marche ?
- comment c'est fait ?
- où trouve-t-on cela ?

Chacune de ces questions concerne une approche différente du système. Chacune de ces approches induit des modèles permettant de mettre en avant un aspect particulier du système, et chaque aspect est une spécialité dans laquelle on peut développer un niveau d'expertise. Les quatre questions précédentes permettent de classer les modèles en fonction de l'approche adoptée, et ce classement est présenté sur la figure 1.9.

- Les noms en caractères droits sont des modèles abordés dans cet ouvrage ;

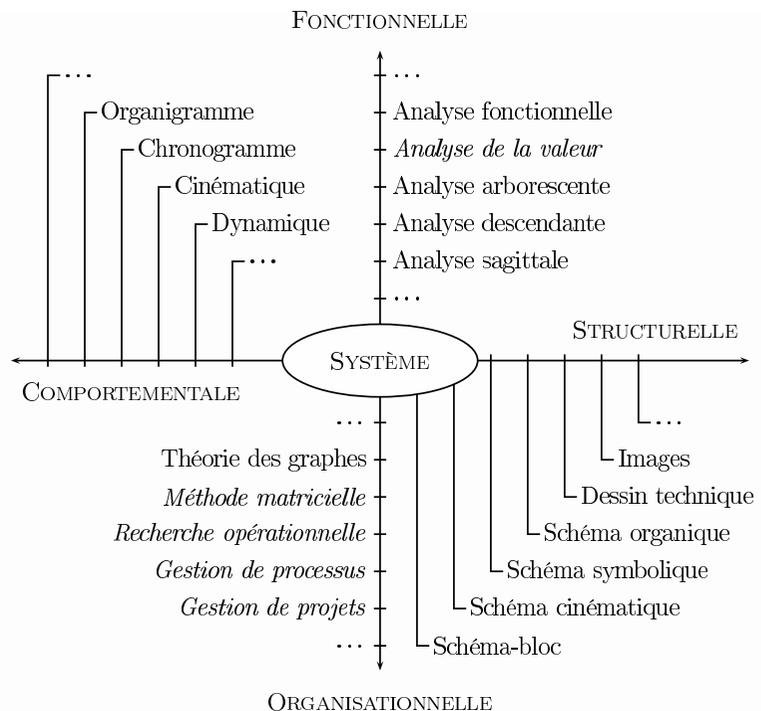


Figure 1.9 Différentes approches pour un système complexe

- Les noms des modèles écrits en italique sont donnés en complément à titre d'exemple.

Les outils concernant les approches comportementale et organisationnelle sont développés au cours des chapitres suivants. Ce premier chapitre a présentée jusqu'ici le point de vue fonctionnel et va se poursuivre en abordant le point de vue structurel.

## 1.3 Les systèmes automatisés

On s'intéresse dans cette section plus particulièrement à la description structurelle des systèmes automatisés.

### 1.3.1 Structure d'un système automatisé

#### Définition

Un **système automatisé** est un ensemble de moyens techniques interconnectés à des moyens de commande et de contrôle qui assure un fonctionnement reproductible plus ou moins indépendant des interventions humaines.

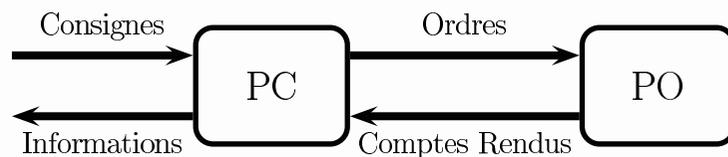


Figure 1.10 Parties commande et opérative d'un système automatisé

#### Partie Commande \_ PC

La **partie commande** d'un système automatisé est un ensemble capable de reproduire un modèle de fonctionnement exprimant le savoir-faire humain. Elle commande la partie opérative pour obtenir les effets voulus, par l'émission d'ordres en fonction d'informations disponibles, comptes rendus, consignes et du modèle construit. Elle peut échanger des informations avec l'opérateur ou d'autres systèmes.

Les principales fonctions assurées par la partie commande sont :

- échanger des informations avec l'opérateur ;
- échanger des informations avec d'autres systèmes ;
- acquérir les données ;
- traiter les données ;
- commander la puissance.

#### Partie Opérative – PO

La **partie opérative** d'un système automatisé assure la transformation des matières d'œuvre permettant l'élaboration de la valeur ajoutée.

Les principales fonctions assurées par la partie opérative sont :

- moduler l'énergie ;
- transformer l'énergie ;
- adapter l'énergie ;
- agir sur la matière d'œuvre.

### 1.3.2

## Constituants des chaînes fonctionnelles

La partie opérative d'un système automatisé peut être décrite en une ou plusieurs chaînes fonctionnelles, ces dernières comportant une chaîne d'action et une chaîne d'acquisition :

- une chaîne d'action est un ensemble organisé de composants dont le rôle est de convertir un ordre émis par la partie commande en effet sur la matière d'œuvre ;
- une chaîne d'acquisition est un ensemble organisé de composants dont le rôle est de prélever des grandeurs physiques sur la partie opérative ou sur l'environnement et de les convertir en signaux interprétables par la partie commande.

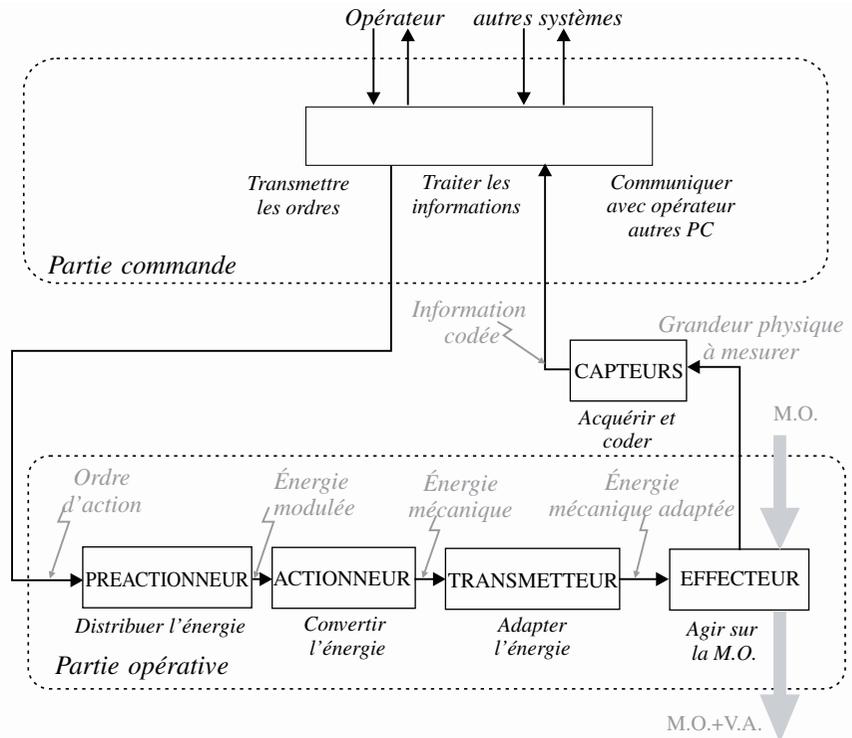


Figure 1.11 Les constituants d'une chaîne fonctionnelle

### Préactionneur

Un **préactionneur** est un constituant dont le rôle est de moduler ou de distribuer, sur ordre de la partie commande, l'énergie utile aux actionneurs. Les préactionneurs les plus utilisés sont :

- les relais, les contacteurs, les hacheurs pour les actionneurs électriques ;
- les distributeurs, pour les actionneurs pneumatiques ou hydrauliques.

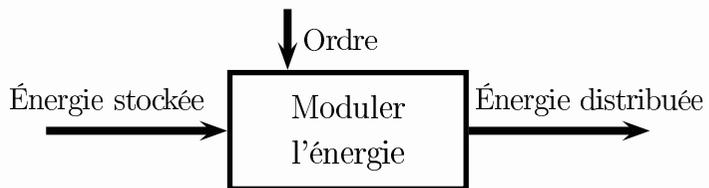


Figure 1.12 Approche fonctionnelle d'un préactionneur

### Actionneur

Un **actionneur** est un constituant qui transforme l'énergie disponible en énergie mécanique. Les actionneurs les plus utilisés sont :

- les moteurs électriques, thermiques, pneumatiques ou hydrauliques ;
- les vérins électriques, pneumatiques ou hydrauliques.



Figure 1.13 Approche fonctionnelle d'un actionneur

### Transmetteur

Un **transmetteur** est un constituant dont le rôle est d'adapter l'énergie mécanique pour la rendre utilisable par l'effecteur.

Tous les dispositifs de transformation de mouvement, tels des réducteurs, des variateurs, des systèmes à bielle-manivelle par exemple, sont des transmetteurs.

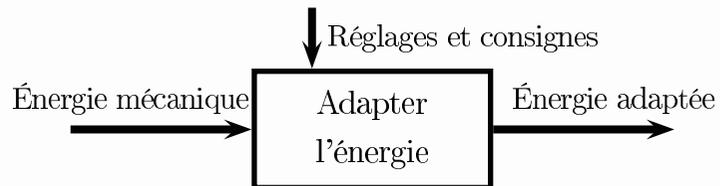


Figure 1.14 Approche fonctionnelle d'un transmetteur

### Effecteur

Un **effecteur** est un constituant dont le rôle est d'agir sur la matière d'œuvre afin de lui apporter sa valeur ajoutée. Quelques exemples d'effecteurs :

- une pince de robot manipulateur ;
- un outil de fabrication ;
- un tapis roulant.

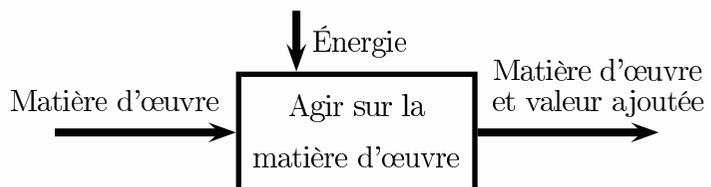


Figure 1.15 Approche fonctionnelle d'un effecteur

### Capteur

Un **capteur** est un élément qui transforme une grandeur physique quelconque en une grandeur physique exploitable par la partie commande.



Le terme mécanisme est un synonyme du terme transmetteur !

Il ne faut pas confondre un capteur avec un détecteur, ce dernier ne délivrant qu'une information booléenne.

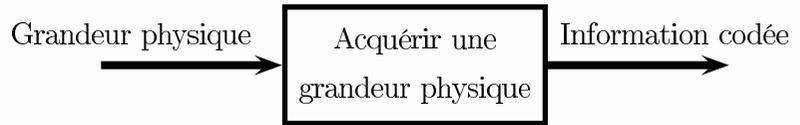


Figure 1.16 Approche fonctionnelle d'un capteur

On peut citer quelques exemples de capteurs de grandeurs mécaniques :

- les capteurs de position
  - potentiomètres linéaires, rotatifs ;
  - codeurs, codeurs incrémentaux ;
  - règles magnétiques, cellules magnétorésistives, magnétostrictives.
- les capteurs de vitesse
  - tachymètres ;
  - génératrices tachymétriques.
- les capteurs d'accélération
  - accéléromètres.
- les capteurs de force
  - dynamomètres ;
  - jauges de déformation ;
  - cellules piézo-électriques ;
  - manomètres.
- les capteurs de débit
  - débitmètres.

### 1.3.3 Chaîne d'énergie et chaîne d'information

Après avoir identifié et nommé les constituants d'une chaîne fonctionnelle, on peut reprendre la figure 1.11 et la présenter en mettant en avant les fonctions génériques assurées par les différentes boîtes.

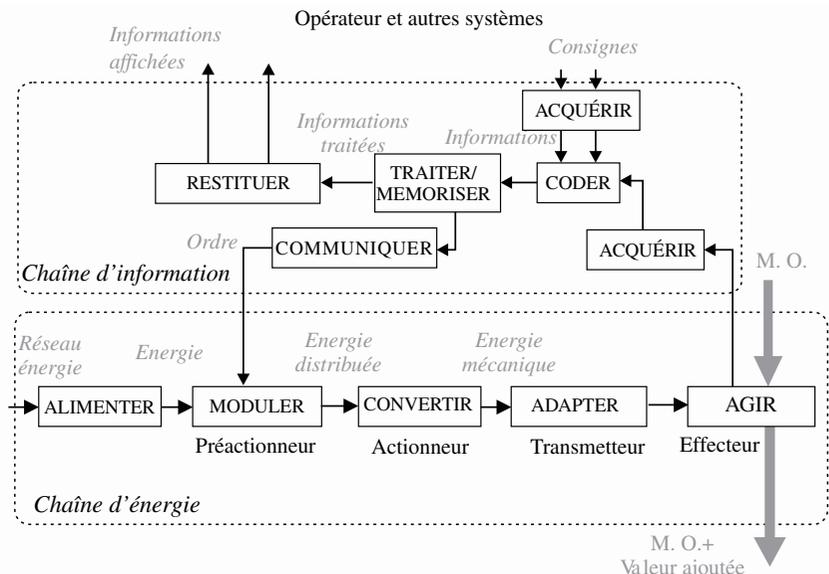


Figure 1.17 Chaîne d'énergie et chaîne d'information

La figure 1.17 ainsi obtenue peut servir de grille fonctionnelle de référence pour l'approche d'un système automatisé.

## Synthèse

### Connaissances

#### Je sais définir les mots ou expressions :

- système – système complexe ;
- mécanique ;
- automatique ;
- machine, mécanisme, servomécanisme ;
- fonction, fonction de service ;
- matière d'œuvre, valeur ajoutée ;

- modèle ;
- critère ;
- partie commande et partie opérative.

#### Je connais

- les différentes approches d'un système ;
- les principaux types de diagrammes SYSML.

### Savoir-faire

#### Je sais

- rechercher des informations sur un diagramme SYSML ;
- décrire la constitution d'une chaîne d'énergie par une approche fonctionnelle ;
- nommer les constituants d'une chaîne d'énergie par une approche structurelle.



### Plan

2.1 Orienter l'espace	16
2.2 Définir un angle	18
2.3 Les différents repères d'espace	20
2.4 Vecteurs – Opérations sur les vecteurs	23
2.5 Torseurs – Opérations sur les torseurs	27
2.6 Dérivation vectorielle	31
Exercices d'application	36
Exercices d'approfondissement	38
Solutions des exercices	39

### Introduction

La mécanique du point est abordée en sciences physiques dès le lycée, et le vecteur est utilisé de manière élémentaire à cette occasion. Il sert pour imaginer le mouvement de points se déplaçant principalement dans des plans et pour poser des forces. L'élève travaille principalement à partir des coordonnées.

La mécanique du solide rend nécessaire trois progrès conséquents :

- d'une part acquérir une appréhension spatiale des problèmes ;
- d'autre part passer d'un vecteur à un ensemble de vecteurs ;
- enfin évoluer du calcul scalaire au calcul vectoriel.

Dans ce chapitre, il s'agit d'exposer les choix faits pour orienter l'espace et de mettre en place outils et techniques permettant de mener des calculs vectoriels méthodiques et efficaces.

### Prérequis

- Notion d'espace affine euclidien, d'espace vectoriel euclidien.
- Calculs vectoriels : Produits scalaire, vectoriel, mixte.
- Notion de taux de variation et de dérivation.
- Notion de fonction de plusieurs variables.

### Objectifs

- Orienter l'espace.
- Savoir définir un angle.
- Imaginer des mouvements.
- Acquérir les outils mathématiques pour les calculs vectoriels en mécanique.

## 2.1 Orienter l'espace



Cet espace est modélisé par un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  de dimension 3 et par l'espace vectoriel  $E$  associé.

### 2.1.1

## Droite et gauche

Tout le monde fait la différence entre main droite et main gauche, et la surprise est grande quand on demande de définir la droite et la gauche... Pourquoi deux personnes se faisant face lèvent-elles la « bonne » main à la demande de lever la main droite ? Il est nécessaire de prendre du temps pour évoluer d'une perception qualitative de l'espace à une perception construite.

Concernant la droite et la gauche, c'est la première référence spatiale imaginée par l'homme et apprise de la même manière par tous qui pose les bases d'une interprétation commune :

- la « verticale », définie par le fil à plomb, est orientée du bas vers le haut ;
- le regard de l'observateur définit un « devant lui » et un « derrière lui » ;
- les côtés sont alors nommés à partir de cette verticale et de ce regard « droite » et « gauche ».

Ces notions semblent tellement triviales que l'on n'y porte guère d'attention... Toute l'orientation de l'espace est basée sur ces définitions !

### 2.1.2

## Direction

En mathématiques, le mot « direction » est souvent associé à un ensemble de droites affines parallèles, lesquelles ne sont pas orientées. Cette absence de sens est préjudiciable pour le mécanicien. Tel le voyageur se présentant à un carrefour, il a besoin de savoir si la direction à suivre est vers la droite ou vers la gauche. Sa destination finale en dépend. C'est pourquoi le mécanicien oriente une direction.

### Définition

En mécanique, une **direction** est définie par un vecteur, que l'on peut tracer avec une flèche.



### Remarque

Une direction **orientée** est préférable à ajouter un sens à une direction **non orientée**. En effet, parler de direction et de sens fait croire que l'on joue sur deux paramètres :

- je connais la direction, mais pas le sens ;
- je ne connais ni la direction, ni le sens.

Ces deux affirmations sont des exemples de propositions qui posent souci lors du décompte d'inconnues dans un problème. Y a-t-il une ou deux inconnues scalaires concernées par ces propositions ?

### Exemple

En partant de l'affirmation « je connais la direction, mais pas le sens », le mécanicien raisonne de la manière suivante :

- la direction est connue, il trace donc une flèche pour la matérialiser et l'orienter ;
- il résout le problème et trouve un signe au résultat du calcul qu'il interprète par rapport à l'orientation posée :
  - le signe est positif, le résultat est donc dans le sens défini par la flèche ;
  - le signe est négatif, le résultat est donc dans le sens contraire à celui qui a été posé.

## 2.1.3

## Sens trigonométrique

En préliminaire, le lecteur ayant le « sens des aiguilles d'une montre » en tête doit réaliser que ce dernier ne convient pas dans l'espace. Il suffit pour cela de tracer un arc de cercle matérialisant ce sens sur une feuille transparente et de placer cette dernière entre deux observateurs se faisant face. En vision directe pour l'un et par transparence pour l'autre, ces deux observateurs ne voient pas le même sens horaire !

De plus, cette expérience met en évidence l'existence d'une droite particulière, perpendiculaire à la feuille et passant par le centre de l'arc de cercle.

## Définition

On appelle **axe de rotation**, ou simplement **axe**, toute droite de l'espace affine autour de laquelle on tourne, ou autour de laquelle on peut tourner.

Soit alors un axe quelconque, que l'on oriente par une flèche. L'observateur se positionne parallèlement à cette droite, la tête du côté de la flèche que l'on appelle sur la figure ci-dessous  $\vec{haut}$ . Son regard définit la direction notée  $\vec{devant}$  dans laquelle il va avancer en tournant autour de cet axe. Il peut alors réaliser que seuls deux choix sont possibles :

- ou bien il tourne en conservant l'axe sur sa gauche ;
- ou bien il tourne en conservant l'axe sur sa droite.

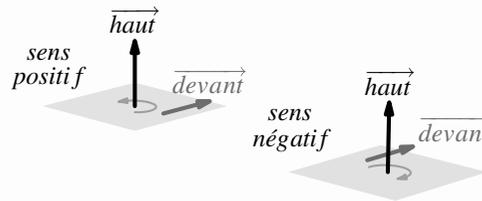


Figure 2.1 Les deux sens de rotation possibles autour d'une droite orientée.

## Définition

On appelle sens **trigonométrique**, ou sens **direct**, ou sens **positif**, le sens de rotation qui laisse l'axe de rotation concerné sur la gauche lorsque l'on tourne autour.

## 2.1.1

## Base vectorielle directe

Le choix d'une direction et du sens trigonométrique permet de construire une base orthonormée directe, très souvent notée  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  en mécanique.

## Remarque

La notation  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$  n'est plus guère utilisée, car elle nécessite plus de caractères et met en indice les informations importantes.

Pour une base vectorielle orthonormée directe  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , le sens positif se définit très simplement par permutation circulaire :

- autour de  $\vec{x}$ , le sens positif est défini en allant de  $\vec{y}$  vers  $\vec{z}$  ;
- autour de  $\vec{y}$ , le sens positif est défini en allant de  $\vec{z}$  vers  $\vec{x}$  ;
- autour de  $\vec{z}$ , le sens positif est défini en allant de  $\vec{x}$  vers  $\vec{y}$  ;



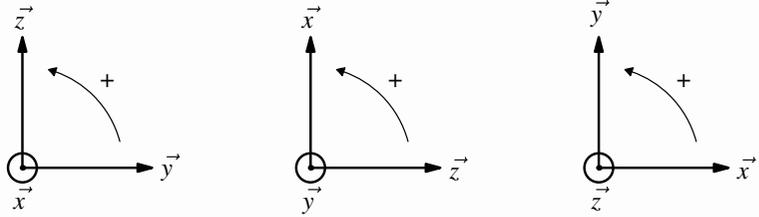
Une direction est un vecteur, un axe est une droite !



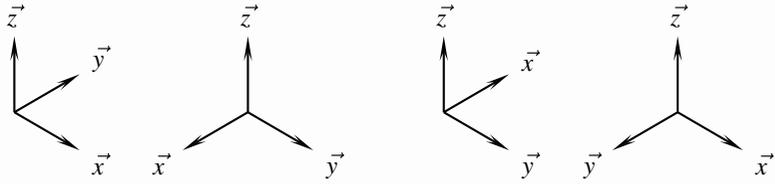
Cette définition est à mettre en parallèle avec la « règle du bonhomme d'Ampère », la « règle du tire-bouchon » ou la « règle des trois doigts » du physicien. Elles donnent bien évidemment toutes le même résultat.

Peu importe le nom des vecteurs, c'est leur ordre qui est fondamental.

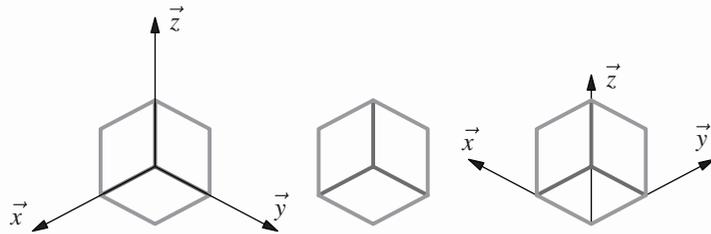
Les bases orthonormées directes sont omniprésentes en mécanique et il faut s'interdire l'emploi de bases indirectes sous peine d'erreurs fréquentes et de perte de temps à la lecture de documents.



**Figure 2.2** Les trois sens de rotation positifs, autour du vecteur qui sort de la feuille.



Les quatre figures ci-dessus permettent d'imaginer les perspectives parce que l'on sait que les bases sont directes.



**Figure 2.3** Interprétation des perspectives

Sur la figure centrale où aucune base n'est définie, on ne sait s'il s'agit d'un cube plein ou d'un trièdre creux, contrairement au cube de droite et au trièdre creux à gauche !

## 2.2 Définir un angle

Un angle est défini entre deux vecteurs. C'est donc une construction plane, dans le plan vectoriel défini par ces deux vecteurs.

La seule activité à savoir mener est ainsi de définir un angle entre deux bases vectorielles ayant un vecteur commun. Ce vecteur commun est bien évidemment le vecteur orthogonal au plan contenant l'angle à définir.

Supposons pour la suite de cette section que l'on ait à définir l'angle  $\alpha$  entre une base vectorielle  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et une base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , les vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$  restant égaux à chaque instant.

### Choix initial

Que ce soit l'enseignant au tableau ou l'étudiant devant sa feuille, il lui faut orienter son plan de travail, en choisissant soit une normale sortante, soit une normale entrante.

Les auteurs de cet ouvrage font et recommandent le choix de toujours orienter le plan de la feuille ou du tableau par la normale sortante.



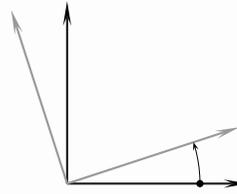
Le fait que la base soit directe n'est pas précisé. Toutes les bases vectorielles le sont dans ce cours.

### 2.2.1

Au volant de son véhicule, un conducteur peut rouler sur la voie de gauche, rien ne l'en empêche. Il n'est juste pas difficile d'imaginer les possibles conséquences désastreuses de ce choix ! Il en est de même pour le choix de l'orientation de la feuille...

L'angle est petit, positif et orienté de la base noire vers la base bleue, pour définir l'angle de la base bleue par rapport à la base noire...

La définition d'un angle débute donc toujours par le dessin de l'empreinte suivante :



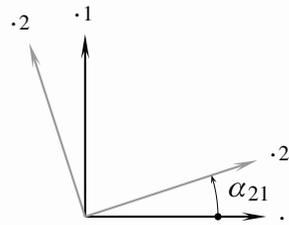
Le vecteur commun aux deux bases vectorielles sort de la feuille, et il doit en être toujours ainsi. Il n'est en conséquence pas nécessaire d'ajouter de symbole pour le préciser ! De même, il est toujours défini petit et positif, de manière à permettre des calculs trigonométriques rapides et sans erreur de signe.

## 2.2.2 La figure de définition

L'empreinte étant posée, il faut décider quel angle on définit :

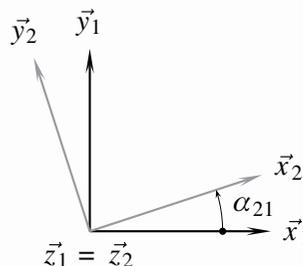
- est-ce l'angle  $\alpha_{21}$  pour définir la position de la base 2 par rapport à la base 1 ?
- ou bien est-ce l'angle  $\alpha_{12}$  pour définir la position de la base 1 par rapport à la base 2 ?

Supposons pour la suite que ce soit l'angle  $\alpha_{21}$ . L'empreinte peut donc être annotée de la manière suivante



L'angle et les indices sont ainsi en correspondance.

Terminer la figure est possible dès que le vecteur commun aux deux bases est identifié. S'il s'agit comme supposé des vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$ , la figure finale est enfin



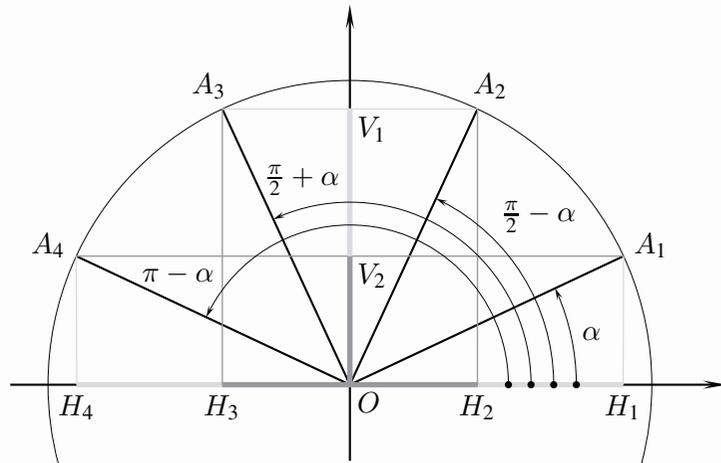
Se poser les questions :

Le vecteur commun sort-il bien de la feuille ? L'angle est-il bien petit et positif ? Les indices sont-ils bien cohérents ?

## 2.2.3 Calculs de trigonométrie

La figure de définition d'un angle s'inspire du cercle trigonométrique et le mécanicien s'en sert pour trouver immédiatement et sans calcul les sinus et cosinus lors des produits scalaires et vectoriels, tel qu'exposé aux sections 2.4.2 et 2.4.3.

Le tableau suivant résume quelques unes parmi les égalités remarquables que l'on peut immédiatement retrouver à partir d'un cercle trigonométrique.



$x \backslash f(x)$	$\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$\sin x$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$

(1)

Pour la détermination de  $\cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)$  par exemple, le rayon concerné est le segment  $[O, A_3]$ , et le cosinus de l'angle  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  est représenté par le segment  $[O, H_3]$ , dont la longueur est la même que celle du sinus de l'angle  $\alpha$ . De plus, l'orientation du segment  $[O, H_3]$  informe de sa valeur algébrique négative.

## 2.3 Les différents repères d'espace

L'espace géométrique est un espace de points.

Le repère d'espace de référence est un repère orthonormé direct construit à partir d'un point particulier et d'une base vectorielle.

Les axes du repère sont les droites issues du point origine et sont orientés par les vecteurs de la base.

Soient  $O$  un point pris comme origine et  $P$  le point courant que l'on veut repérer

### 2.3.1 Repérage cartésien

Le point  $P$  est repéré par trois longueurs algébriques :

$$\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} \quad (2)$$

Un petit volume élémentaire autour du point  $P$  est défini par un parallélépipède de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ .

Le mécanicien, dans un souci de rapidité, nomme  $\vec{x}$  à la fois la direction et le vecteur unitaire de l'axe  $(O, \vec{x})$ , et  $x$  l'abscisse du point courant sur cet axe.

Ces homonymies sont parfois un peu déroutantes au début.

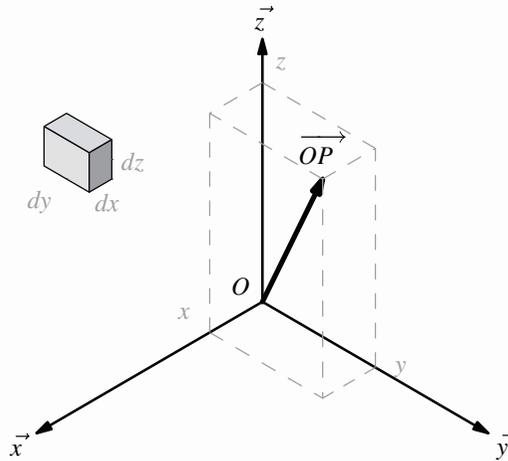


Figure 2.4 Les trois coordonnées cartésiennes d'un point.

### 2.3.2

## Repérage cylindrique

Le point  $P$  est repéré par un angle et deux longueurs algébriques :

$$\overrightarrow{OP} = r\vec{u} + z\vec{z} \quad (3)$$

Un petit volume élémentaire autour du point  $P$  est défini par un parallélépipède de côtés  $dr$ ,  $r d\theta$  et  $dz$ . Son volume est ainsi  $dV = r dr d\theta dz$ .

Une surface rectangulaire élémentaire de normale  $\vec{u}$  autour du point  $P$  est d'aire élémentaire  $dS = r d\theta dz$ .

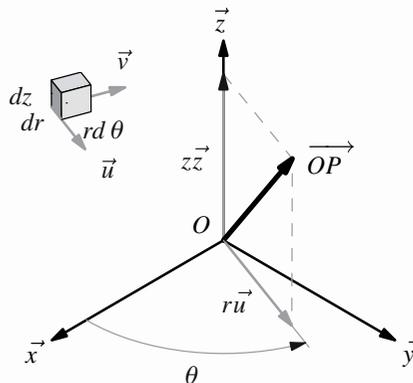


Figure 2.5 Les trois coordonnées cylindriques d'un point.

### 2.3.3

## Repérage sphérique

Le point  $P$  est repéré par deux angles et une longueur algébrique :

$$\overrightarrow{OP} = r\vec{u} \quad (4)$$

Un petit volume élémentaire autour du point  $P$  est défini par un parallélépipède de côtés  $dr$ ,  $r d\varphi$  et  $r \sin \varphi d\theta$ .



On parle également de repérage polaire, par extension de ce qui se fait dans un plan.

Les trois rotations se succèdent bien dans l'ordre précession-nutation-rotation propre.

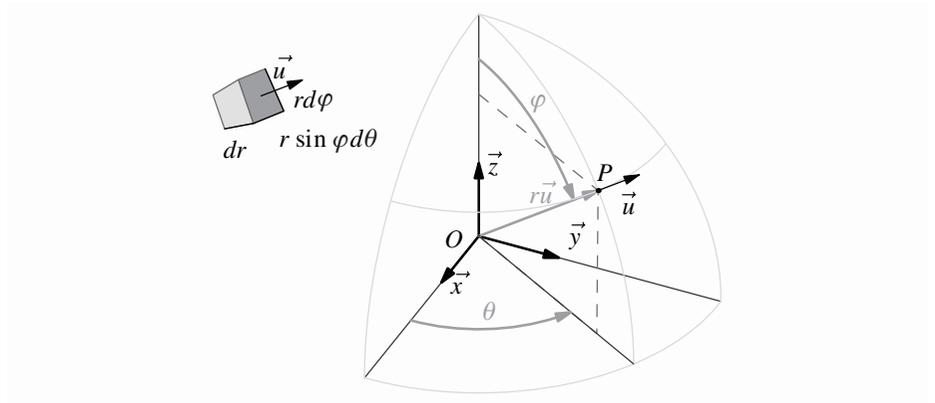


Figure 2.6 Les trois coordonnées sphériques d'un point.

### 2.3.4 Les angles d'Euler

On ne peut terminer la section sur les différents systèmes de repérage sans s'intéresser au problème récurrent en mécanique de positionner une base vectorielle quelconque par rapport à une autre, sachant que l'on ne sait pas définir d'angle pour passer d'une base à une autre lorsqu'il n'y a pas de vecteur commun entre les deux.

Le principe des angles d'Euler résout ce problème de manière simple et efficace. Il s'agit de procéder à trois rotations successives, que l'on peut comprendre aisément en les présentant dans un ordre particulier :

- la première, appelée **précession**, autour d'un des trois vecteurs de la première base, peu importe lequel ;
- la troisième, appelée **rotation propre**, autour d'un des vecteurs de la deuxième base ;
- enfin la deuxième, appelée **nutation**, autour d'un des deux vecteurs orthogonaux aux deux vecteurs précédemment choisis. Ce vecteur est appelé **vecteur nodal**.

Il est logique de présenter les angles d'Euler dans une section présentant les différents moyens pratiques pour définir des repères. Mais les outils vectoriels pour définir les bases intermédiaires ne sont pas encore exposés.

Ces angles seront donc repris et définis en application du produit vectoriel à la page 27.

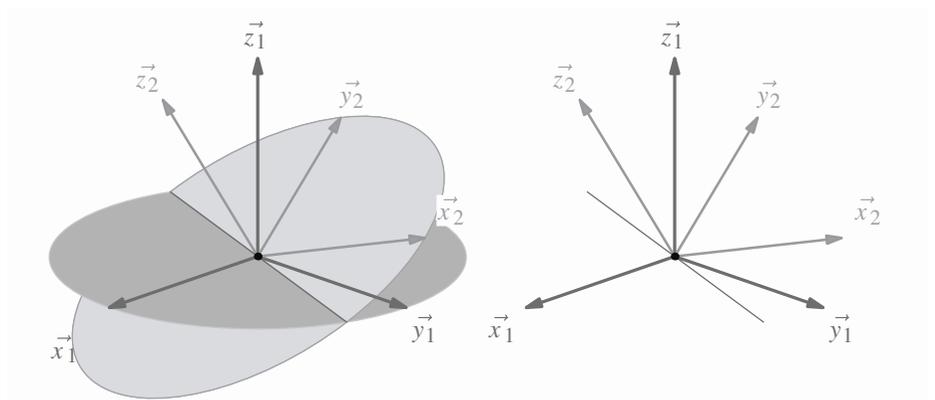


Figure 2.7 Les angles d'Euler.

La précession est ici autour de  $\vec{z}_1$ , la rotation propre autour de  $\vec{z}_2$ , et le vecteur nodal est suivant la droite d'intersection des deux plans illustrant les rotations

## 2.4 Vecteurs – Opérations sur les vecteurs

### 2.4.1

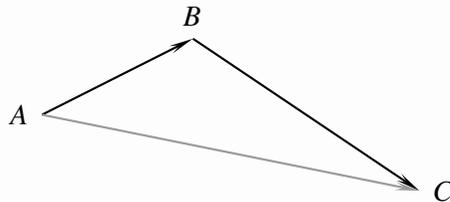
### Vecteur

#### Définition

Un **vecteur** est un élément d'un espace vectoriel.

Le mécanicien s'intéresse plus particulièrement aux vecteurs de l'espace vectoriel euclidien de dimension 3. Ces vecteurs-là ont la particularité de se laisser représenter par des flèches, ce qui est commode pour dessiner des vitesses ou des forces.

Une des propriétés remarquables de ces vecteurs « flèches » est qu'on peut les sommer en les dessinant bout à bout.



$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{BC}$$

$$\text{Soit } \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (5)$$

### 2.4.2

### Produit scalaire

#### Définition

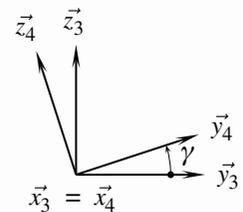
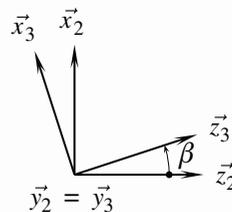
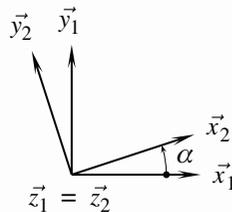
Le **produit scalaire** est une application qui à un couple de vecteurs associe un nombre réel égal au produit des normes et du cosinus de l'angle orienté du premier vecteur vers le deuxième vecteur.

$$E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \longmapsto \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

Le produit scalaire est très rarement employé ainsi en mécanique. Les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont souvent unitaires et le cosinus est directement déterminé à partir des figures de définition des angles, comme cela a été expliqué sur le cercle trigonométrique de la page 22.

#### Exemple de calcul direct de produits scalaires



$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \cos \alpha$	$\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 = \sin \beta$	$\vec{y}_3 \cdot \vec{z}_4 = -\sin \gamma$
$\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_1 = \sin \beta \cos \alpha$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_1 = \cos \beta \cos \alpha$	$\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 = \sin \beta \sin \alpha$
$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 =$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 =$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_4 =$
$\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 =$	$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 =$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_4 =$
$\vec{x}_4 \cdot \vec{y}_1 =$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_4 =$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_4 =$



Cette définition est la plus simple à donner et elle convient fort bien.



Orienter un angle devient vite un réflexe de mécanicien, même les rares fois où cela ne serait pas nécessaire, par exemple pour définir le produit scalaire.

## 2.4.3 Produit vectoriel

Il est indispensable d'orienter l'angle, sous peine de faire des erreurs de signes !

Pour le produit scalaire  $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$ , les deux vecteurs apparaissent sur la première figure et l'angle entre les deux vecteurs est l'angle  $\alpha$ .

Pour le produit scalaire  $\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_3$ , les deux vecteurs apparaissent sur la deuxième figure et l'angle entre les deux vecteurs est l'angle  $\pi/2 - \beta$ , dont le cosinus vaut bien  $\sin \beta$ .

Pour le produit scalaire  $\vec{y}_3 \cdot \vec{z}_4$ , les deux vecteurs apparaissent sur la troisième figure et l'angle entre les deux vecteurs est l'angle  $\pi/2 + \gamma$ , dont le cosinus vaut bien  $-\sin \gamma$ .

Pour le produit scalaire  $\vec{z}_3 \cdot \vec{x}_1$ , les deux vecteurs n'apparaissent pas sur la même figure. Il est alors nécessaire de passer par l'intermédiaire de la base 2. Les deux raisonnements suivants sont équivalents :

- on constate sur la deuxième figure que  $\vec{z}_3 = \cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{x}_2$  et on utilise ensuite la première figure ;
- on constate sur la première figure que  $\vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x}_2 - \sin \alpha \vec{y}_2$  et on utilise ensuite la deuxième figure.

La décomposition des vecteurs  $\vec{z}_3$  et  $\vec{x}_1$  a été faite ici par écrit pour expliquer. C'est une activité à apprendre à mener de tête.

### Définition

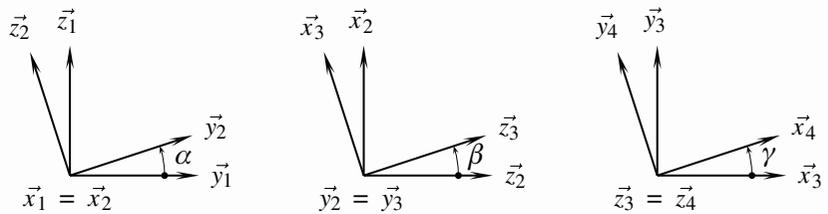
Le **produit vectoriel** est une application qui à un couple de vecteurs associe un vecteur porté par le vecteur unitaire **directement** orthogonal à ces deux vecteurs et de module égal au produit des normes et du sinus de l'angle orienté du premier vecteur vers le deuxième vecteur.

$$E \times E \longrightarrow E$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \longmapsto \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \sin(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \vec{n}$$

Comme pour le produit scalaire, la définition est très rarement utilisée en l'état. Le mécanicien apprend également à effectuer les produits vectoriels directement à partir des figures de définition des angles.

### Exemple de calcul direct de produits vectoriels



$\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = \sin \alpha \vec{x}_1$	$\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_3 = -\cos \beta \vec{y}_2$	$\vec{z}_3 \wedge \vec{z}_4 = \vec{0}$
$\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 = \vec{z}_2$	$\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \beta \vec{y}_2$	$\vec{x}_3 \wedge \vec{y}_4 = \cos \gamma \vec{z}_3$
$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2 =$	$\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_2 =$	$\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_4 =$
$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 =$	$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_3 =$	$\vec{y}_4 \wedge \vec{y}_3 =$

Pour le produit vectoriel  $\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2$ , les deux vecteurs apparaissent sur la première figure et la rotation de  $\vec{y}_1$  vers  $\vec{y}_2$  est positive autour de  $\vec{x}_1$ , d'angle  $\alpha$ .

Pour le produit vectoriel  $\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_3$ , les deux vecteurs apparaissent sur la deuxième figure. Deux raisonnements équivalents permettent de conclure :

- le vecteur directement orthogonal en allant de  $\vec{x}_2$  vers  $\vec{z}_3$  est le vecteur  $-\vec{y}_2$  et l'angle non orienté entre  $\vec{x}_2$  et  $\vec{z}_3$  vaut  $\pi/2 - \beta$ , dont le sinus est égal à  $\cos \beta$  ;
- le résultat est porté par  $+\vec{y}_2$  et la rotation de  $\vec{x}_2$  vers  $\vec{z}_3$  dans le sens positif et d'angle orienté  $3\pi/2 + \beta$  dont le sinus est égal à  $-\cos \beta$ .

### Application du produit vectoriel

Une des applications du produit vectoriel est la construction de trièdres directs. Soit  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  une base orthonormée directe, on a les trois égalités immédiates

$$\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y} \quad \vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{z} \quad \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{x} \quad (6)$$

On dispose maintenant des outils pour définir proprement les angles d'Euler présentés page 24 à la section 2.3.4.

Le vecteur nodal  $\vec{n}$  est à poser orthogonal aux vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$ . En supposant ces derniers différents l'un de l'autre, il suffit de poser

$$\vec{n} = \frac{\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2}{\|\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2\|}$$

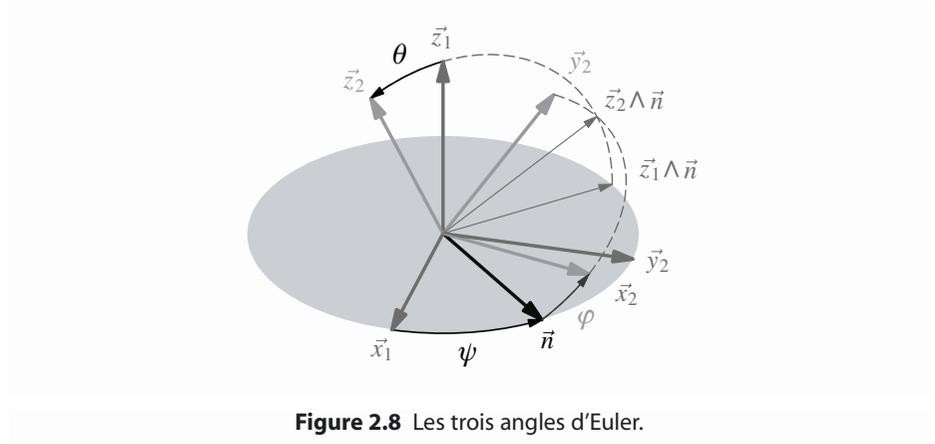
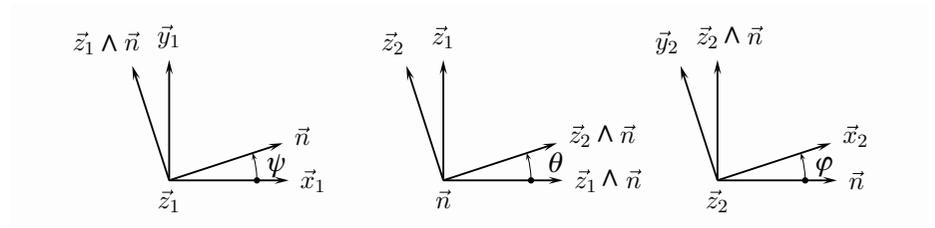


Figure 2.8 Les trois angles d'Euler.



## 2.4.4 Produit mixte

### Définition

Le **produit mixte** est une application qui à un triplet de vecteurs associe un nombre réel égal au produit scalaire du produit vectoriel des deux premiers avec le troisième.

$$E \times E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \longmapsto (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3$$

La propriété importante du produit mixte est son invariance par permutation circulaire sur les vecteurs

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_1) = (\vec{u}_3, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

$$(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3 = (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) \cdot \vec{u}_1 = (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 \quad (7)$$



Vérifier que toutes les bases sont orthonormées directes

## 2.4.5

La place des parenthèses dans le double produit vectoriel est importante.

### Exemple

Si  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est une base orthonormée directe, le produit mixte  $(\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2) \cdot \vec{z}_1$  s'évalue rapidement par

$$(\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2) \cdot \vec{z}_1 = (\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1) \cdot \vec{y}_2 = \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2$$

Le produit mixte est un outil à privilégier lors des calculs à venir. Nombre de lois entrée-sortie recherchées s'expriment sous la forme d'une égalité de deux produits mixtes, et son emploi non seulement allège les écritures, mais limite bien des calculs.

## Double produit vectoriel

Pour mémoire, il n'est pas inutile de rappeler ici la formule de développement du double produit vectoriel. Pour la retrouver rapidement, il suffit de réaliser que le résultat du double produit vectoriel  $\vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3)$  est un vecteur défini dans le plan  $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$  et de respecter l'ordre dans lequel ces deux vecteurs apparaissent.

$$\vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) = (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3)\vec{u}_2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)\vec{u}_3 \quad (8)$$

Le double produit vectoriel est utile pour répondre aux deux questions suivantes :

- comment décomposer un vecteur ?
- comment résoudre l'équation  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$  ?

### a) Décomposer un vecteur

On considère un vecteur  $\vec{U}$  quelconque, un plan  $(\Pi)$  quelconque et  $\vec{n}$  un vecteur orthogonal à ce plan.

On souhaite décomposer le vecteur  $\vec{U}$  en somme d'un vecteur porté par la normale  $\vec{n}$  et d'un vecteur du plan  $(\Pi)$ .

$$\vec{U} = (\vec{U} \cdot \vec{n})\vec{n} + \vec{n} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{n}) \quad (9)$$

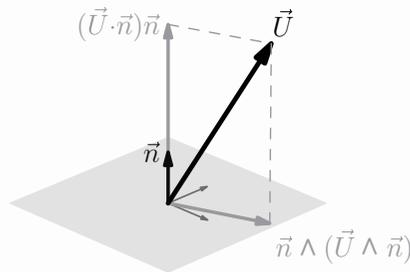


Figure 2.9 Décomposition d'un vecteur.

### b) Résoudre l'équation $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$

L'équation  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$  n'admet de solution que si le vecteur  $\vec{a}$  est non nul et orthogonal au vecteur  $\vec{c}$ . La solution s'écrit alors

$$\vec{x} = -\frac{\vec{a} \wedge \vec{c}}{\vec{a}^2} + \lambda \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (10)$$

## 2.5 Torseurs – Opérations sur les torseurs

### 2.5.1 Champ de vecteurs

#### Définition

On appelle **champ de vecteurs** une application qui à chaque point de l'espace affine associe un vecteur.

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto \vec{u}(P)\end{aligned}$$

Parmi les particularités possibles d'un champ de vecteurs, on en retient deux :

- champ de vecteurs **uniforme**

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \vec{u}(A) = \vec{u}(B) \quad (11)$$

Les vecteurs sont identiques à chaque instant, ce qui ne présume pas de leur évolution au cours du temps.

- champ de vecteurs **équiprojectif**

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \vec{u}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u}(B) \cdot \overrightarrow{AB} \quad (12)$$

Les deux vecteurs  $\vec{u}(A)$  et  $\vec{u}(B)$  ont même projection orthogonale sur la direction  $\overrightarrow{AB}$ .

### 2.5.2 Torseur

#### Définition

Un **torseur** est un champ de vecteurs équiprojectif.

Le mot *torseur*, de la même famille que torsade, vient de la forme remarquable d'un champ de vecteurs équiprojectif. Cette forme est proposée un peu plus loin à la page 31.

Un champ de vecteurs équiprojectif a la propriété remarquable de correspondre à une application linéaire antisymétrique. Il existe un vecteur que l'on note  $\vec{r}$  et qui permet de changer facilement de points sur le champ de vecteur :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \vec{u}(B) = \vec{u}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{AB} \quad (13)$$

#### Définitions

Le vecteur  $\vec{r}$  est appelé **vecteur résultante** du torseur.

Le vecteur  $\vec{u}(P)$  est appelé **vecteur moment** au point  $P$  du torseur.

Les deux vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{u}(P)$  sont appelés **éléments de réduction** du torseur au point  $P$ . Ils sont habituellement présentés derrière une accolade ouvrante, en commençant toujours par le vecteur résultante.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Vecteur résultante} \\ \text{Vecteur moment au point } P \end{array} \right. \quad (14)$$



Cette formule 13 peut être appelée formule de changement de points.

Ne pas prendre le même point pour les éléments de réduction conduit à un résultat aussi intéressant que le résultat d'une addition pour laquelle on sommerait unités et dizaines.

### 2.5.3

#### Remarque

La terminologie employée, *torseur*, *résultante* et *moment* a des origines historiques. Les scientifiques ont si longtemps buté sur la modélisation des actions mécaniques que les termes issus de leurs préoccupations se sont ancrés aux objets mathématiques qui les modélisent. Aujourd'hui, ces objets modélisent bien d'autres choses que les actions mécaniques, mais ont gardé leurs noms originaux...

## Somme de deux torseurs

Soient deux champs de vecteurs équiprojectif  $\vec{u}_1(P)$  et  $\vec{u}_2(P)$ . On construit un nouveau champ de vecteurs  $\vec{u}(P)$  défini par  $\forall P, \vec{u}(P) = \vec{u}_1(P) + \vec{u}_2(P)$ . Ce champ  $\vec{u}(P)$  est également un champ de vecteurs équiprojectif, dont les éléments de réduction  $\vec{r}$  et  $\vec{u}(A)$  se déterminent simplement par

$$\begin{cases} \vec{r} &= \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \\ \vec{u}(A) &= \vec{u}_1(A) + \vec{u}_2(A) \end{cases} \quad (15)$$

L'écriture torsorielle de la somme de deux champs de vecteurs équiprojectifs est élémentaire.

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \quad (16)$$

### 2.5.4

## Comoment – Automoment

Soient deux champs de vecteurs équiprojectif  $\vec{u}_1(P)$  et  $\vec{u}_2(P)$  dont on détermine les éléments de réduction en un même point  $A$ .

$$\mathcal{T}_1 = \begin{cases} \vec{r}_1 \\ \vec{u}_1(A) \end{cases} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{cases} \vec{r}_2 \\ \vec{u}_2(A) \end{cases}$$

#### Définition

On appelle **comoment** des deux torseurs  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$ , que l'on note  $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ , le nombre scalaire obtenu à partir des éléments de réduction de la manière suivante

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{r}_1 \cdot \vec{u}_2(A) + \vec{u}_1(A) \cdot \vec{r}_2 \quad (17)$$

Le comoment est indépendant du point de calcul.

Le comoment d'un torseur avec lui-même donne le double du produit scalaire de la résultante et du moment en un point quelconque.

#### Définition

On appelle **automoment** d'un torseur l'invariant scalaire obtenu lors du produit scalaire du vecteur résultante et du vecteur moment en un point quelconque.

### 2.5.5

## Axe central

Pour un torseur à résultante non nulle, il existe une droite particulière de l'espace pour laquelle le vecteur moment est colinéaire au vecteur résultante.

Soit un torseur  $\mathcal{T}$  connu par ses éléments de réduction  $\vec{r}$  et  $\vec{u}(A)$ . On recherche l'ensemble des points  $P$  vérifiant  $\vec{r} \wedge \vec{u}(P) = \vec{0}$ .

En utilisant la formule de changement de points  $\vec{u}(P) = \vec{u}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{AP}$  pour introduire le moment connu  $\vec{u}(A)$ , cela revient à chercher l'ensemble des points  $P$  vérifiant :

$$\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \overrightarrow{AP}) = -\vec{r} \wedge \vec{u}(A)$$

On retrouve le développement du calcul de l'exercice 2.13 où on recherche les solutions d'une équation de type  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$ . Comme ici le vecteur  $\vec{r} \wedge \vec{u}(A)$  est orthogonal au vecteur  $\vec{r}$ , la seule condition est d'avoir un vecteur résultante non nul pour une infinité de vecteurs solution de la forme :

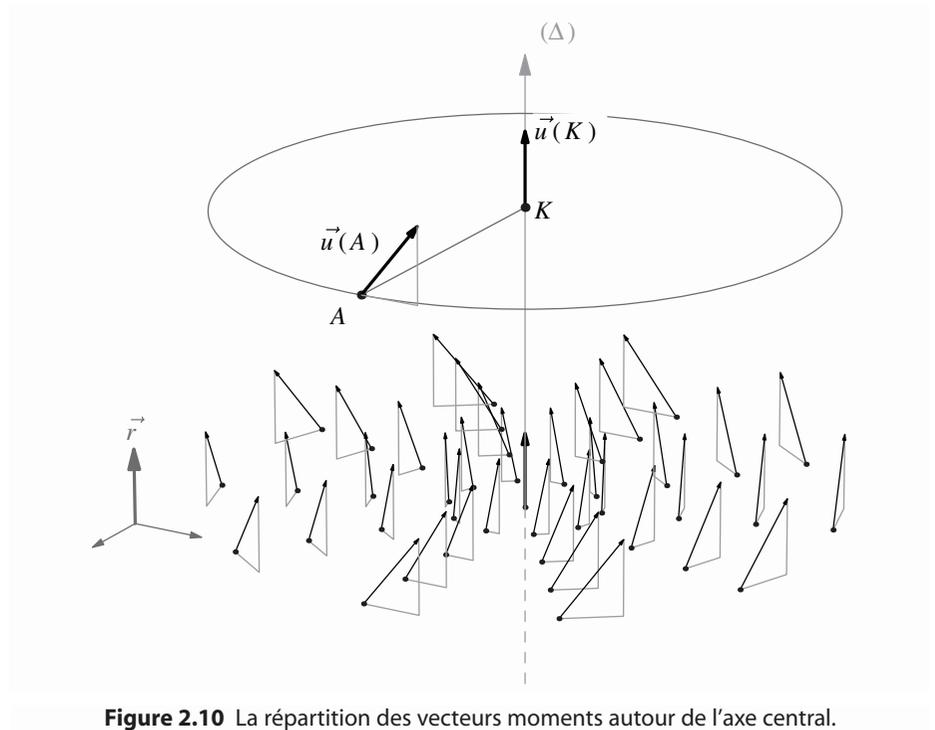
$$\vec{AP} = \frac{\vec{r} \wedge \vec{u}(A)}{\vec{r}^2} + \lambda \vec{r} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

### Définition

On appelle **axe central** d'un torseur la droite pour laquelle le vecteur résultante et le vecteur moment sont colinéaires. Cet axe central est défini dès que le vecteur résultante n'est pas nul.

La représentation graphique la plus remarquable d'un torseur est celle construite autour de l'axe central :

- l'axe central est orienté par le vecteur résultante ;
- tous les points de l'axe central ont le même moment, appelé **moment central** ;
- le moment central est colinéaire à la résultante ;
- le vecteur moment est invariant le long de toute droite parallèle à l'axe central ;
- deux plans perpendiculaires à l'axe central admettent la même répartition des vecteurs moments. Pour un plan perpendiculaire à l'axe central :
  - un vecteur moment en un point quelconque  $Q$  est égal au moment central augmenté d'une composante orthogonale à la résultante et proportionnelle à la distance de l'axe central au point considéré ;
  - pour tout point d'un cercle centré sur l'axe central, la composante additionnelle a le même module et est orthogonale au rayon.



**Figure 2.10** La répartition des vecteurs moments autour de l'axe central.



Tracer ces propositions sur la figure 2.10.

## 2.5.6 Torseurs particuliers

### a) Torseur nul

#### Définition

Un **torseur nul** est un champ de vecteurs nul. Ses éléments de réduction sont les vecteurs nuls et on le note simplement  $\mathcal{O}$ .

### b) Torseur couple

#### Définition

Un **torseur couple** est un champ de vecteurs uniforme non nul. Sa résultante est le vecteur nul.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{C} \end{array} \right. \quad (18)$$

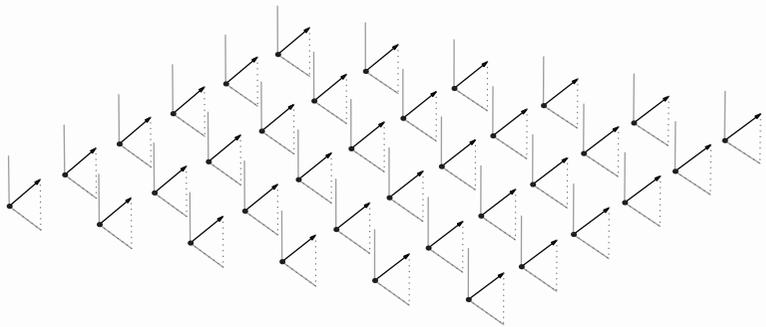


Figure 2.11 Un champ de vecteurs uniforme non nul.

### c) Torseur glisseur

#### Définition

Un **torseur glisseur** est un champ de vecteurs non nul à automoment nul. Le moment est nul en tout point de l'axe central.

$$\mathcal{T} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad (19)$$

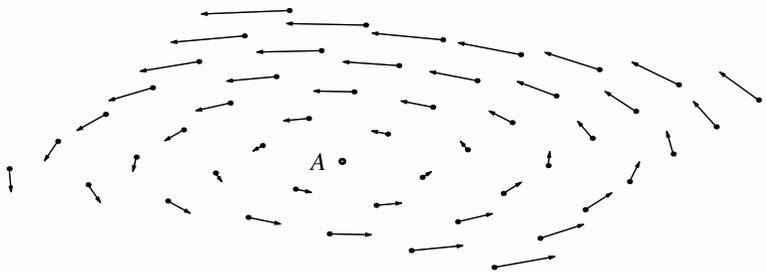


Figure 2.12 Un champ de vecteurs non nul à automoment nul.

## 2.6 Dérivation vectorielle

Savoir décrire des positions est une compétence recherchée. Mais le mécanicien souhaite connaître également l'évolution de ces positions au cours du temps. Il est donc nécessaire de savoir décrire les variations d'un vecteur au cours du temps.

### Définition

La dérivée d'un vecteur  $\vec{U}$  dans une base  $k$  est un vecteur dont les composantes dans la base  $k$  sont les dérivées respectives des coordonnées de  $\vec{U}$  dans cette même base.

Cette définition est donnée ici pour mémoire uniquement et sans publicité supplémentaire, car il faut absolument éviter de l'utiliser. Cela conduit à des calculs fastidieux aux résultats peu exploitables.

Par contre, cette définition introduit bien le fait que dériver un vecteur implique une base d'observation. Une notation précisant cette base est quant à elle indispensable.

### Notation

La dérivée d'un vecteur  $\vec{U}$  par rapport au temps n'a de sens que relatif à une base vectorielle  $k$  et se note  $\left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k$

### 2.6.1

## Règles pratiques de calcul

Démontrer toutes les propriétés de la dérivation vectorielle dépasse largement le cadre de cet ouvrage et est habituellement fait lors du cours de mathématique. On se contente ici d'énoncer les règles de calculs à mettre en œuvre en mécanique.

- Dérivée d'une somme

$$\left[ \frac{d(\vec{U} + \vec{V})}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k + \left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_k \quad (20)$$

- Dérivée d'un produit

$$\left[ \frac{d(\lambda\vec{U})}{dt} \right]_k = \frac{d\lambda}{dt} \vec{U} + \lambda \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k \quad (21)$$

- Dérivée d'un produit scalaire

$$\frac{d(\vec{U} \cdot \vec{V})}{dt} = \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_k \quad (22)$$

- Dérivée d'un produit vectoriel

$$\left[ \frac{d(\vec{U} \wedge \vec{V})}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \right]_k \quad (23)$$

### 2.6.2

## Variation d'un vecteur unitaire

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme égale à 1, donc constante. La seule évolution possible est un changement de direction qui ne peut être apprécié que par rapport à une base vectorielle d'observation.

Bien repérer l'ordre des indices  $i$  et  $k$  !

Ces notations abrégées conviennent pour les scalaires, mais NE conviennent PAS pour les vecteurs !

Que se passe-t-il lorsque l'on souhaite changer de base d'observation ?

Répondre à cette question débouche sur la formule de changement de bases, appelée formule de dérivation vectorielle. C'est la formule fondamentale à utiliser pour tous les calculs de dérivation vectorielle.

**Définition**

On appelle **formule de dérivation vectorielle** la formule de changement de bases d'observation. Elle s'exprime par

$$\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_i + \vec{\Omega}(i/k) \wedge \vec{u} \quad (24)$$

Le vecteur  $\vec{\Omega}(i/k)$  est appelé vecteur rotation de la base vectorielle  $i$  par rapport à la base vectorielle  $k$ , et cette formule permet de déterminer la dérivée d'un vecteur dans une base  $k$  à partir de la connaissance de sa dérivée dans une base  $i$ . Pour les calculs pratiques, il apparaît de suite judicieux de chercher à chaque fois une base  $i$  dans laquelle le vecteur  $\vec{u}$  ne bouge pas.

## 2.6.3 Le vecteur rotation

Le vecteur rotation est bien évidemment en relation avec les angles que l'on définit pour passer d'une base vectorielle à une autre. On le construit en deux étapes, en commençant par le cas où deux bases vectorielles ont un vecteur commun.

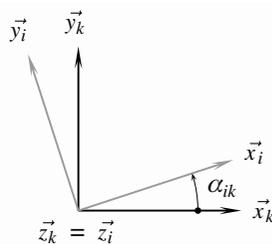
**Notation**

Pour accélérer les écritures, il est usuel de noter la dérivée première d'un paramètre scalaire par un point au dessus de ce paramètre à la place de la fraction  $d/dt$ . De même, la dérivée seconde est notée avec deux points consécutifs.

- exemple pour un angle :  $\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}$
- pour une longueur scalaire :  $\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

**Définition**

Soient deux bases vectorielles  $i$  et  $k$  ayant un vecteur commun. On appelle **vecteur rotation** de la base  $i$  par rapport à la base  $k$  le vecteur noté  $\vec{\Omega}(i/k)$ , porté par la direction commune aux deux bases et de valeur algébrique la dérivée scalaire de l'angle défini entre les deux bases.



Le vecteur rotation est défini par

$$\vec{\Omega}(i/k) = \dot{\alpha}_{ik} \vec{z}_k$$

Le terme  $\dot{\alpha}_{ik}$  est appelé **taux de rotation**, parfois vitesse de rotation, et a comme unité le radian par seconde.

## 2.6.4 Composition des rotations

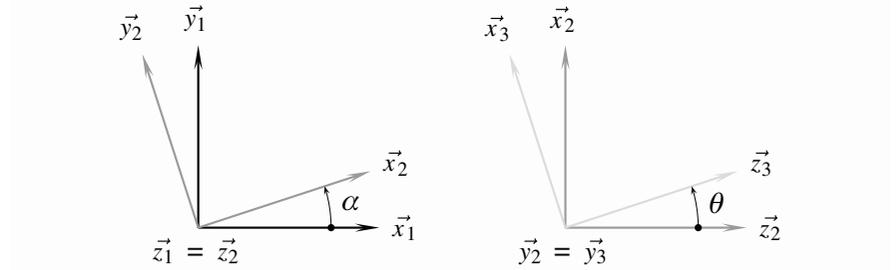
La notion plus générale de composition des mouvements est reprise au chapitre suivant.

Lorsque les bases vectorielles n'ont pas de vecteurs communs, on s'attache à enchaîner des rotations élémentaires, comme pour les angles d'Euler, de manière à se retrouver dans la situation connue où deux bases vectorielles ont un vecteur commun.

En supposant pouvoir décrire une rotation  $i/k$  en enchaînant deux rotations  $i/j$  et  $j/k$ , on obtient le vecteur rotation  $\vec{\mathcal{D}}(i/k)$  par la somme des deux vecteurs rotation  $\vec{\mathcal{D}}(i/j)$  et  $\vec{\mathcal{D}}(j/k)$

$$\vec{\mathcal{D}}(i/k) = \vec{\mathcal{D}}(i/j) + \vec{\mathcal{D}}(j/k) \quad (25)$$

### Exemple



Ces deux figures permettent de poser  $\vec{\mathcal{D}}(2/1) = \alpha \vec{z}_1$  et  $\vec{\mathcal{D}}(3/2) = \theta \vec{y}_2$ .

Le vecteur rotation  $\vec{\mathcal{D}}(3/1)$  est obtenu par la composition des deux rotations élémentaires 3/2 et 2/1 et on obtient instantanément son expression par la somme des deux vecteurs rotation précédents

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}}(3/1) &= \vec{\mathcal{D}}(3/2) + \vec{\mathcal{D}}(2/1) \\ &= \theta \vec{y}_2 + \alpha \vec{z}_1 \end{aligned} \quad (26)$$

## 2.6.5 Dérivation d'un vecteur quelconque

Soit  $\vec{U}(t) = \lambda(t)\vec{u}(t)$  un vecteur quelconque,  $\vec{u}(t)$  étant un vecteur unitaire. Toutes les quantités dépendent du temps, ce qui fait que la variable  $t$  est rarement explicitée et l'on se contente d'écrire : Soit  $\vec{U} = \lambda \vec{u}$  un vecteur quelconque,  $\vec{u}$  étant un vecteur unitaire.

Au cours du temps et par rapport à une base d'observation, le vecteur  $\vec{U}$  peut changer de module ou changer de direction, ce qu'exprime très bien la formule de dérivation d'un produit de fonctions.

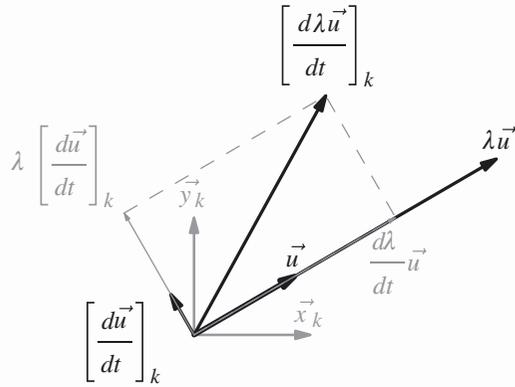
$$\left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\lambda \vec{u}}{dt} \right]_k = \frac{d\lambda}{dt} \vec{u} + \lambda \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_k \quad (27)$$

- le terme  $\frac{d\lambda}{dt} \vec{u}$  représente la vitesse de variation de module à direction constante ;
- le terme  $\lambda \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_k$  représente la vitesse de variation de direction à module constant.

### Exemple

On reprend les figures de définition des angles  $\alpha$  et  $\theta$  de l'exemple précédent vu à la section 2.6.4, et on définit le vecteur  $\vec{AP} = \rho \vec{x}_2 + b \vec{x}_3$ , la longueur  $b$  restant constante au cours du temps. La dérivée de ce vecteur dans la base 1 se calcule par

$$\left[ \frac{d\vec{AP}}{dt} \right]_1 = \dot{\rho} \vec{x}_2 + \rho \left[ \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_1 + b \left[ \frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_1 \quad (28)$$



**Figure 2.13** Interprétation graphique de la formule de dérivation.

Deux calculs indépendants sont à mener, en utilisant la formule de changement de base puis les figures de définition des angles

- d'une part

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_1 &= \left[ \frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_2 + \vec{\Omega} (2/1) \wedge \vec{x}_2 \\ &= \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 \\ &= \dot{\alpha} \vec{y}_2 \end{aligned} \tag{29}$$

- d'autre part

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_1 &= \left[ \frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_3 + \vec{\Omega} (3/1) \wedge \vec{x}_3 \\ &= (\dot{\theta} \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \vec{z}_1) \wedge \vec{x}_3 \\ &= -\dot{\theta} \vec{z}_3 + \dot{\alpha} \cos \theta \vec{y}_2 \end{aligned} \tag{30}$$

On en déduit, en mettant en facteur les vitesses angulaires

$$\left[ \frac{d\vec{AP}}{dt} \right]_1 = \dot{\rho} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} (\rho + b \cos \theta) \vec{y}_2 - \dot{\theta} b \vec{z}_3 \tag{31}$$



Le résultat du calcul est exprimé le plus simplement possible !

## Synthèse

### Connaissances

Je sais définir les mots ou expressions :

- direction, axe ;
- droite, gauche ;
- sens trigonométrique, sens positif, sens direct ;
- repère d'espace ;
- angle ;
- angles d'Euler ;
- vecteur ;
- champ de vecteurs ;
- champ de vecteurs uniforme, équijectif ;
- torseur ;
- éléments de réduction d'un torseur, résultante et moment ;
- glisseur et couple ;
- automoment et comoment ;
- axe central ;
- vecteur rotation.

Je connais :

- la formule de changement de points ;
- la formule de dérivation vectorielle.

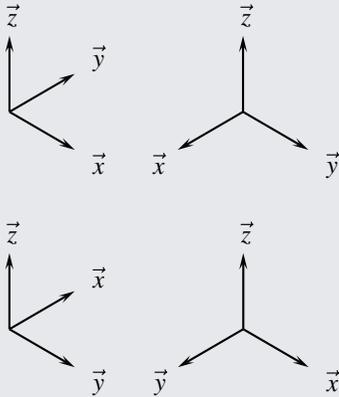
### Savoir-faire

Je sais :

- tracer la figure de définition d'un angle ;
- trouver un cosinus ou un sinus sur le cercle trigonométrique ;
- déterminer un produit scalaire ou un produit vectoriel à l'aide d'une figure de définition d'un angle ;
- permuter les vecteurs dans un produit mixte ;
- faire la somme de deux vecteurs ;
- faire la somme de deux torseurs ;
- dériver une combinaison linéaire de vecteurs ;
- dériver un produit scalaire ou vectoriel de vecteurs.

## Exercices d'application

**2.1** Associer aux bases vectorielles directes ci-dessous des cubes opaques de manière à ce que les trois flèches se dessinent sur les arêtes de ces cubes.



**2.2** Un automobiliste demande son chemin. Un passant lui faisant face lui dit que pour retrouver sa route, il doit tourner à droite après avoir reculé sur cent mètres.

1. Dans quel sens le conducteur tourne-t-il le volant après la marche arrière ?
  - comme s'il allait en marche avant ?
  - dans l'autre sens car la droite de son interlocuteur est à sa gauche ?

Le conducteur tourne-t-il à droite en marche avant ou en marche arrière ?

2. Proposer si nécessaire une réponse du passant plus explicite.

**2.3** Tracer les figures de définition des angles  $\theta$  et  $\varphi$  utilisés pour le repérage sphérique exposé à la section 2.3.3 page 23.

**2.4** Définir un angle négatif.

**2.5** En reprenant les angles d'Euler présentés figure 2.7 page 24 :

1. Définir les quatre bases vectorielles orthonormées directes utilisées.
2. Déterminer le vecteur rotation associé.

**2.6** Définir les relations entre les coordonnées sphériques, cylindriques et cartésiennes.

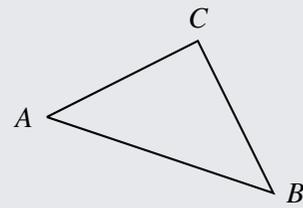
**2.7** Décrire un volume ou une surface met en œuvre trois objets :

- un schéma pour poser les paramètres géométriques ;
- une formule de définition de l'élément géométrique élémentaire ;
- un tableau définissant les plages de variation des paramètres utilisés.

En vue de calculer le volume et l'aire d'une sphère en fonction de son rayon  $R$  :

1. Définir ces trois objets.
2. Déterminer les expressions recherchées en fonction du rayon  $R$  de la sphère étudiée.

**2.8** Soit un triangle quelconque  $ABC$ . Les côtés opposés aux sommets sont respectivement de longueur  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Les angles intérieurs au triangle sont respectivement notés  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .



1. Tracer les trois angles en prenant soin de les orienter.
2. Illustrer la relation scalaire sur les angles.
3. Trouver une relation entre les longueurs des côtés et le seul angle  $\beta$ .

**2.9** Définir les cas de nullité :

1. d'un produit scalaire ;
2. d'un produit vectoriel ;
3. d'un produit mixte.

**2.10** Compléter les deux tableaux concernant :

- les produits scalaires, page 25
- les produits vectoriels, page 26

**2.11** On considère les trois bases orthonormées directes suivantes :

- $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- $B_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Elles sont définies ainsi :

- $B_2$  se déduit de  $B_1$  par rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  ;
- $B_3$  se déduit de  $B_2$  par rotation d'angle  $\beta$  autour de  $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$ .

1. Tracer les deux figures de changement de base.

2. Effectuer les produits scalaires suivants, en exploitant au mieux les figures précédentes

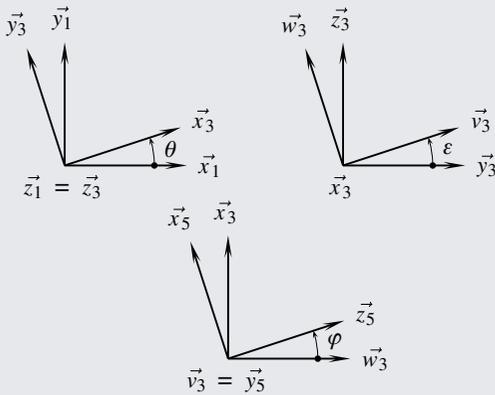
$$\begin{array}{ll} \vec{y}_2 \cdot \vec{z}_1 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3 \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 & \vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 \end{array}$$

3. Calculer de même les produits vectoriels proposés ci-dessous

$$\begin{array}{ll} \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 & \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_3 \\ \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1 & \vec{y}_3 \wedge \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 & \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3 \end{array}$$

**2.12** À partir des figures de définition des trois angles  $\theta$ ,  $\varepsilon$  et  $\varphi$ , compléter le tableau ci-dessous.

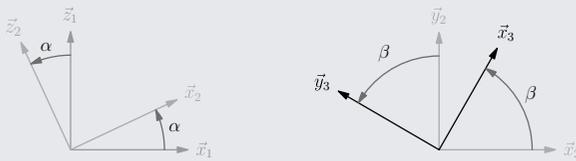
$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 =$	$\vec{z}_5 \cdot \vec{x}_3 =$	$\vec{z}_5 \cdot \vec{y}_3 =$
$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3 =$	$\vec{w}_3 \wedge \vec{y}_3 =$	$\vec{v}_3 \wedge \vec{x}_5 =$
$(\vec{y}_1, \vec{w}_3, \vec{x}_1) =$	$\vec{v}_3 \wedge \vec{x}_3 =$	$(\vec{x}_5, \vec{w}_3, \vec{z}_5) =$
$\vec{x}_5 \wedge \vec{x}_3 =$	$(\vec{x}_5, \vec{y}_3, \vec{v}_3) =$	$(\vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_5) =$
$\vec{z}_5 \cdot \vec{z}_1 =$	$\vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1 =$	$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_5 =$



2.13 On considère les trois bases orthonormées directes suivantes :

- $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- $B_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Elles sont déduites les unes par rapport aux autres par les deux rotations décrites sur les figures ci-dessous



Les figures de calcul proposées

1. Commenter les deux figures de changement de base fournies.

2. Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{array}{ll} \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 & \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_1 & \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 & \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_3 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_3 & \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_3 \end{array}$$

2.14 En utilisant le développement du double produit vectoriel, démontrer la formule de décomposition du vecteur  $\vec{U}$  présentée page 28.

2.15 Supposons un vecteur  $\vec{a}$  non nul et considérons l'équation  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{c}$  :

1. Montrer que cette équation n'admet pas de solution si les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{c}$  ne sont pas orthogonaux.
2. Montrer que si  $\vec{x}$  est solution de l'équation, alors le vecteur  $\vec{x} + \lambda \vec{a}$ , avec  $\lambda$  un réel quelconque, est également solution.
3. Effectuer le produit vectoriel à gauche par le vecteur  $\vec{a}$  et en déduire la solution.

2.16 Montrer qu'un champ de vecteurs vérifiant la formule de changement de points est un champ de vecteurs équiprojectif.

2.17 Montrer que l'automoment d'un torseur est un invariant scalaire pour le torseur.

2.18 Montrer que le comoment de deux torseurs est indépendant du point choisi pour le vecteur moment.

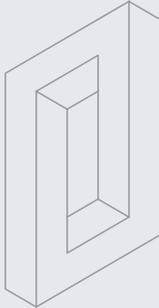
2.19 Soit un vecteur unitaire  $\vec{u}$ . En considérant qu'à chaque instant le carré scalaire du vecteur  $\vec{u}$  reste constant, montrer l'orthogonalité du vecteur  $\vec{u}$  et de son vecteur dérivé dans une base  $b$ .

## Exercices d'approfondissement

### 2.20 Appréhender une perspective

Décrire un objet sur une feuille de papier est délicat : en effet, il est nécessaire d'imaginer un espace à 3 dimensions à partir d'une représentation en 2 dimensions.

On considère l'objet représenté sur la figure ci-dessous pour illustrer cette proposition.



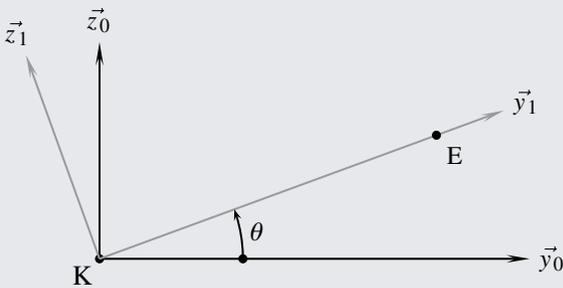
Perspective isométrique de l'objet étudié

Il est ajouté que toutes les faces apparentes de cet objet sont des plans.

1. Montrer simplement qu'il est impossible de décrire l'objet à partir de la représentation fournie.

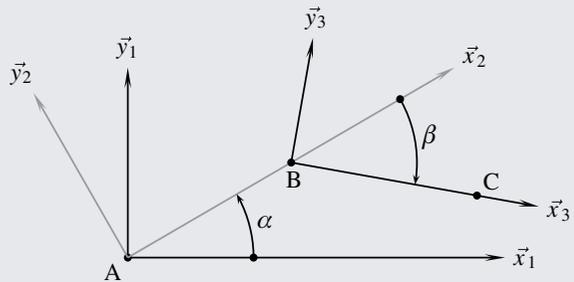
2. Proposer deux représentations cohérentes de l'objet.

**2.21** Un manège pour enfant comporte un bras de longueur variable en rotation autour d'un axe. Le plan d'évolution du bras est un plan  $(K, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Un moteur actionne la rotation d'axe  $(K, \vec{x}_0)$  et un vérin fait varier la longueur  $\rho$  du bras défini par  $\vec{K}\vec{E} = \rho\vec{y}_1$ .



1. Calculer  $\left[ \frac{d\vec{K}\vec{E}}{dt} \right]_0$ .
2. Calculer  $\left[ \frac{d^2\vec{K}\vec{E}}{dt^2} \right]_0$ .

**2.22** Soit la structure très simplifiée d'un bras de robot évoluant dans un plan  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ . Deux moteurs pilotent les deux rotations possibles, respectivement autour des axes  $(A, \vec{z}_1)$  et  $(B, \vec{z}_2)$ .



On donne  $\vec{A}\vec{B} = a\vec{x}_2$  et  $\vec{B}\vec{C} = b\vec{x}_3$ , les longueurs  $a$  et  $b$  étant constantes au cours du temps.

1. Tracer les figures de définition des deux angles  $\alpha$  et  $\beta$ .
2. En déduire les expressions des vecteurs rotations  $\vec{\Omega}(2/1)$  et  $\vec{\Omega}(3/2)$ .

3. Calculer  $\left[ \frac{d\vec{A}\vec{B}}{dt} \right]_1$ .

4. Calculer  $\left[ \frac{d\vec{B}\vec{C}}{dt} \right]_2$ , puis  $\left[ \frac{d\vec{B}\vec{C}}{dt} \right]_1$ .

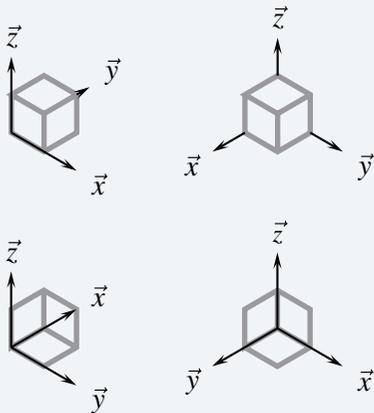
5. En déduire l'expression de  $\left[ \frac{d\vec{A}\vec{C}}{dt} \right]_1$ .

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 2.1

C'est parce que les bases sont directes que l'on peut interpréter les perspectives

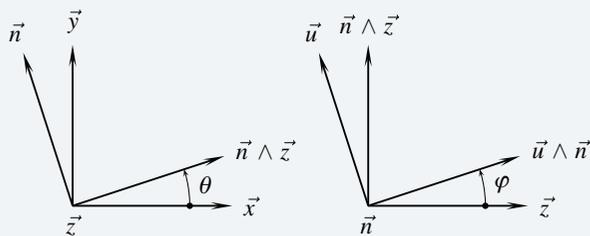


### 2.2

1. Cet énoncé illustre la nécessité d'orienter correctement l'espace. Il est en effet difficile de répondre aux questions posées, car toute proposition s'appuie sur un *a priori* concernant la référence. Entre autres, la droite citée est-elle celle du véhicule ou celle du passant ?

2. Une référence explicite est à insérer dans la réponse du passant, ce qui est fait par exemple avec une proposition telle que « Il vous faut reculer sur cent mètres, puis tourner en marche avant sur votre droite... »

### 2.3



### 2.4

Autant prendre une autoroute à contre sens. Parfois, on s'en sort...

### 2.5

1. Les quatre bases orthonormées directes utilisées sont :

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\psi} (\vec{n}, \vec{z}_1 \wedge \vec{n}, \vec{z}_1) \xrightarrow{\theta} (\vec{n}, \vec{z}_2 \wedge \vec{n}, \vec{z}_2) \xrightarrow{\varphi} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

2. Les trois rotations se composent et le résultat est immédiat

$$\vec{\Omega}(2/1) = \psi \vec{z}_1 + \theta \vec{n} + \varphi \vec{z}_2$$

### 2.6

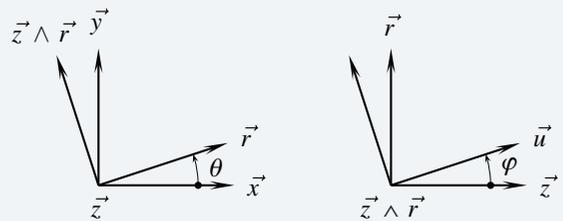
Il est nécessaire de commencer par différencier les vecteurs  $\vec{u}$  et les rayons  $r$  des coordonnées sphériques et cylindriques.

Soit  $\vec{r}$  le vecteur unitaire variable utilisé en coordonnées cylindriques et soit  $u$  le rayon utilisé en coordonnées sphériques.

Les trois descriptions possibles du vecteur  $\vec{OP}$  sont ainsi équivalentes :

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} \\ \Leftrightarrow \vec{OP} &= r\vec{r} + z\vec{z} \\ \Leftrightarrow \vec{OP} &= u\vec{u} \end{aligned}$$

Les cinq produits scalaires possibles, respectivement par  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ,  $\vec{r}$  et  $\vec{u}$  donnent toutes les relations possibles. Pour les expliciter, il suffit d'utiliser les figures de définition d'angle



cartésien ← cylindrique	cartésien ← sphérique
$x = r \cos \theta$	$x = u \sin \varphi \cos \theta$
$y = r \sin \theta$	$y = u \sin \varphi \sin \theta$
$z = z$	$z = u \cos \varphi$

### cylindrique ← sphérique

$$\begin{aligned} r &= u \sin \varphi \\ \theta &= \theta \\ z &= u \cos \varphi \end{aligned}$$

### 2.7

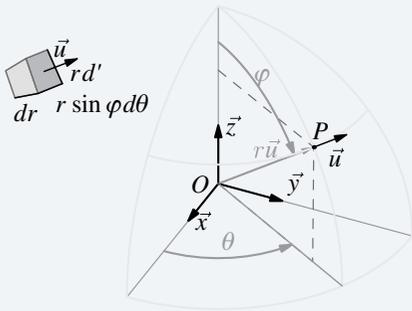
De nombreuses possibilités de descriptions sont possibles, la seule contrainte est de soigner la cohérence entre les trois objets requis. Le plus simple ici est de compléter le repérage sphérique proposé à la section 2.3.3.

Le volume élémentaire est définie par

$$dV = r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\theta$$

Trois plages de variation possibles sont exposées ici

$r$	$[0, R]$	$[0, R]$	$[-R, R]$
$\theta$	$[0, 2\pi[$	$[0, \pi[$	$[-\pi/2, +\pi/2]$
$\varphi$	$[0, \pi]$	$[-\pi, \pi]$	$[0, \pi]$



La surface extérieure élémentaire est quant à elle définie par

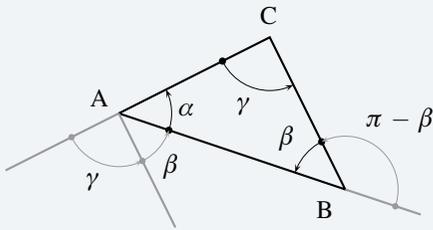
$$dS = R^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

On retrouve ainsi les résultats classiques pour une sphère de rayon  $R$  :

$$\begin{aligned} \text{Volume} &: \frac{4}{3} \pi R^3 \\ \text{Aire} &: 4\pi R^2 \end{aligned}$$

## 2.8

1. Le vecteur normal à la feuille est choisi systématiquement sortant, ce qui permet de définir le sens positif sur la feuille de papier



2. La relation scalaire sur les angles est clairement  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

3. Pour trouver une relation entre les longueurs des côtés et le seul angle  $\beta$ , il suffit de décrire le vecteur  $\vec{AC}$  comme somme des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$  et d'élever au carré scalaire chacun des membres de l'égalité

$$\vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + 2 \vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

Le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$  fait intervenir le cosinus de l'angle  $\pi - \beta$  et le résultat recherché est

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta$$

## 2.9

1. Si le produit scalaire  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  est nul, alors :

- soit le vecteur  $\vec{x}$  est nul ;
- soit le vecteur  $\vec{y}$  est nul ;
- soit les deux vecteurs sont orthogonaux.

2. Si le produit vectoriel  $\vec{x} \wedge \vec{y}$  est nul, alors :

- soit le vecteur  $\vec{x}$  est nul ;
- soit le vecteur  $\vec{y}$  est nul ;
- soit les deux vecteurs sont colinéaires.

3. Si le produit mixte  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est nul, alors :

- soit au moins un des trois vecteurs est nul ;
- soit les trois vecteurs sont linéairement dépendants.

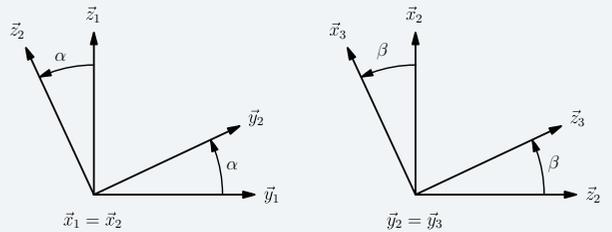
Cette dernière proposition est équivalente à dire que les trois vecteurs sont coplanaires.

## 2.10

$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = \sin \alpha$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 = -\sin \beta$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{x}_4 = 1$
$\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = \cos \alpha$	$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = \sin \alpha$	$\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_4 = 0$
$\vec{x}_4 \cdot \vec{y}_1 = \cos \beta \sin \alpha$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_4 = \cos \beta \cos \gamma$	$\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_4 = \cos \beta \sin \gamma$
$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_2 = \cos \alpha \vec{x}_1$	$\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_2 = -\vec{x}_3$	$\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_4 = -\cos \gamma \vec{z}_3$
$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 = \vec{y}_2$	$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_3 = \cos \beta \vec{y}_2$	$\vec{y}_4 \wedge \vec{y}_3 = -\sin \gamma \vec{z}_3$

## 2.11

1. Les figures de changement de base se tracent avec le vecteur commun sortant de la page et pour des angles petits et positifs.

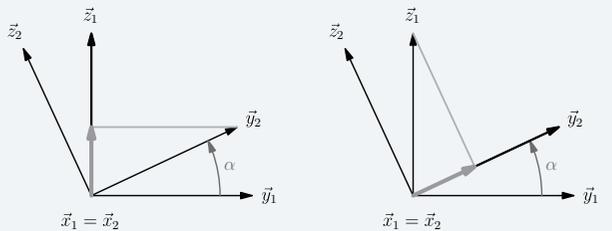


2. On détaille ci-dessous les principaux raisonnements concernant les différents calculs demandés.

• Calcul de  $\vec{y}_2 \cdot \vec{z}_1$  :

Le produit scalaire fait intervenir des vecteurs colinéaires, et on rappelle l'utilisation des figures de calcul :

- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
- on projette orthogonalement  $\vec{y}_2$  sur  $\vec{z}_1$ , ou  $\vec{z}_1$  sur  $\vec{y}_2$ , comme cela est dessiné ci-dessous ;



- la composante projetée, en bleu foncé, et le vecteur unitaire concerné, en noir renforcé, regardent dans la même direction : le résultat du produit scalaire est positif ;
- la composante projetée correspond au petit côté du triangle rectangle, donc au sinus de l'angle  $\alpha$  ;
- on trouve ainsi sans calcul particulier la valeur recherchée

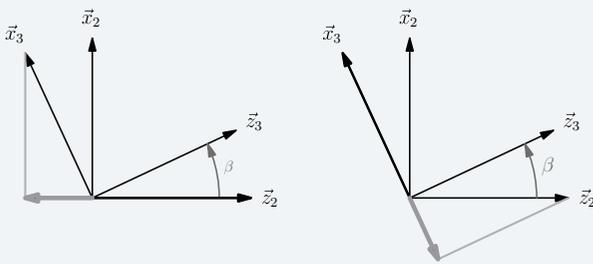
$$\vec{y}_2 \cdot \vec{z}_1 = + \sin \alpha$$

• Calcul de  $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1$  :

- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
- les deux vecteurs sont orthogonaux ;
- on trouve ainsi sans considération supplémentaire la valeur recherchée

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$$

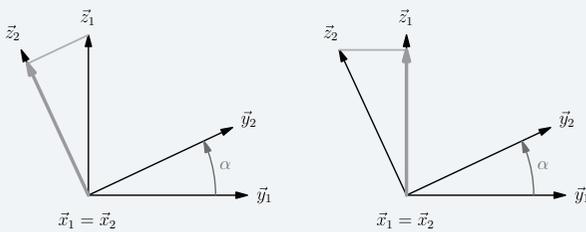
• Calcul de  $\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2$  :



- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la deuxième figure ;
- on projette mentalement  $\vec{x}_3$  sur  $\vec{z}_2$ , ou  $\vec{z}_2$  sur  $\vec{x}_3$  ;
- la composante projetée et le vecteur unitaire concerné se tournent le dos, le résultat du produit scalaire est négatif ;
- la composante projetée correspond au petit côté du triangle rectangle, donc au sinus de l'angle  $\beta$  ;
- on écrit ainsi la valeur recherchée

$$\vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 = -\sin \beta$$

- Calcul de  $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2$  :
  - les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
  - on projette mentalement  $\vec{z}_1$  sur  $\vec{z}_2$ , ou  $\vec{z}_2$  sur  $\vec{z}_1$  ;



- la composante projetée et le vecteur unitaire concerné regardent dans la même direction, le résultat du produit scalaire est positif ;
- la composante projetée correspond au grand côté du triangle rectangle, donc au cosinus de l'angle  $\alpha$  ;
- on propose alors comme résultat

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = \cos \alpha$$

- Calcul de  $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3$  :
  - les deux vecteurs concernés n'apparaissent pas sur une même figure ;
  - la deuxième figure permet de rappeler l'égalité  $\vec{y}_3 = \vec{y}_2$  ;
  - le produit scalaire  $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2$  se détermine à partir de la première figure

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3 = \cos \alpha$$

- Calcul de  $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1$  :
  - les deux vecteurs concernés n'apparaissent pas sur une même figure ;
  - la deuxième figure permet de proposer

$$\vec{z}_3 = \cos \beta \vec{z}_2 + \sin \beta \vec{x}_2$$

les deux produits scalaires  $\vec{z}_2 \cdot \vec{y}_1$  et  $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1$  se déterminent alors à partir de la première figure et on obtient

$$\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 = -\sin \alpha \cos \beta$$

– il est également possible d'exploiter la première figure pour dire

$$\vec{y}_1 = \cos \alpha \vec{y}_2 - \sin \alpha \vec{z}_2$$

les deux produits scalaires  $\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_2$  et  $\vec{z}_3 \cdot \vec{z}_2$  se déterminent dans ce cas à partir de la deuxième figure et on obtient également

$$\vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 = -\sin \alpha \cos \beta$$

### 3. On recommence avec les produits vectoriels.

- Calcul de  $\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1$  :

Le produit vectoriel fait intervenir des vecteurs orthogonaux, et on exploite alors les figures de calcul dans ce sens :

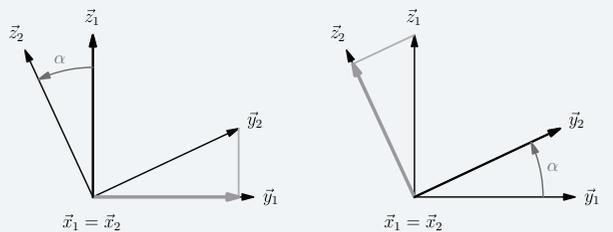
- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
- le vecteur  $\vec{x}_1$  est orthogonal à la feuille ;
- tourner de  $\vec{z}_2$  vers  $\vec{x}_1$  génère le vecteur  $+\vec{y}_2$ .

Constatant dès le départ l'égalité  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ , il est évidemment possible dans ce cas de dire directement

$$\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 = \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2 = \vec{y}_2$$

- Calcul de  $\vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1$  :

- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la première figure ;
- on passe au plus court du vecteur  $\vec{y}_2$  au vecteur  $\vec{z}_1$  en tournant dans le sens positif, le résultat est en conséquence dirigé par  $+\vec{x}_1$  ;
- on projette mentalement  $\vec{y}_2$  sur  $\vec{y}_1$ , ou  $\vec{z}_1$  sur  $\vec{z}_2$ , comme cela est dessiné ci-dessous ;

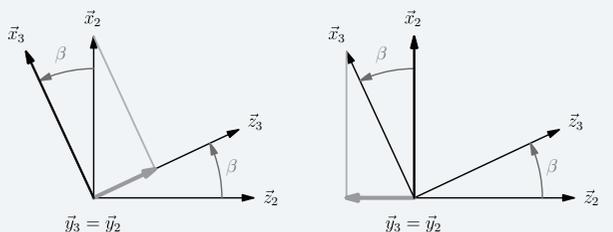


- peu importe le choix fait, intervient dans les deux cas le grand côté du triangle rectangle, donc le cosinus de l'angle  $\alpha$  ;
- la synthèse des deuxième et quatrième points permet de proposer le résultat

$$\vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1 = \cos \alpha \vec{x}_1$$

- Calcul de  $\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2$  :

- les deux vecteurs concernés apparaissent sur la deuxième figure ;
- on passe au plus court du vecteur  $\vec{x}_3$  au vecteur  $\vec{x}_2$  en tournant dans le sens négatif, le résultat est en conséquence dirigé par  $-\vec{y}_2$  ;
- on projette mentalement  $\vec{x}_2$  sur  $\vec{z}_3$ , ou  $\vec{x}_3$  sur  $\vec{z}_2$  ;



– peu importe le choix fait, intervient dans les deux cas le petit côté du triangle rectangle, donc le sinus de l'angle  $\beta$  ;

– la synthèse des deuxième et quatrième points permet de proposer le résultat

$$\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 = -\sin \beta \vec{y}_2$$

• Calcul de  $\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_3$  :

– les deux vecteurs concernés n'apparaissent pas sur une même figure ;

– la première figure permet de rappeler l'égalité  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  ;

– le produit vectoriel  $\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_3$  se détermine à partir de la deuxième figure

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_3 = -\cos \beta \vec{y}_2$$

• Calcul de  $\vec{y}_3 \wedge \vec{y}_2$  :

– les deux vecteurs sont colinéaires, le résultat est donc nul ;

$$\vec{y}_3 \wedge \vec{y}_2 = \vec{0}$$

• Calcul de  $\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3$  :

– les deux vecteurs concernés n'apparaissent pas sur une même figure ;

– la deuxième figure permet de proposer

$$\vec{x}_3 = \cos \beta \vec{x}_2 - \sin \beta \vec{z}_2$$

les deux produits vectoriels  $\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2$  et  $\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2$  se déterminent alors à partir de la première figure et on obtient

$$\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3 = \cos \beta \vec{y}_1 - \sin \beta \sin \alpha \vec{x}_1$$

– il est également possible d'exploiter la première figure pour dire

$$\vec{z}_1 = \cos \alpha \vec{z}_2 + \sin \alpha \vec{y}_2$$

les deux produits vectoriels  $\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_3$  et  $\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_3$  se déterminent dans ce cas à partir de la deuxième figure et on obtient une expression alternative du résultat

$$\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3 = \cos \beta \cos \alpha \vec{y}_3 - \sin \alpha \vec{z}_3$$

## 2.12

$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 = \sin \theta \vec{z}_1$	$\vec{z}_5 \cdot \vec{x}_3 = -\sin \varphi$
$\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3 = \cos \theta$	$\vec{w}_3 \wedge \vec{y}_3 = -\cos \varepsilon \vec{x}_3$
$(\vec{y}_1, \vec{w}_3, \vec{x}_1) = \cos \varepsilon$	$\vec{v}_3 \wedge \vec{x}_3 = -\vec{x}_3$
$\vec{x}_5 \wedge \vec{x}_3 = -\sin \varphi \vec{y}_5$	$(\vec{x}_5, \vec{y}_3, \vec{v}_3) = \sin \varepsilon \cos \varphi$
$\vec{z}_5 \cdot \vec{z}_1 = \cos \varphi \cos \varepsilon$	$\vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1 = (*)$

$\vec{z}_5 \cdot \vec{y}_3 = -\cos \varphi \sin \varepsilon$
$\vec{v}_3 \wedge \vec{x}_5 = -\vec{z}_5$
$(\vec{x}_5, \vec{w}_3, \vec{z}_5) = 0$
$(\vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_5) = \cos \theta \cos \varepsilon \cos \varphi$
$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_5 = (**)$

(\*) Concernant le produit vectoriel  $\vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1$ , les deux vecteurs n'apparaissent pas sur une même figure de définition d'angle, deux solutions sont dans ce cas possibles :

$$\begin{aligned} \text{soit } \vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1 &= \vec{z}_5 \wedge (\sin \varepsilon \vec{v}_3 + \cos \varepsilon \vec{w}_3) \\ &= -\sin \varepsilon \vec{x}_5 - \cos \varepsilon \sin \varphi \vec{y}_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \vec{z}_5 \wedge \vec{z}_1 &= (\cos \varphi \vec{w}_3 + \sin \varphi \vec{x}_3) \wedge \vec{z}_3 \\ &= -\cos \varphi \sin \varepsilon \vec{x}_3 - \sin \varphi \vec{y}_3 \end{aligned}$$

(\*\*) Quant au produit vectoriel  $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_5$ , encore plus de choix sont possibles. On ne donne ci-dessous qu'un seul exemple de calcul :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_5 &= (\cos \theta \vec{x}_3 - \sin \theta \vec{y}_3) \wedge \vec{x}_5 \\ &= \cos \theta \sin \varphi \vec{v}_3 + \sin \theta (\cos \varepsilon \vec{v}_3 - \sin \varepsilon \vec{w}_3) \wedge \vec{x}_5 \\ &= (\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \sin \varepsilon \cos \varphi) \vec{v}_3 - \sin \theta \cos \varepsilon \vec{z}_5 \end{aligned}$$

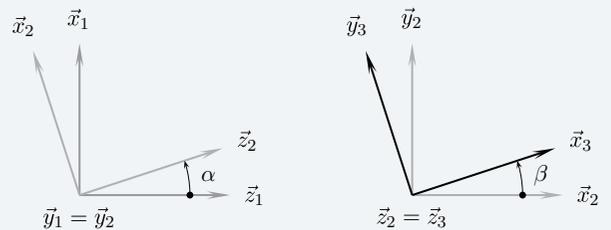
## 2.13

1. Les deux figures de changement de bases posent souci :

• pour l'angle  $\alpha$ , les deux vecteurs  $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$  « rentrent » dans la feuille et l'angle  $\alpha$  est dans ce cas négatif, ce qui induit des erreurs de signe dans les calculs ;

• l'angle  $\beta$  est représenté bien trop grand, ce qui favorise les confusions entre les sinus et les cosinus.

Il est nécessaire de les refaire pour ne pas faire d'erreur et ne pas perdre de temps lors des calculs à suivre



2. Les produits scalaires :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 &= \sin \alpha \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_1 &= -\sin \alpha \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 &= \cos \beta \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_3 &= -\sin \beta \cos \alpha \end{aligned}$$

Les produits vectoriels :

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 &= \cos \alpha \vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 &= \vec{z}_2 \\ \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_3 &= -\cos \beta \vec{z}_2 \\ \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_3 &= \cos \beta \vec{z}_1 - \sin \alpha \sin \beta \vec{y}_1 \\ &= -\sin \alpha \vec{x}_3 + \cos \alpha \cos \beta \vec{z}_3 \end{aligned}$$

## 2.14

On part de l'écriture du double produit vectoriel  $\vec{n} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{n})$  que l'on développe

$$\vec{n} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{n}) = (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{U} - (\vec{n} \cdot \vec{U}) \vec{n}$$

Le produit scalaire  $\vec{n} \cdot \vec{n}$  est égal à 1 et le produit scalaire  $\vec{U} \cdot \vec{n}$  s'interprète comme la projection orthogonale du vecteur  $\vec{U}$  sur la direction  $\vec{n}$ .

Si on soustrait au vecteur  $\vec{U}$  sa projection orthogonale sur une direction  $\vec{n}$ , le résultat est un vecteur orthogonal au vecteur  $\vec{n}$ .

## 2.15

1. Le résultat du produit vectoriel  $\vec{a} \wedge \vec{x}$  est orthogonal au vecteur  $\vec{a}$ . En effet,

$$(\vec{a} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{a} = (\vec{a}, \vec{x}, \vec{a}) = 0$$

En substituant le vecteur  $\vec{c}$  au produit vectoriel  $\vec{a} \wedge \vec{x}$ , cette égalité entraîne l'orthogonalité nécessaire des vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{c}$ .

$$(\vec{a} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

2. Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul. On en déduit que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{a} \wedge (\vec{x} + \lambda \vec{a}) = \vec{a} \wedge \vec{x}$$

On déduit de cette propriété qu'à partir du moment où on trouve un vecteur  $\vec{x}$  solution, alors il en existe une infinité, de la forme  $\vec{x} + \lambda \vec{a}$ .

3. On effectue le produit vectoriel à gauche des deux membres de l'équation par le vecteur  $\vec{a}$

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{c}$$

Le développement du double produit vectoriel permet d'écrire

$$(\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a} - \vec{a}^2 \vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{c}$$

Un rapide arrangement de cette équation permet d'écrire

$$\vec{x} = \frac{\vec{c} \wedge \vec{a}}{\vec{a}^2} + \underbrace{\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a}^2}}_{\lambda_p} \vec{a}$$

Apparaît ainsi la solution particulière  $\frac{\vec{c} \wedge \vec{a}}{\vec{a}^2}$  orthogonal au vecteur  $\vec{a}$ , et un coefficient particulier  $\lambda_p$  qui peut être remplacé par un réel quelconque, comme on l'a vu précédemment. On en déduit l'expression finale de la solution

$$\vec{x} = \frac{\vec{c} \wedge \vec{a}}{\vec{a}^2} + \lambda \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

## 2.16

Soit un champ de vecteurs  $\vec{u}(P)$  vérifiant la relation suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad \vec{u}(B) = \vec{u}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On effectue le produit scalaire des deux membres de l'équation avec  $\overrightarrow{AB}$  et on obtient

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad \vec{u}(B) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u}(A) \cdot \overrightarrow{AB} + (\vec{r} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le produit mixte  $(\vec{r}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})$  comporte deux vecteurs identiques et est donc nul. Le champ de vecteurs  $\vec{u}(P)$  est un champ de vecteurs équiprojectif.

## 2.17

L'automoment d'un torseur est le produit scalaire du vecteur résultante et d'un des vecteurs moment.

Soit un torseur  $\mathcal{T}$  déterminé par ses éléments de réduction  $\vec{r}$  et  $\vec{u}(A)$ . Déterminons l'automoment pour un point  $Q$  quelconque

$$\vec{r} \cdot \vec{u}(Q) = \vec{r} \cdot (\vec{u}(A) + \vec{r} \wedge \overrightarrow{QA})$$

Le produit mixte  $(\vec{r}, \vec{r}, \overrightarrow{QA})$  qui apparaît alors comporte deux vecteurs identiques et est donc nul.

L'automoment d'un torseur ne dépend pas du point de calcul.

## 2.18

Supposons deux torseurs  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  connus par leurs éléments de réduction au même point A. Le comoment s'exprime par

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{r}_1 \cdot \vec{u}_2(A) + \vec{u}_1(A) \cdot \vec{r}_2$$

Appliquons la formule de changement de points sur chacun de ces champs de vecteurs équiprojectif pour exprimer le comoment à partir du moment en un point  $Q$  quelconque.

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{r}_1 \cdot (\vec{u}_2(Q) + \vec{r}_2 \wedge \overrightarrow{QA}) + (\vec{u}_1(Q) + \vec{r}_1 \wedge \overrightarrow{QA}) \cdot \vec{r}_2$$

Les deux produits mixtes  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \overrightarrow{QA})$  et  $(\vec{r}_1, \overrightarrow{QA}, \vec{r}_2)$  sont opposés et leur somme s'annule. On en déduit bien

$$\forall Q \in \mathcal{E} \quad \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \vec{r}_1 \cdot \vec{u}_2(Q) + \vec{u}_1(Q) \cdot \vec{r}_2 = cste$$

Le comoment de deux torseurs ne dépend pas du point de réduction.

## 2.19

La démonstration est immédiate à partir du calcul de la dérivée du carré scalaire du vecteur  $\vec{u}$

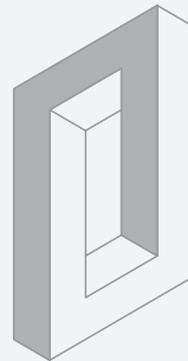
$$\forall t, \vec{u}^2 = 1 \Rightarrow \forall t, \vec{u} \cdot \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_b = 0$$

Les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_b$  sont à chaque instant orthogonaux.

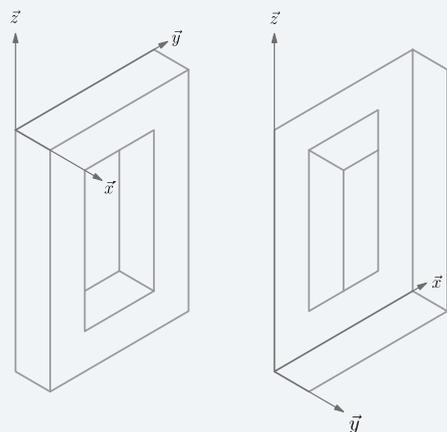
# Exercices d'approfondissement

## 2.21

1. Teinter une des faces supposées être plane pose le problème. En partant du haut de la pièce, on se retrouve sur deux plans parallèles distants de plusieurs fois l'épaisseur de ce qui semble être un anneau...

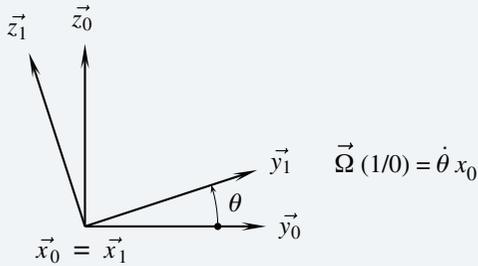


2. S'appuyer sur les projections d'un repère orthonormé permet de positionner les points les uns à partir des autres en suivant successivement une des directions principales.



## 2.21

Bien que ce ne soit pas demandé, il est utile de faire la figure de définition de l'angle  $\theta$



1. On commence maintenant le calcul en appliquant la formule de dérivation d'un produit pour trouver

$$\left[ \frac{d\vec{KE}}{dt} \right]_0 = \dot{\rho} \vec{y}_1 + \rho \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0$$

La formule de changement de base permet de calculer  $\left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0$

$$\left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0 = \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_1 + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta} \vec{x}_0 \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_1$$

Après substitution, on obtient la première expression recherchée

$$\left[ \frac{d\vec{KE}}{dt} \right]_0 = \dot{\rho} \vec{y}_1 + \rho \dot{\theta} \vec{z}_1$$

2. On peut anticiper le calcul de la deuxième expression en commençant par

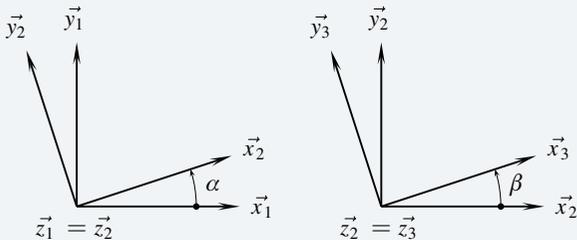
$$\left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_0 = \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_1 + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{z}_1 = \dot{\theta} \vec{x}_0 \wedge \vec{z}_1 = -\dot{\theta} \vec{y}_1$$

On arrive ainsi rapidement au résultat

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2 \vec{KE}}{dt^2} \right]_0 &= \ddot{\rho} \vec{y}_1 + \dot{\rho} \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0 + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{z}_1 + \rho \ddot{\theta} \vec{z}_1 + \rho \dot{\theta} \left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_0 \\ &= \ddot{\rho} \vec{y}_1 + 2\dot{\rho} \dot{\theta} \vec{z}_1 + \rho \ddot{\theta} \vec{z}_1 - \rho \dot{\theta}^2 \vec{y}_1 \end{aligned}$$

## 2.22

1. Les figures de définition des angles sont à faire avec des angles petits et positifs pour éviter les problèmes ultérieurs de signes



2. On déduit des deux figures précédentes les expressions des vecteurs rotations

$$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \quad \vec{\Omega}(3/2) = \dot{\beta} \vec{z}_2$$

3. Par substitution, le calcul à effectuer devient

$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d a \vec{x}_2}{dt} \right]_1 = a \left[ \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_1$$

La formule de changement de base permet de dire

$$\left[ \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d \vec{x}_2}{dt} \right]_2 + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{x}_2$$

En remplaçant  $\vec{\Omega}(2/1)$  par sa valeur  $\dot{\alpha} \vec{z}_1$  et en effectuant le produit vectoriel  $\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2$  directement à partir de la figure de définition de l'angle  $\alpha$ , on obtient tout calcul fait

$$\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_1 = a \dot{\alpha} \vec{y}_2$$

4. Les étapes précédentes sont à suivre de la même manière pour obtenir tout d'abord

$$\left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_2 = b \dot{\beta} \vec{y}_3$$

La formule de changement de base permet ensuite d'écrire

$$\left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_2 + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{BC}$$

Le produit vectoriel, après substitution, devient  $\dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge b \vec{x}_3$  et son résultat se lit sur la figure de définition de l'angle  $\beta$ . On en déduit

$$\left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_1 = b(\dot{\beta} + \dot{\alpha}) \vec{y}_3$$

5. En décomposant  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$  et en utilisant les résultats précédents, on trouve finalement

$$\left[ \frac{d\vec{AC}}{dt} \right]_1 = \dot{\alpha}(a \vec{y}_2 + b \vec{y}_3) + \dot{\beta} b \vec{y}_3$$

L'intérêt de mettre les paramètres cinématiques  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\beta}$  en facteur est vu au chapitre 3.

### Plan

3.1	Les mouvements	46
3.2	Trajectoires et lois horaires	48
3.3	Vecteurs position, vitesse et accélération	50
3.4	Le solide indéformable	53
3.5	Le champ des vecteurs vitesse	54
3.6	Composition des mouvements	57
3.7	Le champ des vecteurs accélération	60
3.8	Mouvements particuliers	62
	Exercices d'application	65
	Exercices d'approfondissement	66
	Solutions des exercices	69

### Introduction

Lorsque l'on s'intéresse au mouvement d'un seul point par rapport à un repère, son vecteur vitesse noté simplement  $\vec{V}$  convient. À partir du moment où l'on se penche sur le cas des objets appelés **solides**, on constate d'une part que le nombre de points devient infini, d'autre part que l'on a rapidement trois, quatre, cinq solides et plus en mouvement relatif au sein d'un mécanisme. Ce chapitre s'appuie sur les outils vectoriels développés au chapitre précédent afin de :

- proposer des notations robustes pour savoir de quoi on parle ;
- mettre en évidence les propriétés cinématiques remarquables induites par les solides dits indéformables ;
- poser les lois de composition des mouvements.

### Prérequis

Ce chapitre nécessite les bases présentées au chapitre 2, à savoir :

- les outils de description, *vecteurs* et *torseurs* ;
- les outils de calcul, *calcul vectoriel*, *calcul torsoriel* et *dérivation vectorielle* ;
- l'orientation de l'espace.

### Objectifs

- Raisonner dans un espace à six degrés de liberté, parfois restreint à trois degrés de liberté ;
- Imaginer des mouvements ;
- Composer des mouvements ;
- Identifier un mouvement par une étude cinématique.

## 3.1 Les mouvements



La définition du mot *cinématique*, comme beaucoup de définitions, introduit un nouveau terme qu'il est fondamental d'expliciter.

### 3.1.1

#### Définition

La **cinématique** est l'étude des mouvements indépendamment de leurs causes.

La cinématique définit les outils et les méthodes pour décrire et étudier des déplacements relatifs sans se préoccuper de leur origine.

### Mouvement

Un **mouvement** est un phénomène observable dans l'espace physique. Il met en jeu trois entités indissociables :

- l'objet observé ;
- un objet de référence ;
- le temps.

#### Définition

On appelle **mouvement** le déplacement relatif de deux objets au cours du temps.

#### a) Le temps

Le temps est approché de manière intuitive par un nombre, et en mécanique classique, on admet que le temps s'écoule inexorablement et en chaque point de l'espace de la même manière. Sont associés au temps les deux mots-clés date et durée :

- une **date** caractérise un instant particulier ;
- une **durée** la différence entre les dates de deux instants successifs.

#### b) L'objet de référence

À l'objet de référence est associée la notion d'espace. C'est un espace d'observation supposé être un **espace euclidien**. On dit bien un espace car ils sont multiples. Celui qui roule sur une bicyclette n'a pas le même espace d'observation que celui qui reste sur le trottoir...

À cet objet de référence est également associé la notion de repère d'espace, qu'il n'est pas besoin de préciser plus que cela pour le moment.

L'étude des mouvements fait donc référence à un repère d'espace et à une échelle de temps, que l'on nomme ensemble référentiel.

#### Définition

On appelle **référentiel** l'association d'un repère d'espace et d'une échelle de temps.

#### c) L'objet observé

Alors que la référence est un espace *solide*, l'objet observé peut être de diverses natures. Pour les dénombrer simplement, on prend le point comme objet élémentaire et il n'y a alors plus que deux catégories d'objets à considérer :

- un ensemble *solide* de points ;



« Relatif » veut dire « l'un par rapport à l'autre ».



La mécanique classique, ou mécanique newtonienne, précède la mécanique relativiste, pour laquelle les concepts de masse et de temps sont beaucoup plus complexes.



On admet l'emploi du seul mot **repère** pour la notion de **repère d'espace**.

Solide, donc rigide, indéformable. Une définition propre à la mécanique est proposée page 53, à la section 3.4.1.

- un ensemble de points quelconques. Cela peut être un point tout seul, un volume de gaz ou de liquide, un ensemble de solides, ou un mélange de divers éléments précités...

Avec ce classement, on se rend déjà compte que si parler du mouvement d'un vélo par rapport à la route a du sens, parler du mouvement du cycliste par rapport à son vélo n'en a pas, car le vélo n'est pas un espace *solide*.

#### Notation

Le mouvement d'un objet 2 par rapport à un objet 1 est noté  $2/1$ .

## 3.1.2 Mouvement réciproque

Le mouvement réciproque d'un mouvement  $i/k$  est naturellement le mouvement  $k/i$ . Mais il faut faire attention : ce mouvement réciproque n'a de sens que si l'objet  $i$  est un objet *solide*.

C'est pourquoi il est indispensable, en mécanique du solide indéformable, de prendre l'habitude de noter systématiquement un mouvement  $i/k$ . Ainsi, on peut prendre le temps de définir l'objet observé  $i$  et d'identifier l'objet de référence  $k$ , voire de réaliser que le mouvement concerné est difficile à appréhender, comme dans le cas par exemple du roulement sans glissement.



Un exemple concret de roulement sans glissement concerne le contact entre une roue de bicyclette et le sol.

## 3.1.3 Rotation – Translation

On ne peut terminer la définition d'un mouvement sans s'intéresser aux deux mouvements élémentaires fondamentaux que sont les mouvements de rotation et de translation.

Les outils vectoriels de description ne sont pas encore en place. Cela n'empêche pas une première définition géométrique de ces mouvements.

#### Définition

Un objet 2 est en **rotation** par rapport à un objet 1 si et seulement si il existe à chaque instant une droite de l'objet 2 immobile par rapport à l'objet 1.

Associée à la notion de rotation apparaît la notion d'axe de rotation, cette droite autour de laquelle un objet tourne par rapport à l'autre. Cet axe de rotation est souvent bien identifié, parfois difficile à localiser, car à chaque instant ne veut pas dire tout le temps.

#### Définition

Un objet 2 est en **translation** par rapport à un objet 1 si et seulement si toute droite de l'objet 2 conserve par rapport à l'objet 1 une direction constante au cours du temps.

Ces deux notions seront reprises d'un point de vue cinématique à la section 3.8 consacrée aux mouvements particuliers, page 62.

#### Exemple

Imaginons un cycliste en train de pédaler en ligne droite sur une route lisse. L'inventaire des pièces considérées de la bicyclette est fait sur la figure 3.1. La plupart des pièces sont *solides*, mais la chaîne ou les câbles de frein, par exemple, méritent une attention particulière. De plus, on considère que les pédales restent parallèles au sol.

Il est indispensable de ne pas limiter la notion de rotation à la notion de rotation autour d'un axe fixe par rapport à l'observateur.

Il est indispensable de ne pas limiter la notion de translation à la notion de translation rectiligne.

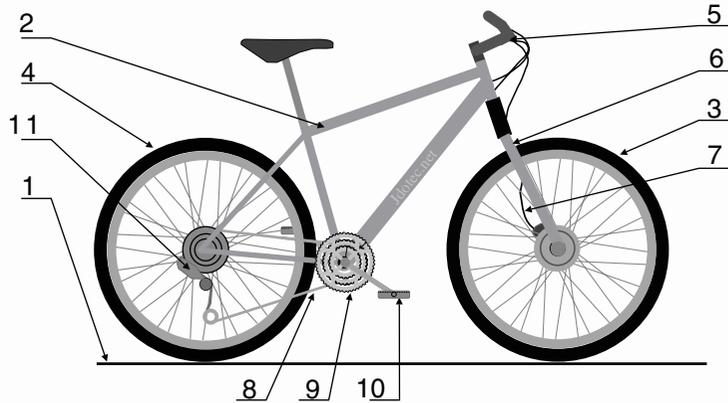


Figure 3.1 Une bicyclette en ligne droite... sans son pilote.

- |   |              |   |                      |    |            |
|---|--------------|---|----------------------|----|------------|
| 4 | Roue arrière | 8 | Chaîne               | 11 | Dérailleur |
| 3 | Roue avant   | 7 | Gaine de frein avant | 10 | Pédale     |
| 2 | Cadre        | 6 | Fourche              | 9  | Plateau    |
| 1 | Sol          | 5 | Guidon               |    |            |

Le tableau ci-dessous considère un certain nombre de mouvements constatés. La case *Nature* est remplie avec une des trois lettres *T* pour « translation », *R* pour « rotation », *I* pour « immobile » et laissée vide quand le mouvement est quelconque. La case *Validité* contient *V* pour « toujours vraie » et reste vide lorsque le mouvement cité n'est valable que dans le cas considéré.

Mouvement	Nature	Validité	Mouvement	Nature	Validité
2/1	T		3/6	R	V
3/1	R		6/5	I	
10/9	R	V	9/2	R	V
10/2	T		10/1	T	
5/2	I		3/4		
8/2			4/2	R	V

La connaissance de la bicyclette permet par ailleurs de citer un certain nombre de mouvements possibles, telle la translation de la fourche avant par rapport au guidon ou la rotation du guidon par rapport au cadre.



Un mouvement possible n'est pas forcément un mouvement constaté !

## 3.2 Trajectoires et lois horaires

### 3.2.1 Point coïncidant



La compréhension des points coïncidants est une des notions difficiles à appréhender en mécanique. La composition des mouvements est un des chapitres fondamentaux pour avancer.

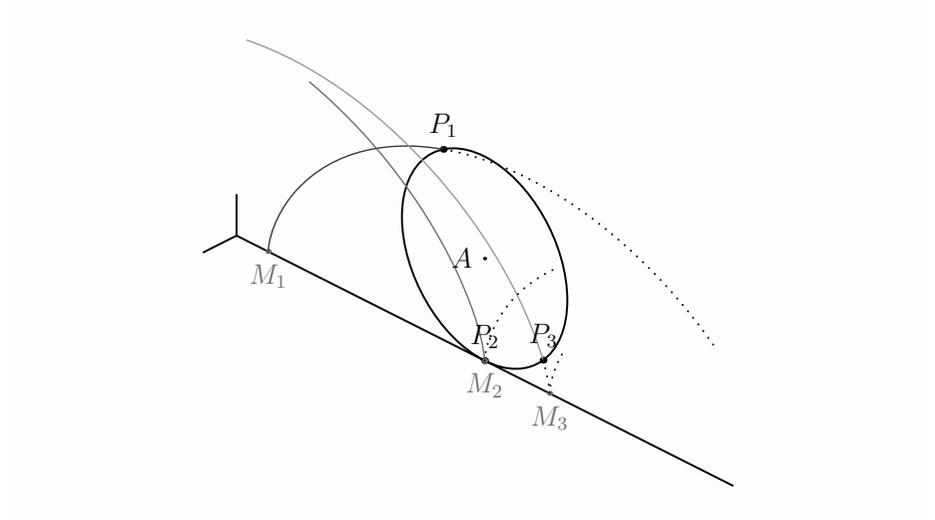
Considérons un point  $P$  en mouvement dans un espace  $\mathcal{E}$ . À chaque instant  $t$ , il existe un point  $M_t$  immobile dans cet espace confondu avec le point  $P$ . Le point  $P$  se déplace au cours du temps dans cet espace et c'est un nouveau point  $M_{t+dt}$  qui est confondu avec le point  $P$  à la date  $t + dt$ .

**Définition**

On dit que deux points sont **coïncidents** à un instant  $t$  s'ils occupent la même position à la date considérée.

**Exemple**

En reprenant l'exemple de la figure 3.1, on ne s'intéresse ici qu'au seul mouvement de la roue avant par rapport au sol. À chaque instant, un des points de la roue est en contact avec un des points du sol. La figure est dessinée à une date  $t_2$ . Il existe une date  $t_1$  à laquelle les deux points  $P_1$  et  $M_1$  ont été coïncidents. Il existe également une date  $t_3$  à laquelle les deux points  $P_3$  et  $M_3$  seront coïncidents. Ce qui est compréhensible pour les points de contact est généralisable à tous les points. Par exemple, à la date  $t_2$  de la figure, il existe un point de l'espace attaché au sol qui est coïncident avec le point  $P_1$ .

**Figure 3.2** Points coïncidents

À l'instant  $t_2$  considéré, les points  $P_2$  et  $M_2$  sont coïncidents, les points  $P_1$  et  $M_1$ , les points  $P_3$  et  $M_3$  ne le sont pas.

## 3.2.2 Trajectoire

En mécanique, une trajectoire concerne un point, et seulement un point. Soit donc un point  $P$  tout seul en mouvement par rapport à un repère  $R$

**Définition**

On appelle **trajectoire** du point  $P$  dans son mouvement par rapport à  $R$  l'ensemble des points coïncidents de l'espace d'observation.

**Remarque**

Une trajectoire dépend du repère d'observation, et pour un point  $P$  donné, les trajectoires sont multiples, car elles dépendent du mouvement considéré.



Identifier et nommer les mouvements sont les clés de la compréhension !

### 3.2.3

#### Exemple

En continuant l'exemple de la figure précédente 3.2 et en considérant également la fourche sur laquelle est montée la roue, toutes les propositions suivantes sont correctes :

- la trajectoire du point  $P_1$  dans le mouvement de la roue par rapport à la fourche est un cercle de centre  $A$  et de rayon  $AP_1$  ;
- la trajectoire du point  $A$  dans ce même mouvement se réduit à un point ;
- la trajectoire du point  $A$  dans le mouvement de la roue par rapport au sol est une droite parallèle à  $(M_1M_3)$  passant par  $A$  ;
- la trajectoire du point  $P_1$  dans ce même mouvement est une cycloïde.

#### Lois horaires

Soit un point  $P$  et un mouvement 2/1. Comme son nom l'indique, une loi horaire est une loi qui dépend du temps.

##### Définition

On appelle **loi horaire** toute fonction scalaire dépendant du temps explicitant le déplacement du point  $P$  dans le mouvement considéré.

Sont par exemple des lois horaires toute coordonnée d'un vecteur position exprimée en fonction du temps, ainsi que toute fonction scalaire du temps précisant une position sur une trajectoire.

## 3.3 Vecteurs position, vitesse et accélération

### 3.3.1

L'étude d'un mouvement consiste entre autre à suivre des points particuliers au cours du temps. La mécanique du point met en place les trois vecteurs utilisés.

#### Vecteur position

Soit un point  $P$  en mouvement dans un espace  $\mathcal{E}$  auquel est attaché un repère  $R$ .

##### Définition

On appelle **vecteur position** du point  $P$  dans  $R$  tout vecteur  $\vec{IP}$  construit à partir d'un point  $I$  fixe dans le repère d'étude  $R$ .

##### Remarques

Il y a autant de vecteurs position pour un point  $P$  que de points fixes possibles dans  $R$ . Il y en a donc une infinité.

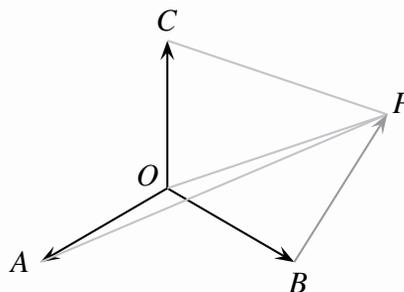


Figure 3.3 Exemple de quatre vecteurs position possibles pour un point  $P$ .

### 3.3.2 Vecteur vitesse

La différence de deux vecteurs position d'un point  $P$  donne un vecteur immobile dans le référentiel  $R$ , indépendant du point  $P$  suivi.

Le vecteur position a comme qualité de correspondre à ce qu'un observateur voit. Sa principale limite est qu'il dépend de l'observateur, donc du choix du point de départ.

En mécanique du point, on considère un point  $P$  tout seul en mouvement par rapport à un repère  $R$ , et le mouvement est rarement noté. Quand il l'est, il est usuel de le rencontrer sous la forme  $P/R$ .

En mécanique du solide indéformable, il est indispensable d'avoir une notation qui soit sans ambiguïté. Le vecteur vitesse dépend de trois variables : le temps, le point considéré et le mouvement étudié. Une notation  $\vec{V}(t, P, 2/1)$  semble alors pertinente, mais comme le temps est le même pour tous les observateurs, la variable  $t$  n'est habituellement pas explicitée.

#### Notation

En mécanique du solide indéformable, le vecteur vitesse est noté  $\vec{V}(P, 2/1)$  et se lit « vecteur vitesse du point  $P$  dans le mouvement de 2 par rapport à 1 ».

#### Définition

On appelle **vecteur vitesse** du point  $P$  dans le mouvement 2/1 le vecteur dérivé par rapport au temps d'un vecteur position de ce point  $P$  dans la base d'observation.

$$\vec{V}(P, 2/1) = \left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1 \quad (1)$$

Il est à noter que la base de dérivation est obligatoirement liée à l'objet de référence. Réciproquement, une expression du style  $\left[ \frac{d\vec{KP}}{dt} \right]_3$  peut être interprétée comme un vecteur vitesse si le point  $K$  est un point immobile dans l'espace 3.

#### Exemple

Soit un point  $P$  tournant autour d'un axe  $\Delta$ . L'angle  $\theta$  est défini par la rotation d'une base 2 par rapport à une base 1. Ces deux bases ont comme vecteur commun  $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ . Soit  $I$  un point fixe dans 1 de telle sorte que l'on puisse poser comme vecteur position  $\vec{IP} = \rho \vec{x}_2$ . Le rayon  $\rho$  est supposé constant au cours du temps.

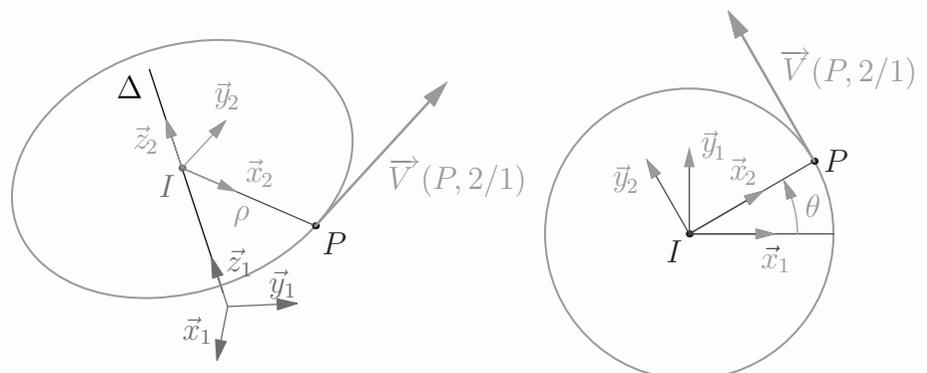


Figure 3.4 Le vecteur vitesse pour un point  $P$  en rotation autour d'un axe  $\Delta$ .



Le vecteur vitesse est à considérer comme une fonction de deux variables, et comme pour toute fonction de deux variables, on sait en fixer une pour faire évoluer la deuxième.

Bien repérer le point  $P$ , le point  $I$ , le mouvement 2/1, la base de dérivation...



Le produit vectoriel se calcule directement à partir de la figure de définition de l'angle.

Bien repérer le point  $P$ , le point  $I$ , le mouvement 2/1, la base de dérivation...

### 3.3.3 Vecteur accélération

Par définition du vecteur vitesse, on pose

$$\vec{V}(P, 2/1) = \left[ \frac{d\rho \vec{x}_2}{dt} \right]_1$$

En utilisant la formule de changement de base pour la dérivation vectorielle vue au chapitre précédent, on calcule

$$\begin{aligned} \vec{V}(P, 2/1) &= \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \rho \vec{x}_2 \\ &= \rho \dot{\theta} \vec{y}_2 \end{aligned}$$

Le vecteur vitesse a par rapport au vecteur position l'immense avantage d'être indépendant de tout observateur. Il a comme limite de ne pas suffire pour une étude dynamique. Il est nécessaire de définir le vecteur dérivé du vecteur vitesse.

#### Définition

On appelle **vecteur accélération** du point  $P$  dans le mouvement 2/1 le vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur vitesse de ce point  $P$  dans le même mouvement.

$$\vec{A}(P, 2/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(P, 2/1)}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d^2 I \vec{P}}{dt^2} \right]_1 \quad (2)$$

#### Remarque

Le vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement 2/1 est donc également la dérivée seconde par rapport au temps d'un des vecteurs position du point  $P$ .

#### Exemple

En reprenant l'exemple précédent, et par définition du vecteur accélération, on obtient

$$\vec{A}(P, 2/1) = \left[ \frac{d\rho \dot{\theta} \vec{y}_2}{dt} \right]_1 = \rho \ddot{\theta} \vec{y}_2 - \rho \dot{\theta}^2 \vec{x}_2$$

Le terme  $\rho \ddot{\theta} \vec{y}_2$  correspond à l'accélération tangentielle, donc au taux de variation du module de la vitesse, à direction constante.

Le terme  $-\rho \dot{\theta}^2 \vec{x}_2$  correspond à l'accélération centripète, donc à la variation de direction du vecteur vitesse, à module constant.

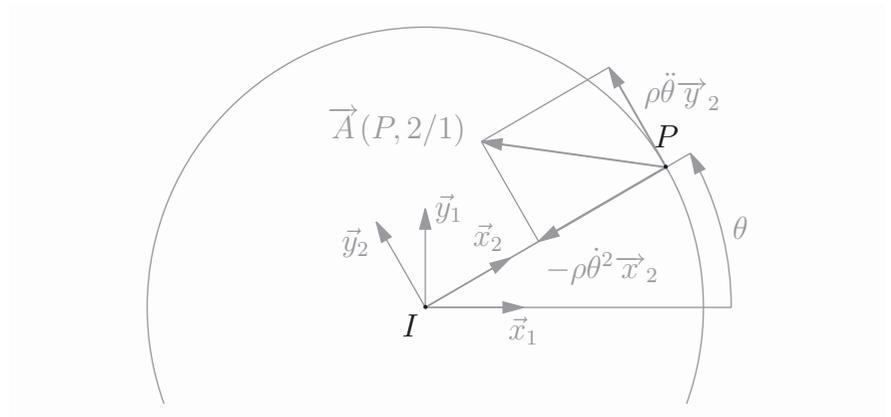


Figure 3.5 Les vecteurs accélérations pour un point  $P$  en rotation autour d'un axe  $\Delta$ .

## 3.4 Le solide indéformable

### 3.4.1 Notion de solide indéformable

Un mouvement est défini comme le déplacement relatif de deux objets. Il est nécessaire de s'intéresser aux objets remarquables que sont les solides indéformables.

#### Définition

Un **solide indéformable** est un ensemble de points deux à deux équidistants au cours du temps.

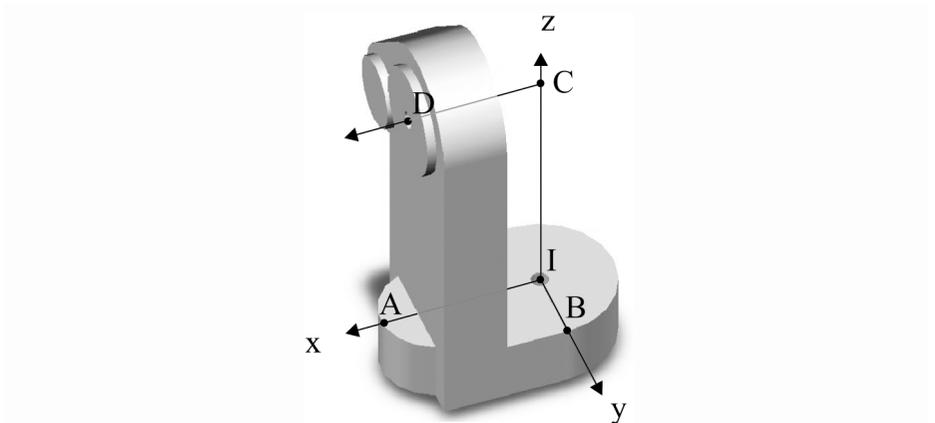
Soient  $S$  un solide indéformable,  $A$  et  $B$  deux points quelconques de ce solide. La définition précédente se traduit par la proposition vectorielle

$$\forall A \in S, \forall B \in S, \overrightarrow{AB}^2 = cste/t \quad (3)$$

### 3.4.2 Équivalence solide – repère – espace

Définir un repère  $R$  attaché à un solide revient à définir un point particulier  $I$  sur ce solide et une base vectorielle  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , soit encore quatre points  $I, A, B$  et  $C$  tels que

$$R = (I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (I, \vec{IA}, \vec{IB}, \vec{IC}) \quad (4)$$



**Figure 3.6** Équivalence solide – repère – espace  
La base vectorielle  $(\vec{IA}, \vec{IB}, \vec{IC})$  est sur cet exemple orthogonale et non normée...

Les quatre points ainsi considérés sont deux à deux équidistants : l'ensemble de ces quatre points forme donc un solide indéformable. De plus, il n'est pas difficile de construire l'ensemble des points fixes par rapport à un repère donné et de constater que l'on arrive à un espace affine.

#### Définition

On parle indifféremment d'un **solide**, d'un **repère** qui lui est attaché ou de tout l'**espace** des points fixes dans ce repère.

Cette équivalence a deux conséquences :

- Lorsque l'on a deux solides en mouvement relatif, les formes des solides n'ont aucune importance, car cela revient à considérer le mouvement relatif de deux espaces affines



On admet l'utilisation du seul mot *solide* pour l'expression *solide indéformable*.

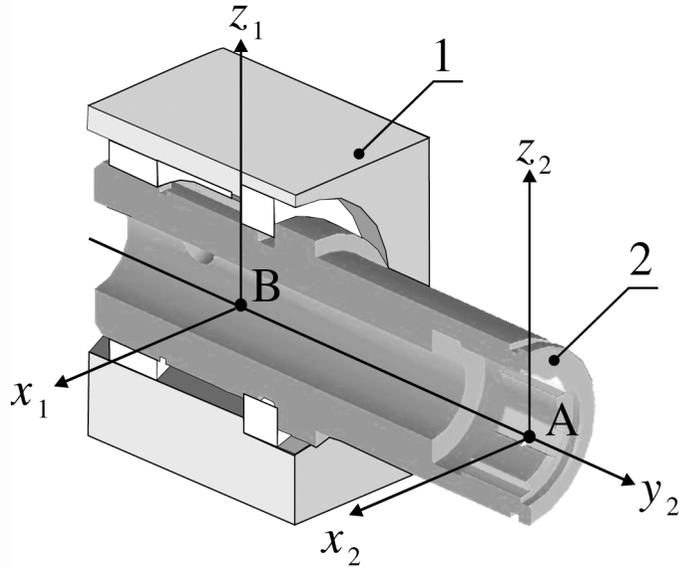
Qu'il y ait de la matière ou non au niveau d'un point considéré n'a de fait aucune importance.

Ce n'est hélas pas suffisant pour que la notion devienne facilement compréhensible.

- Considérer le mouvement relatif de deux espaces affines rend triviale la notion de points coïncidents. N'importe quel point peut être attaché à l'un ou à l'autre de ces deux espaces. Autrement dit, derrière chaque point se cache au moins un point coïncident.

**Exemple**

Considérons un arbre de machine creux noté 2 guidé en rotation autour de son axe par rapport à un bâti 1.



**Figure 3.7** Exemple d'un arbre creux

Utiliser un point de l'axe alors qu'il n'y a pas de matière à cet endroit ne pose aucun souci. Bien au contraire, il est toujours utilisé le fait que les vecteurs vitesse  $\vec{V}(A, 2/1)$  et  $\vec{V}(B, 2/1)$  soient des vecteurs nuls.

## 3.5 Le champ des vecteurs vitesse

### 3.5.1 Champ des vecteurs vitesse

Soient deux objets, ou deux solides, ou deux repères, ou deux espaces affines en mouvement relatif.

**Définition**

On appelle **champ des vecteurs vitesse** l'application qui à chaque point de l'espace associe le vecteur vitesse correspondant au mouvement considéré.

$$\mathcal{E} \longrightarrow E$$

$$P \longmapsto \vec{V}(P, 2/1)$$

### 3.5.2 Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse

Comme un solide indéformable est un ensemble de points deux à deux équidistants au cours du temps, la distance entre deux points quelconques de ce solide ne varie pas au cours du temps, donc la dérivée temporelle de cette distance est nulle.

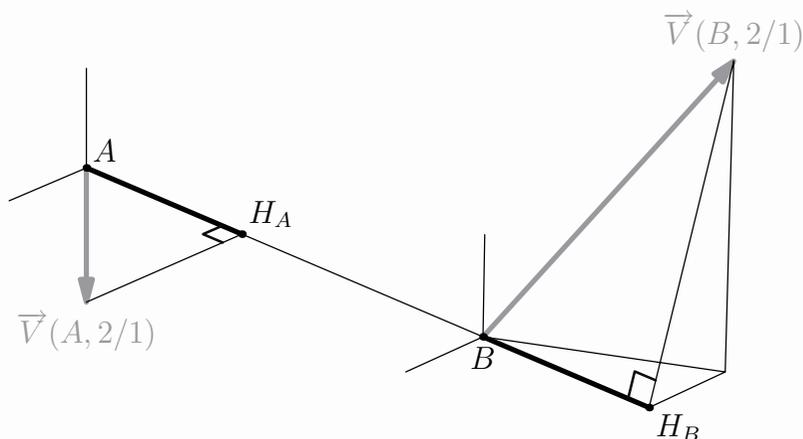
Soit un solide 2 en mouvement par rapport à un solide 1. Soient deux points  $A$  et  $B$  du solide 2. Vue depuis le solide 1, la distance au carré  $\overrightarrow{AB}^2$  est constante au cours du temps, ce qui se traduit par l'implication

$$\forall t, \overrightarrow{AB}^2 = cste \implies \overrightarrow{AB} \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_1 = 0 \quad (5)$$

Pour pouvoir interpréter cette dernière équation, il suffit de considérer un point  $I$  fixe dans 1 et de poser  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}$  pour retrouver la définition d'un vecteur vitesse. On obtient ainsi

$$\overrightarrow{V}(B, 2/1) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A, 2/1) \cdot \overrightarrow{AB} \quad (6)$$

Cette équation a une interprétation graphique remarquable : les projections orthogonales des vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}(A, 2/1)$  et  $\overrightarrow{V}(B, 2/1)$  sur la direction  $\overrightarrow{AB}$  sont égales. En s'appuyant sur l'exemple donné figure (3.8), l'égalité des projections orthogonales se traduit par l'égalité des valeurs algébriques  $\overline{AH_A} = \overline{BH_B}$ .



**Figure 3.8** Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse lors du mouvement d'un solide indéformable.

#### Propriété fondamentale

Le champ des vecteurs vitesse du mouvement d'un solide indéformable par rapport à un repère est un champ de vecteurs équiprojectif.

Cette propriété se traduit par la proposition vectorielle

$$\forall i/k, \forall A \text{ et } \forall B, \overrightarrow{V}(B, i/k) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(A, i/k) \cdot \overrightarrow{AB} \quad (7)$$

### 3.5.3

Il s'agit bien du vecteur  $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$  car les points  $A$  et  $B$  sont fixes sur le solide 2.

## Changement de point – le vecteur rotation

La dérivée temporelle d'un vecteur de norme constante apparaît dans l'équation 5. Il a été vu au chapitre précédent l'existence d'un vecteur rotation  $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$  avec lequel la dérivée temporelle s'exprime par

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \right]_1 = \overrightarrow{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AB} \quad (8)$$

Comme précédemment, il suffit de poser  $\vec{AB} = \vec{IB} - \vec{IA}$  pour retrouver la définition d'un vecteur vitesse et en déduire ainsi la formule de changement de points

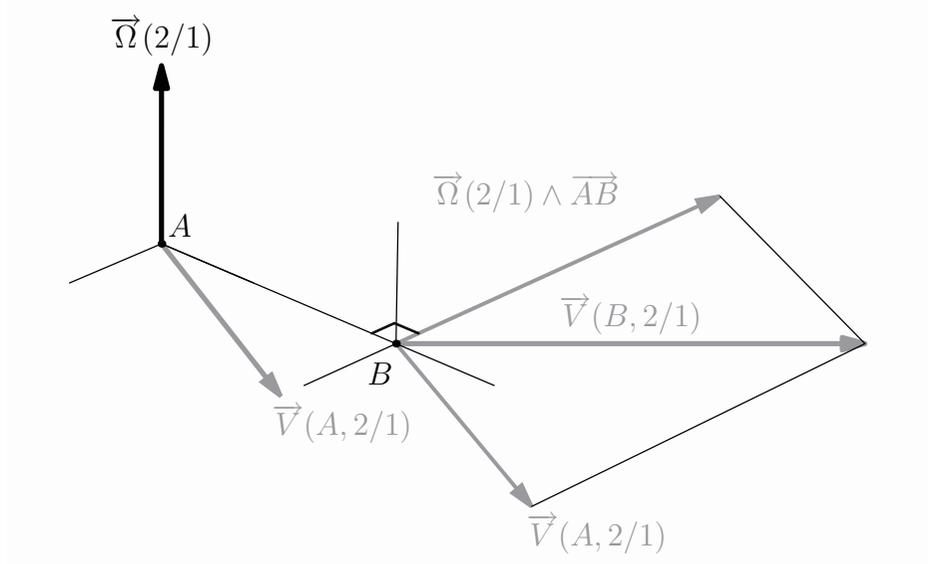
$$\vec{V}(B,2/1) = \vec{V}(A,2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{AB} \quad (9)$$

**Propriété fondamentale**

Le champ des vecteurs vitesse du mouvement d'un solide indéformable se construit à partir de la formule de changement de points

$$\forall i/k, \forall A \text{ et } \forall B, \vec{V}(B,i/k) = \vec{V}(A,i/k) + \vec{\Omega}(i/k) \wedge \vec{AB} \quad (10)$$

On peut tenter une interprétation de cette dernière équation. Le segment  $[AB]$  est de longueur constante au cours du temps. En prenant l'extrémité  $A$  comme point de référence, cela revient à constater que l'extrémité  $B$  ne peut se déplacer que sur la sphère de centre  $A$  et de rayon  $\|\vec{AB}\|$ . C'est ce qu'exprime l'équation 5 quand elle pose l'orthogonalité du vecteur  $\vec{AB}$  et du vecteur dérivé  $\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_1$ . Comme le point  $A$  est maintenant mobile dans le repère  $k$ , c'est la différence des vecteurs vitesse  $\vec{V}(B,i/k) - \vec{V}(A,i/k)$  qui est orthogonale au vecteur  $\vec{AB}$ .



**Figure 3.9** Interprétation graphique de la formule de changement de points sur un mouvement donné.



Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  est indépendant de tout point et caractérise le changement d'orientation de l'objet  $i$  par rapport à l'objet  $k$ .

### 3.5.4

## Le torseur cinématique

Un torseur est un champ de vecteurs équiprojectif. Le champ des vecteurs vitesse est un champ de vecteurs équiprojectif. On peut donc définir le torseur cinématique.

**Définition**

On appelle **torseur cinématique** le champ des vecteurs vitesse défini pour un mouvement de solides indéformables.

**Notation**

Pour un mouvement  $i/k$ , le torseur cinématique est noté simplement  $\mathcal{V}(i/k)$ , la lettre  $\mathcal{V}$  est choisie par référence au mot vitesse.

Les éléments de réduction de ce torseur en un point  $P$  sont respectivement

- $\vec{\Omega}(2/1)$  le vecteur rotation ;
- $\vec{V}(P,2/1)$  le vecteur vitesse calculé au point  $P$ .

Le champ des vecteurs vitesse se construit entièrement à partir des éléments de réduction du torseur

$$\mathcal{V}(2/1) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(P,2/1) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \mathcal{V}(2/1) = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(P,2/1) \end{array} \right.} \quad (11)$$

Le point de calcul  $P$  à la gauche de l'accolade est redondant dans l'écriture de droite. Mais un point à cet endroit est indispensable lorsque les éléments de réduction ne sont pas nommés. Le mécanicien débutant a intérêt à le mettre systématiquement, car un oubli est préjudiciable.

Supposons l'existence d'un point  $C$  de vecteur vitesse nul dans un mouvement  $4/3$ . La notation suivante est correcte, complète et efficace.

$$\mathcal{V}(4/3) = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(4/3) \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad (12)$$

Le vecteur vitesse nul donné concerne le calcul au point  $C$ , soit  $\vec{V}(C,4/3)$ .

La résultante est toujours en première place derrière l'accolade

## 3.6 Composition des mouvements



Le lecteur sait déjà faire la somme de vecteurs flèche, en les mettant bout à bout. Le résultat a comme origine la première des origines et comme extrémité la dernière des extrémités.

Il faut veiller à la cohérence des indices. Les mouvements  $4/3$  et  $2/1$  par exemple ne peuvent pas être composés.

Le sportif de haut niveau sait ce que veut dire *décomposer* un mouvement. Une gestuelle compliquée est décrite par une succession de mouvements élémentaires, ces mouvements pouvant être travaillés et répétés indépendamment les uns des autres. Une fois maîtrisés individuellement, ils sont enchaînés pour obtenir la performance souhaitée.

**Définition**

On appelle **composition des mouvements** l'activité qui consiste à les enchaîner.

Soient  $i, j$  et  $k$  trois objets en mouvements relatifs. Le mouvement  $i/k$  est le résultat de la composition des mouvements  $i/j$  et  $j/k$ .

Les outils vectoriels de description des mouvements étant en place, la suite de ce chapitre s'attache à mettre en place les relations mathématiques qui en découlent.

### 3.6.1

## Composition des vecteurs vitesse

Soient trois points  $A, B$  et  $C$  respectivement immobiles sur trois solides 1, 2 et 3. Soit par exemple le point  $C$  que l'on suit dans les mouvements  $3/1$  et  $3/2$ , ce qui est assez facile à concevoir. La définition d'un vecteur vitesse permet d'écrire

$$\vec{V}(C,3/1) = \left[ \frac{d\vec{AC}}{dt} \right]_1 \quad \vec{V}(C,3/2) = \left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_2 \quad (13)$$



Est-ce que les bases de dérivation correspondent aux mouvements ?  
Les points fixes choisis sont-ils compatibles avec les mouvements ?

Il est tentant de chercher à lier ces deux vecteurs vitesse, en décomposant  $\vec{AC}$  en  $\vec{AB} + \vec{BC}$  par exemple. On obtient ainsi

$$\vec{V}(C,3/1) = \left[ \frac{d\vec{AC}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_1 + \left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_1 \quad (14)$$

Le premier terme  $\left[ \frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_1$  définit le vecteur vitesse  $\vec{V}(B,2/1)$ .

Le deuxième terme  $\left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_1$  n'est pas un vecteur vitesse. Il est nécessaire de changer de base de dérivation pour que le point  $B$  y soit fixe

$$\left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{BC}}{dt} \right]_2 + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{BC} \quad (15)$$

En reconnaissant dans cette expression le vecteur vitesse  $\vec{V}(C,3/2)$ , on obtient

$$\vec{V}(C,3/1) = \vec{V}(C,3/2) + \vec{V}(B,2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{BC} \quad (16)$$

d'où finalement, en reconnaissant la formule de changement de point sur le mouvement 2/1.

$$\vec{V}(C,3/1) = \vec{V}(C,3/2) + \vec{V}(C,2/1) \quad (17)$$

Alors que considérer le point  $C$  immobile dans 3 est évident, car il a été défini comme cela, la composition des vecteurs vitesse montre qu'il faut savoir changer de point de vue et imaginer le mouvement du point coïncidant attaché au solide 2.

### Définition

On appelle **composition des vecteurs vitesse** la relation entre les vecteurs vitesse calculés en un point concernant trois mouvements qui se composent.

$$\forall i, j \text{ et } k \text{ solides, } \forall P, \vec{V}(P,i/k) = \vec{V}(P,i/j) + \vec{V}(P,j/k) \quad (18)$$

### Exemple

Soit un bras de robot comportant trois solides :

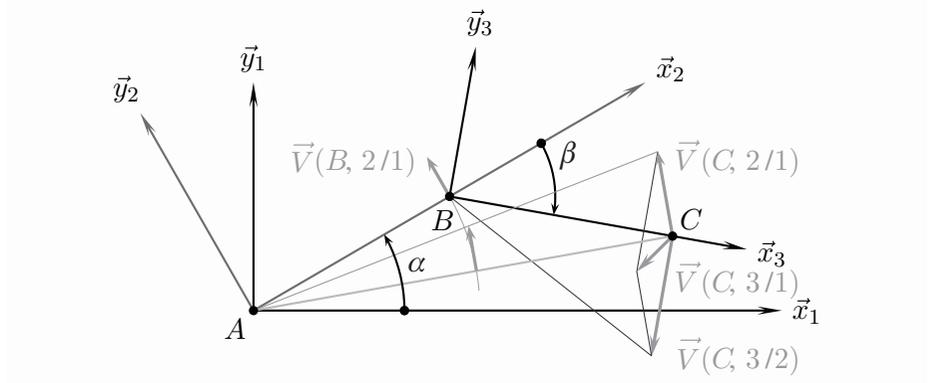
- un bâti 1 auquel on attache un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un bras 2 en mouvement de rotation par rapport à 1 autour de l'axe  $(A, \vec{z}_1)$ . On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , avec le vecteur  $\vec{z}_2$  confondu à chaque instant avec  $\vec{z}_1$ . On pose  $\vec{AB} = L_2 \vec{x}_2$  et  $\alpha$  l'angle  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  ;
- un avant bras 3 en mouvement de rotation par rapport à 2 autour de l'axe  $(B, \vec{z}_2)$ . On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , avec le vecteur  $\vec{z}_3$  confondu à chaque instant avec  $\vec{z}_2$ . On pose  $\vec{BC} = L_3 \vec{x}_3$  et  $\beta$  l'angle  $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ .



La compréhension du terme  $\vec{V}(C,2/1)$  est une des clés de la réussite en mécanique.



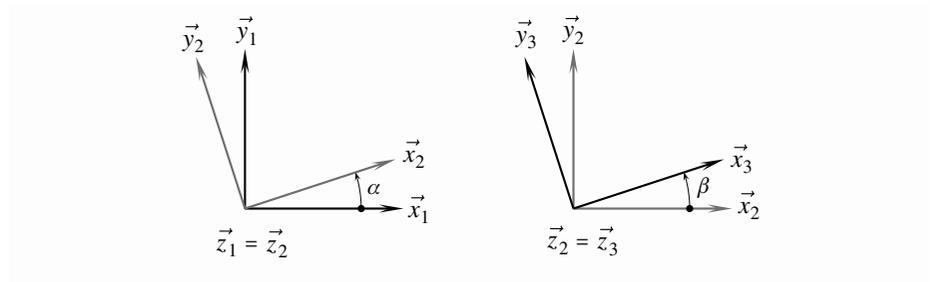
Le point  $P$  est quelconque, mais fixé pour le changement de mouvement.



**Figure 3.10** Composition des vecteurs vitesse  $\vec{V}(C,3/2)$  et  $\vec{V}(C,2/1)$  pour déterminer  $\vec{V}(C,3/1)$ .

La description du mécanisme permet d'écrire les torseurs cinématiques associés aux mouvements 2/1 et 3/2

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2) = B \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$



Alors que l'observateur attache assez naturellement le point  $C$  au solide 3, il est nécessaire de faire l'effort d'imaginer le mouvement de ce point  $C$  lié au solide 2 en fixant l'angle  $\beta$  pour comprendre le vecteur  $\vec{V}(C,2/1)$ . Sans détailler ici les calculs, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{V}(C,3/2) &= \dot{\beta} L_3 \vec{y}_3 \\ \vec{V}(C,2/1) &= \dot{\alpha} (L_2 \vec{y}_2 + L_3 \vec{y}_3) \\ \vec{V}(C,3/1) &= \vec{V}(C,3/2) + \vec{V}(C,2/1) \end{aligned}$$

### 3.6.2 Composition des vecteurs rotation

Soient trois mouvements qui se composent, par exemple 3/2, 3/1 et 2/1, et deux points quelconques  $A$  et  $B$ .

Il est possible d'écrire deux relations de composition des vecteurs vitesse

$$\vec{V}(A,3/1) = \vec{V}(A,3/2) + \vec{V}(A,2/1) \tag{19}$$

$$\vec{V}(B,3/1) = \vec{V}(B,3/2) + \vec{V}(B,2/1) \tag{20}$$

et trois formules de changement de points, une par mouvement

$$\vec{V}(B,3/1) = \vec{V}(A,3/1) + \vec{\Omega}(3/1) \wedge \overrightarrow{AB} \tag{21}$$

$$\vec{V}(B,3/2) = \vec{V}(A,3/2) + \vec{\Omega}(3/2) \wedge \overrightarrow{AB} \tag{22}$$

$$\vec{V}(B,2/1) = \vec{V}(A,2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AB} \tag{23}$$

### 3.6.3

La somme des torseurs n'a de sens que si les mouvements se composent.

En remplaçant dans l'équation 20 les vecteurs vitesses à partir des trois équations 21, 22 et 23, puis en simplifiant grâce à l'équation 19, on obtient

$$\forall A, \forall B, \vec{\omega}(3/1) \wedge \overrightarrow{AB} = \left( \vec{\omega}(3/2) + \vec{\omega}(2/1) \right) \wedge \overrightarrow{AB} \quad (24)$$

L'égalité des deux produits vectoriels est vérifiée quelques soient les points  $A$  et  $B$ , on en déduit la relation de composition des vecteurs rotations

$$\vec{\omega}(3/1) = \vec{\omega}(3/2) + \vec{\omega}(2/1) \quad (25)$$

#### Définition

On appelle **composition des vecteurs rotation** la relation entre les vecteurs rotation de trois mouvements qui se composent.

$$\forall i, j \text{ et } k \text{ solides, } \vec{\omega}(i/k) = \vec{\omega}(i/j) + \vec{\omega}(j/k) \quad (26)$$

## Composition des torseurs cinématiques

À la vue des résultats des deux paragraphes précédents, on en déduit immédiatement que la composition des mouvements se traduit par une somme de torseurs cinématiques.

$$\mathcal{V}(3/1) = \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1) \quad (27)$$

#### Définition

On appelle **composition des torseurs cinématiques** la relation torsorielle entre trois mouvements qui se composent

$$\forall i, j \text{ et } k \text{ solides, } \mathcal{V}(i/k) = \mathcal{V}(i/j) + \mathcal{V}(j/k) \quad (28)$$

## 3.7 Le champ des vecteurs accélération

### 3.7.1

## Champ des vecteurs accélération

Soient deux objets, ou deux solides, ou deux repères, ou deux espaces affines en mouvement relatif.

#### Définition

On appelle **champ des vecteurs accélération** l'application qui à chaque point de l'espace associe le vecteur accélération correspondant au mouvement considéré.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto \vec{A}(P, 2/1) \end{aligned}$$

### 3.7.2

## Propriété du champ des vecteurs accélération

Soient un mouvement 2/1 et deux points quelconques  $P$  et  $Q$  fixes sur 2. La formule de changement de points sur le mouvement 2/1 s'écrit

$$\vec{V}(Q, 2/1) = \vec{V}(P, 2/1) + \vec{\omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{PQ} \quad (29)$$

Par définition du vecteur accélération, le point  $Q$  étant fixe à chaque instant dans 2

$$\vec{A}(Q, 2/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(Q, 2/1)}{dt} \right]_1 \quad (30)$$

Par substitution, on en déduit

$$\vec{A}(Q, 2/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(P, 2/1)}{dt} \right]_1 + \left[ \frac{d\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{PQ}}{dt} \right]_1 \quad (31)$$

Le point  $P$  a été choisi à chaque instant fixe dans 2, le premier terme s'interprète sans souci comme le vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement 2/1. Le second terme demande un calcul plus poussé

$$\left[ \frac{d\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{PQ}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{\Omega}(2/1)}{dt} \right]_1 \wedge \vec{PQ} + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \left[ \frac{d\vec{PQ}}{dt} \right]_1 \quad (32)$$

Les points  $P$  et  $Q$  étant fixes dans 2, on a immédiatement

$$\left[ \frac{d\vec{PQ}}{dt} \right]_1 = \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{PQ} \quad (33)$$

Au bilan, la relation de changement de points sur le champ des vecteurs accélération s'écrit

$$\vec{A}(Q, 2/1) = \vec{A}(P, 2/1) + \left[ \frac{d\vec{\Omega}(2/1)}{dt} \right]_1 \wedge \vec{PQ} + \vec{\Omega}(2/1) \wedge (\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{PQ}) \quad (34)$$

En effectuant le produit scalaire des deux membres avec le vecteur  $\vec{PQ}$ , et en constatant que le terme  $\vec{\Omega}(2/1) \wedge (\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{PQ}) \cdot \vec{PQ}$  n'est pas nul, on en déduit l'inégalité

$$\vec{A}(Q, 2/1) \cdot \vec{PQ} \neq \vec{A}(P, 2/1) \cdot \vec{PQ} \quad (35)$$

Le champ des vecteurs accélération n'est pas un champ de vecteurs équiprojectif.

### 3.7.3

## Composition des vecteurs accélération

Les vecteurs accélération se composent, mais ne suivent pas la composition des mouvements comme les vecteurs vitesse. Il apparaît lors du calcul le terme complémentaire appelé **accélération de Coriolis**

### Définition

On appelle **composition des vecteurs accélération** la relation entre les vecteurs accélération calculée en un point concernant trois mouvements qui se composent.

$$\vec{A}(P, 3/1) = \vec{A}(P, 3/2) + \vec{A}(P, 2/1) + 2\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P, 3/2) \quad (36)$$

Les différents termes s'interprètent ainsi :

- $\vec{A}(P, 3/1)$  : Vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement de 3 par rapport à 1 ;
- $\vec{A}(P, 3/2)$  : Vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement de 3 par rapport à 2 ;
- $\vec{A}(P, 2/1)$  : Vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement de 2 par rapport à 1, calculé comme s'il était immobile sur 2 ;
- $2\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P, 3/2)$  : Accélération complémentaire de Coriolis, due au mouvement du point  $P$  par rapport au repère 2, lui-même en rotation par rapport au repère 1.



Le calcul détaillé est demandé lors de l'exercice 3.10 page 69.

Le point  $P$  est quelconque, mais fixé pour le changement de mouvement.

## 3.8 Mouvements particuliers

### 3.8.1 Mouvement de rotation

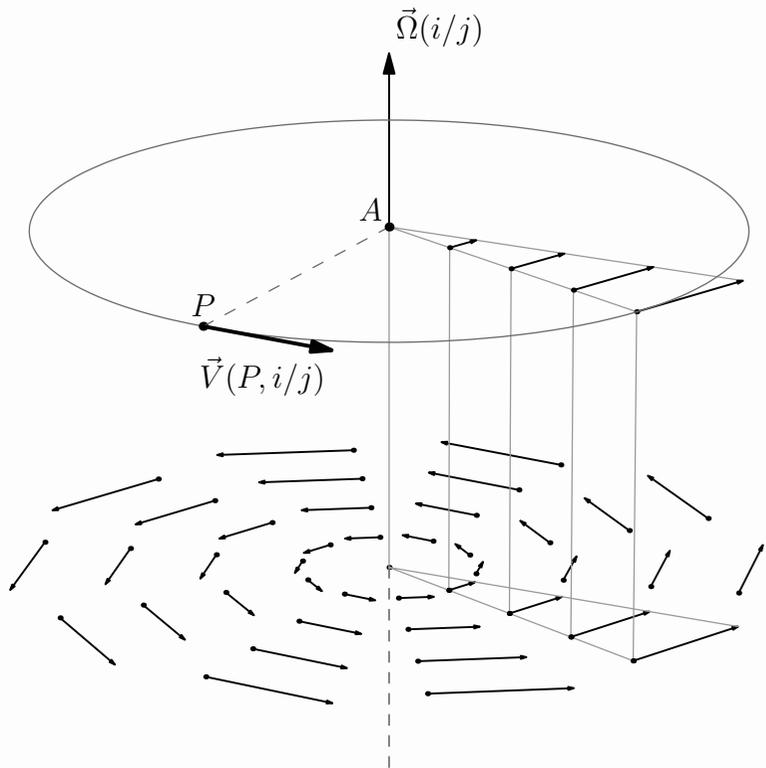
#### Définition

En mécanique du solide indéformable, un mouvement de **rotation** est un mouvement pour lequel il existe un point de vecteur vitesse nul.

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \vec{\Omega}(i/k) \\ \vec{0} \end{cases} \quad (37)$$

Le moment central est en cinématique le vecteur vitesse d'un point quelconque de l'axe de rotation.

L'axe central du torseur cinématique correspond à l'axe de rotation du mouvement, et le moment central est nul.



**Figure 3.11** Champ des vecteurs vitesse lors d'un mouvement de rotation  $i/j$  d'axe  $\Delta$  passant par un point A.

Le champ des vecteurs vitesse admet plusieurs propriétés remarquables :

- tout point  $P$  d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation passant par le point A voit son vecteur vitesse contenu dans ce plan ;
- le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, i/j)$  est orthogonal au rayon  $\overrightarrow{AP}$  ;
- le module du vecteur vitesse  $\vec{V}(P, i/j)$  est proportionnel au module du rayon ;

## 3.8.2

## Mouvement de translation

## Définition

En mécanique du solide indéformable, un mouvement de **translation** est un mouvement pour lequel le vecteur rotation est le vecteur nul.

$$\mathcal{V}(i/k) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{V}(P,i/k) \end{array} \right. \quad (38)$$

Pour un mouvement de translation, le champ des vecteurs vitesse est un champ uniforme de vecteurs. Soit 2/1 un mouvement de translation, on a la propriété

$$\forall Q, \quad \vec{V}(Q,2/1) = \vec{V}(P,2/1) \quad (39)$$

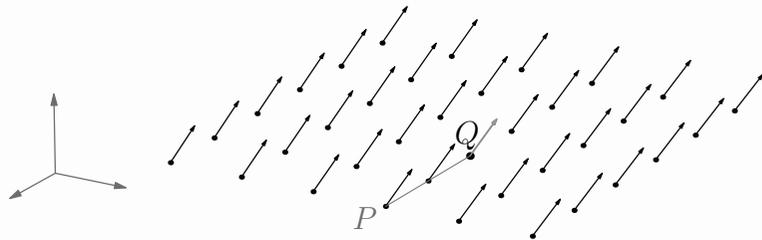


Figure 3.12 Champ uniforme des vecteurs vitesse lors d'un mouvement de translation.

## 3.8.3

## Mouvement plan

Une classe particulière de mécanisme est composée des mécanismes à évolution plane. Leur étude met en œuvre les concepts et les outils présentés jusqu'ici, ni plus, ni moins. Leur particularité est qu'ils n'imposent pas une appréhension tridimensionnelle de l'espace géométrique.

## Définition

Un mouvement  $i/k$  est appelé **mouvement plan** si et seulement si un plan de  $i$  reste à chaque instant confondu avec un plan de  $k$

Alors que dans l'espace sont concevables six mouvements indépendants entre deux solides, il n'en subsiste plus que trois pour les mouvements plans, à savoir la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan et les deux translations du plan.

Soit 2/1 un mouvement plan et  $\vec{z}_1$  un vecteur normal à ce plan. Dans ce cas, les éléments de réduction en un point  $P$  du torseur cinématique  $\mathcal{V}(2/1)$  admettent à chaque instant la forme particulière suivante

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ V_x \vec{x}_1 + V_y \vec{y}_1 \end{array} \right.} \quad (40)$$

Lors d'un mouvement plan, tous les axes de rotation, lorsqu'ils existent, sont perpendiculaires au plan d'évolution. Ceci entraîne que dans le cas d'un mouvement plan, l'automoment du torseur cinématique est toujours nul.

$$\forall P, \forall t, \quad \vec{\Omega}(2/1) \cdot \vec{V}(P,2/1) = 0 \quad (41)$$

Apparaissent alors des points particuliers : ce sont les points d'intersection des axes de rotation avec le plan d'évolution.



Avant l'apparition des ordinateurs individuels, les ingénieurs utilisaient souvent et avec profit des techniques de résolution graphique pour les étudier...

Si le mouvement est un mouvement plan, alors l'automoment du torseur cinématique est nul. Mais la réciproque est fautive !

### Définition

On appelle **centre instantané de rotation** le point d'intersection de l'axe central du torseur cinématique avec le plan d'étude des mouvements.

### Notation

Le centre instantané de rotation est usuellement abrégé en C.I.R. ou CIR et pour un mouvement  $i/k$  est noté  $I_{ik}$ .

Les centres instantanés de rotation matérialisent les positions des axes de rotation dans le plan d'évolution et sont utilisés lors des constructions graphiques.

## Synthèse

### Connaissances

#### Je sais définir les mots ou expressions :

- cinématique ;
- mouvement ;
- temps, date, durée ;
- repère d'espace ;
- référentiel ;
- point coïncidant ;
- trajectoire ;
- loi horaire ;
- vecteur position, vecteur vitesse et vecteur accélération ;
- vecteur rotation ;

- solide indéformable ;
- translation, rotation ;
- composition des mouvements ;
- axe instantané de rotation, centre instantané de rotation ;
- mouvement plan.

#### Je connais :

- les trois formules de composition des mouvements ;
- la formule de changement de points sur un mouvement ;
- la formule traduisant l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse.

### Savoir-faire

#### Je sais

- nommer un mouvement ;
- définir un vecteur position ;
- calculer un vecteur vitesse par changement de points ;
- calculer un vecteur vitesse ou un vecteur accélération par dérivation ;
- tracer un vecteur vitesse en utilisant soit la nature du mouvement, soit la composition des vecteurs vitesse.

## Exercices d'application

3.1 Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points définis sur un solide  $k$ , et  $Q$  un point quelconque mobile dans  $k$ .

1. Donner différents vecteurs position possibles pour un point  $P$  suivi lors d'un mouvement  $i/k$ .

2. Montrer que le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, i/k)$  est indépendant du vecteur position choisi pour un calcul par dérivation.

3. Que représente le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{QP}}{dt} \right]_k$  ?

3.2 On considère un solide 2 en mouvement de rotation par rapport à un solide 1.

Soient  $A$  un point de l'axe de rotation du mouvement 2/1 et  $(\Pi)$  le plan perpendiculaire à l'axe de rotation passant par le point  $A$ .

1. Montrer que pour tout point  $P$  du plan  $(\Pi)$ , le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/1)$  est tracé dans le plan  $(\Pi)$  et est perpendiculaire au rayon  $\vec{AP}$ .

2. Déterminer l'ensemble des points  $Q$  du plan  $(\Pi)$  ayant des vecteurs vitesse de même module.

3. Tracer sur une figure réalisée dans le plan  $(\Pi)$  :

- un système d'axes ;
- le point  $A$  ;
- un point  $P$  ;
- le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/1)$  ;
- la répartition des vecteurs vitesse sur un rayon ;
- le lieu des points  $Q$  ;
- les vecteurs vitesse pour quelques points  $Q_i$ .

4. On considère un plan  $(\Pi_1)$  parallèle au plan  $(\Pi)$  et distant de  $\lambda$  de ce dernier, et on pose  $\vec{\delta}$  un vecteur unitaire orientant l'axe de rotation.

Montrer que les deux champs des vecteurs vitesse issus de ces deux plans sont identiques.

3.3 On considère trois plans confondus en mouvements relatifs. Ces plans sont nommés respectivement 1, 2 et 3 et admettent le vecteur  $\vec{n}$  comme vecteur normal commun.

On se propose de montrer que les trois centres instantanés de rotation  $I_{31}$ ,  $I_{32}$  et  $I_{21}$ , lorsqu'ils existent, sont à chaque instant alignés.

1. Expliciter la loi de composition des vitesses au point  $I_{31}$  par exemple.

2. En supposant les trois vecteurs rotation non nuls, expliciter chacun des termes précédents.

3. Conclure quant à l'alignement des trois centres instantanés de rotation.

### 3.4 Mouvements particuliers

Quelles sont les natures possibles des mouvements pour lesquels l'automoment d'un torseur cinématique  $\mathcal{V}(i/k)$  est à chaque instant nul ?

### 3.5 Lois de commande d'un moteur de robot

On considère un chariot de robot dont on commande le déplacement avec la loi en trapèze de vitesse donnée sur la figure ci-dessous.

– La vitesse nominale de déplacement vaut :  $v_0 = 2 \text{ m/s}$

– Le temps de montée est donné à :  $\Delta t_a = 100 \text{ ms}$ .

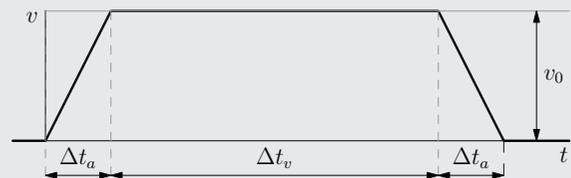
1. Calculer la valeur de  $\Delta t_v$  pour un déplacement total souhaité de  $\Delta x = 1 \text{ m}$ .

2. Superposer à la courbe définissant le trapèze de vitesse les allures des courbes de position et d'accélération.

3. Déterminer le déplacement minimum en dessous duquel la loi de commande devient particulière.

4. Pour amortir les chocs en fonctionnement, on souhaite commander le déplacement  $\Delta x$  du chariot à l'aide de trapèzes d'accélération. Construire le jeu de courbes position, vitesse, accélération et jerk sur une même figure.

On appelle **jerk**, noté  $j$ , le taux de variation de l'accélération :  $j = \frac{da}{dt}$ .



Loi de commande en trapèze de vitesse

### 3.6 Bras de robot

La figure suivante propose une architecture d'un bras de robot industriel. Ce dernier se compose de quatre pièces numérotées de 1 à 4, dont les assemblages autorisent trois mouvements de rotation. Le graphe de structure de ce mécanisme et les torseurs cinématiques correspondant aux mouvements autorisés sont donnés ci-dessous. On s'intéresse aux performances au niveau de l'extrémité  $D$  du bras de ce robot. Ce point est défini par

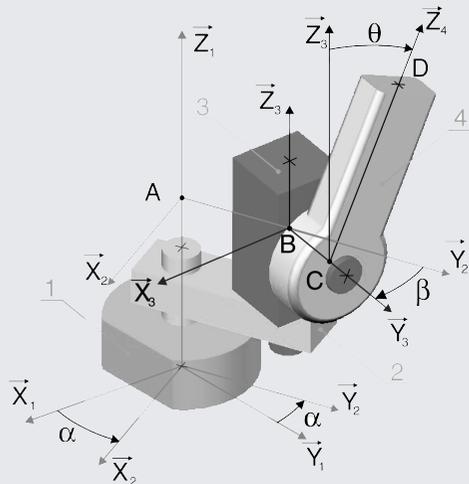
$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}, \text{ avec } \vec{AB} = a\vec{y}_2, \vec{BC} = b\vec{y}_3 \text{ et } \vec{CD} = c\vec{z}_4.$$



$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2) = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(4/3) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

1. Tracer les figures de définition des trois angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\theta$ .

2. Déterminer l'expression générale du vecteur vitesse  $\vec{V}(D, 4/1)$ .



Architecture simplifiée d'un bras de robot.

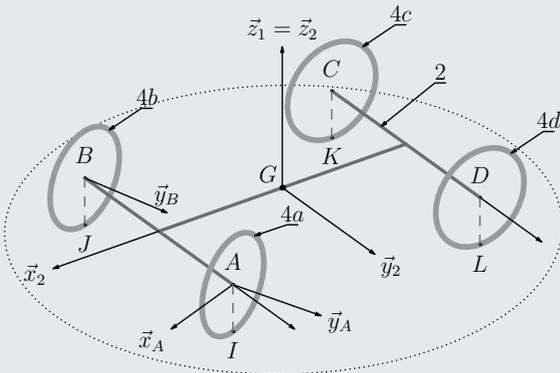
3. Dans le cas particulier où l'angle  $\beta$  est nul et l'angle  $\theta$  reste constant, mais non nul, identifier le mouvement particulier du bras 4 par rapport au bâti 1 et interpréter sur une figure tracée dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  le vecteur  $\vec{V}(D, 4/1)$  correspondant. Il est demandé pour cette figure de choisir un angle  $\theta$  positif.
4. Dans le cas particulier où seul l'angle  $\beta$  reste constant et de valeur nulle, calculer le vecteur accélération  $\vec{A}(D, 4/1)$ .
5. Dans le cas particulier où l'angle  $\theta$  est nul et les deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  restent à chaque instant opposés, identifier la nature du mouvement du bras 3 par rapport au bâti 1.

Toujours dans ce cas, déterminer la nouvelle expression du vecteur accélération  $\vec{A}(D, 4/1)$ .

## Exercices d'approfondissement

### 3.7 Comportement d'un véhicule en virage

On s'intéresse au véhicule schématisé sur la figure ci-dessous :



Le châssis et les quatre roues du véhicule étudié.

- le véhicule est posé sur un sol horizontal repéré 1, de normale orientée par le vecteur  $\vec{z}_1$  ascendant ;
- le châssis est modélisé par un rectangle horizontal  $(ABCD)$ , de centre géométrique  $G$ . On lui associe un repère  $(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , avec  $\vec{z}_2$  vertical ascendant et  $\vec{x}_2$  orientant la marche avant du véhicule. On pose

$$\begin{aligned} \vec{GA} &= L\vec{x}_2 + a\vec{y}_2 & \vec{GD} &= -L\vec{x}_2 + a\vec{y}_2 \\ \vec{GB} &= L\vec{x}_2 - a\vec{y}_2 & \vec{GC} &= -L\vec{x}_2 - a\vec{y}_2 \end{aligned}$$

Le châssis reste horizontal au cours du temps. Il est donc en mouvement plan par rapport au sol 1 et on pose

$$\mathcal{V}(2/1) = G \begin{cases} \omega_{21} \vec{z}_2 \\ V_x \vec{x}_2 + V_y \vec{y}_2 \end{cases}$$

- les roues sont modélisées par quatre disques de même rayon  $R$  définis dans des plans verticaux. Les axes de révolution sont ainsi dans le plan du châssis 2.
- les mouvements principaux des roues par rapport au châssis 2 sont des rotations autour de leurs axes de révolution ;
- les deux roues arrière 4c et 4d ont le même axe de révolution  $(C, \vec{y}_2) = (D, \vec{y}_2)$  ;
- la roue avant gauche 4a admet  $(A, \vec{y}_A)$  comme axe de révolution : cet axe est confondu avec  $(A, \vec{z}_2)$  d'un angle  $\alpha_g$  en virage. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_{4a}, \vec{y}_A, \vec{z}_{4a})$  et on appelle  $\beta_g$  l'angle  $(\vec{z}_2, \vec{z}_{4a})$  ;
- la roue avant droite 4b admet  $(B, \vec{y}_B)$  comme axe de révolution : cet axe est confondu avec  $(B, \vec{z}_2)$  d'un angle  $\alpha_d$  en virage. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_{4b}, \vec{y}_B, \vec{z}_{4b})$  et on appelle  $\beta_d$  l'angle  $(\vec{z}_2, \vec{z}_{4b})$  ;
- les quatre roues 4a, 4b, 4c et 4d sont en contact avec le sol 1 respectivement aux points  $I, J, K$  et  $L$  ;
- les roues roulent sans glisser sur le sol, ce qui se traduit par un vecteur vitesse nul au point de contact dans le mouvement relatif de la roue concernée et du sol.

1. Tracer les figures de définition des angles  $\alpha_g$  et  $\beta_g$ , puis déterminer les éléments de réduction au point  $A$  du torseur  $\mathcal{V}(4a/2)$ .
2. Exploiter la définition du roulement sans glissement donnée pour calculer le vecteur vitesse  $\vec{V}(A, 4a/1)$ , puis le vecteur vitesse  $\vec{V}(A, 2/1)$ .

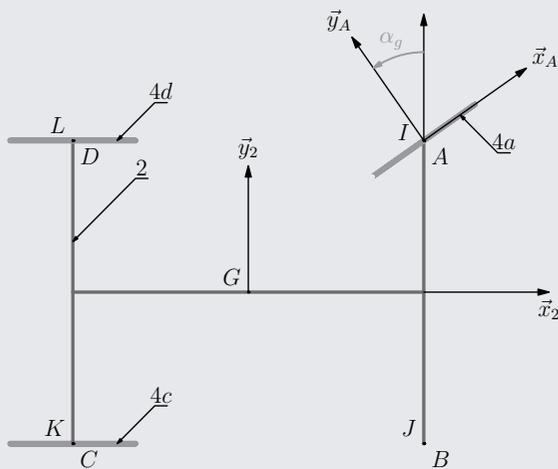
3. En exploitant et généralisant le résultat de la question précédente, tracer sur la figure page suivante les directions des vecteurs vitesses  $\vec{V}(A,2/1)$ ,  $\vec{V}(C,2/1)$  et  $\vec{V}(D,2/1)$ .
4. Déterminer la position du Centre Instantané de Rotation  $I_{21}$  du mouvement 2/1.
5. Mettre en place la direction du vecteur vitesse  $\vec{V}(B,2/1)$  qui soit compatible avec le CIR  $I_{21}$ , puis proposer quatre vecteurs vitesse compatibles avec le mouvement 2/1.
6. Déterminer la relation entre  $\alpha_g$  et  $\alpha_d$  en fonction de  $a$  et  $L$ .

**7. Applications numériques :**

Un constructeur annonce parmi les caractéristiques d'un de ses véhicules :

- une voie  $2a = 1520\text{ mm}$
- un empattement  $2L = 2850\text{ mm}$
- un angle de braquage maximum en virage à gauche et en marche avant de  $\alpha_{gMAX} = 43^\circ$
- un demi-tour possible entre deux trottoirs parallèles distants de  $11,6\text{ m}$

Déterminer l'angle  $\alpha_d$  correspondant.  
Vérifier la quatrième proposition.



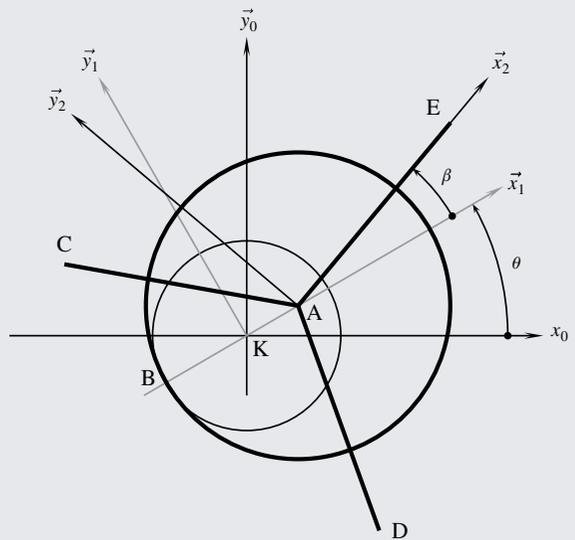
Le document à compléter.

**3.8 Moteur Wankel**

Des images en couleur sur [www.jdotec.fr](http://www.jdotec.fr), du côté de « Exercices & Corrigés ».



Apperçu d'un moteur à piston rotatif de type « Wankel »



Un tel moteur comporte trois pièces principales :

- un stator de forme ovale, repéré 0, auquel on associe un repère  $(K, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- un arbre moteur, repéré 1, auquel on associe le repère  $(K, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$  ;

- une seule rotation d'axe  $(K, \vec{z}_0)$  est possible, notée  $\theta$  ;
- on définit un point A par  $\vec{KA} = e\vec{x}_1$ .
  - un rotor de forme triangulaire faisant office de piston, repéré 2, auquel on associe le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  ;
- une seule rotation d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  est possible, notée  $\beta$  ;
- de plus, ce rotor roule sans glisser en un point B sur un pignon fixe du stator ;
- la position du point B est caractérisée par le vecteur  $\vec{KB} = -b\vec{x}_1$ .

Les mouvements possibles sont ainsi caractérisés par deux torseurs cinématiques et un vecteur vitesse particulier.

$$\mathcal{V}(1/0) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{V}(B,2/0) = \vec{0}$$

1. Tracer les figures de définition des angles  $\theta$  et  $\beta$ .
2. Déterminer l'expression du vecteur rotation  $\vec{\Omega}(2/0)$  et du vecteur vitesse  $\vec{V}(A,2/0)$ .
3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}(B,2/0)$ .
4. En exploitant le roulement sans glissement au point B caractérisé par la nullité du vecteur  $\vec{V}(B,2/0)$ , et en supposant qu'à l'instant  $t = 0$ , les angles  $\theta_0$  et  $\beta_0$  sont nuls, trouver une relation entre les angles  $\beta$  et  $\theta$ .
5. Soit E le point du rotor défini par  $\vec{AE} = d\vec{x}_2$ . Exprimer le plus simplement possible le vecteur vitesse  $\vec{V}(E,2/0)$  en fonction des paramètres géométriques  $b$ ,  $d$ ,  $e$  et du seul paramètre cinématique  $\theta$ .

6. Soient  $x_E$  et  $y_E$  les coordonnées du point  $E$  dans le plan  $(K, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Les exprimer en fonction de  $b, d, e$  et  $\theta$ .
7. On donne  $e = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$  et  $d = 100 \text{ mm}$ . Tracer dans le plan  $(K, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  et à l'échelle 1:1 la trajectoire du point  $E$  dans le mouvement 2/0 définissant ainsi la forme de la courbe directrice du cylindre épitrochoïde.

3.9 Loi de composition des accélérations : Soient trois mouvements qui se composent, par exemple 3/2, 2/1 et 3/1, et un point quelconque  $P$  immobile sur le solide 3.

1. Définir le vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement 3/1 et montrer que ce vecteur est à calculer

comme la somme des deux termes  $\left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1$  et

$$\left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1.$$

2. Expliquer pourquoi le premier terme  $\left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1$

n'est pas un vecteur accélération et transformer l'expression pour faire apparaître le vecteur  $\vec{A}(P,3/2)$ .

3. Le calcul du second terme  $\left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1$  est plus

délicat, car le point  $P$  n'est pas immobile à chaque instant sur le solide 2.

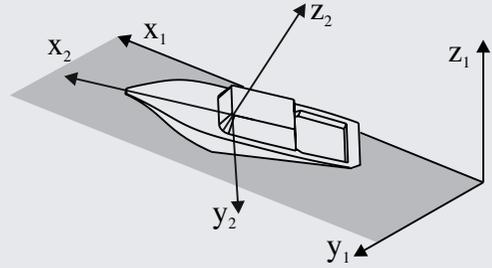
Introduire un point  $I$  immobile à chaque instant sur le solide 2 et comparer le résultat obtenu à la relation de changement de point (34) déterminée à la page 61.

4. En regroupant les deux résultats, conclure quant à la loi de composition des accélérations.

3.10 Pour décrire deux des mouvements particuliers d'un navire sont employés dans la marine les termes « roulis » et « tangage » :

- est appelé roulis le mouvement de rotation de la gauche vers la droite ;
- est appelé tangage le mouvement de rotation d'avant en arrière.

Ces deux rotations sont habituellement complétées par le mouvement de « lacet ». Ce dernier correspond à la rotation du navire lors d'un changement de cap.



Un navire chahuté par la houle.

Un repère de référence  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est posé, avec le vecteur  $\vec{z}_1$  vertical ascendant. Un repère  $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est attaché au navire noté 2, avec le vecteur  $\vec{x}_2$  dans le sens de la marche avant. Les deux bases vectorielles sont prises confondues lorsque le navire est au repos sur une mer calme.

Ces trois rotations sont généralement définies indépendamment les unes des autres par trois angles autour de chacun des vecteurs de la base de référence :

- l'angle associé au roulis est noté  $\alpha$  autour de  $\vec{x}_1$  ;
- l'angle associé au tangage est noté  $\beta$  autour de  $\vec{y}_1$  ;
- l'angle associé au lacet est noté  $\gamma$  autour de  $\vec{z}_1$ .

On se propose de montrer que ce choix pose souci en cinématique.

1. À quoi est attaché le repère de référence ?

2. Tracer les figures de définition des angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

3. Soit le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_x \vec{x}_1 + \omega_y \vec{y}_1 + \omega_z \vec{z}_1$ .

Les trois coordonnées  $\omega_x, \omega_y$  et  $\omega_z$  sont-elles respectivement les dérivées scalaires des trois angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  ?

On choisit maintenant de nouvelles définitions pour les rotations :

- le lacet par un angle  $\psi$  autour de  $\vec{z}_1$  ;
- le roulis par un angle  $\varphi$  autour de  $\vec{x}_2$  ;
- le tangage par un angle  $\theta$  autour d'un vecteur  $\vec{u}$ .

4. Proposer une expression du vecteur nodal  $\vec{u}$ .

5. Tracer les figures de définition des trois angles de telle manière que les mouvements se composent.

6. Donner la nouvelle expression du vecteur rotation  $\vec{\Omega}(2/1)$ .

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 3.1

1. Avec les points proposés par l'énoncé, trois vecteurs position sont possibles pour suivre un point  $P$  lors d'un mouvement  $i/k$  :  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{BP}$  et  $\overrightarrow{CP}$ .

2. Par définition, le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}(P, i/k)$  est obtenu par dérivation d'un vecteur position du point  $P$  dans le référentiel d'observation. On choisit par exemple le point  $A$  pour définir le vecteur position. On a donc :

$$\overrightarrow{V}(P, i/k) = \left[ \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} \right]_k$$

On introduit un point  $I$  fixe dans le référentiel  $k$  en posant  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IP}$

$$\overrightarrow{V}(P, i/k) = \left[ \frac{d\overrightarrow{AI}}{dt} \right]_k + \left[ \frac{d\overrightarrow{IP}}{dt} \right]_k = \left[ \frac{d\overrightarrow{IP}}{dt} \right]_k$$

En effet, le vecteur  $\overrightarrow{AI}$  est un vecteur immobile dans le référentiel  $k$ , donc de dérivée temporelle nulle dans  $k$ . Le vecteur vitesse est bien indépendant du vecteur position choisi.

3. Le vecteur  $\left[ \frac{d\overrightarrow{QP}}{dt} \right]_k$  n'est pas un vecteur position du point  $P$  dans  $k$  car le point  $Q$  n'est pas immobile dans  $k$ . Soit  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}$ . En utilisant la définition du vecteur vitesse, on obtient de suite

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overrightarrow{QP}}{dt} \right]_k &= \left[ \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} \right]_k - \left[ \frac{d\overrightarrow{AQ}}{dt} \right]_k \\ &= \overrightarrow{V}(P, i/k) - \overrightarrow{V}(Q, i/k) \end{aligned}$$

Le vecteur  $\left[ \frac{d\overrightarrow{QP}}{dt} \right]_k$  représente ainsi la différence des deux vecteurs vitesses  $\overrightarrow{V}(P, i/k) - \overrightarrow{V}(Q, i/k)$ .

### 3.2

Le point  $A$  est défini sur l'axe de rotation, et admet donc un vecteur vitesse nul dans le mouvement considéré. La formule de changement de point sur le mouvement 2/1 permet d'écrire alors

$$\overrightarrow{V}(P, 2/1) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AP}$$

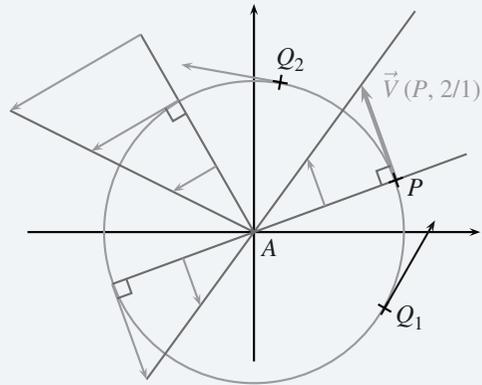
Le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}(P, 2/1)$  est de fait orthogonal au vecteur rotation  $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$  et est donc à tracer dans le plan  $(\Pi)$ .

De plus, le produit scalaire membre à membre de cette égalité avec le vecteur  $\overrightarrow{AP}$  permet de dire

$$\forall P, \overrightarrow{V}(P, 2/1) \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Aucun des deux vecteurs n'étant *a priori* nul, on en déduit que les deux vecteurs sont orthogonaux.

2. La formule de changement de points précédente  $\overrightarrow{V}(P, 2/1) = \overrightarrow{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AP}$  permet de répondre à cette question. En effet, quelque soit le point  $P$  du plan  $(\Pi)$  considéré, les deux vecteurs  $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$  et  $\overrightarrow{AP}$  sont orthogonaux et on en déduit que dans ce cas très particulier, la norme du vecteur vitesse est égale au produit de leurs normes, c'est-à-dire  $\|\overrightarrow{V}(P, 2/1)\| = \|\overrightarrow{\Omega}(2/1)\| \|\overrightarrow{AP}\|$ .



Champ des vecteurs vitesse pour un mouvement de rotation.

À l'instant considéré, on souhaite une valeur constante pour le module du vecteur vitesse sachant que le module du vecteur rotation est indépendant du point  $P$ . L'ensemble des points  $Q$  solutions est donc le cercle du plan  $(\Pi)$  de centre  $A$  et de rayon la valeur du module  $\|\overrightarrow{AP}\|$  du point  $P$  choisi.

3. La figure (3) résume les propriétés mises en évidence lors des deux premières.

4. Soit le point  $P_1$  du plan  $(\Pi_1)$  défini tel que  $\overrightarrow{PP_1} = \lambda \vec{\delta}$ . Le vecteur  $\overrightarrow{AP_1}$  se décrit donc aisément par  $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{AP} + \lambda \vec{\delta}$ . On constate que le vecteur  $\vec{\delta}$  a été posé colinéaire au vecteur rotation  $\overrightarrow{\Omega}(2/1)$  et on trouve ainsi immédiatement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V}(P_1, 2/1) &= \overrightarrow{\Omega}(2/1) \wedge \overrightarrow{AP_1} \\ &= \overrightarrow{\Omega}(2/1) \wedge (\overrightarrow{AP} + \lambda \vec{\delta}) \\ &= \overrightarrow{V}(P, 2/1) \end{aligned}$$

Tous les points situés sur une droite parallèle à l'axe de rotation admettent le même vecteur vitesse. On en déduit que les champs des vecteurs vitesse issus des deux plans  $(\Pi)$  et  $(\Pi_1)$  sont identiques.

### 3.3

1. La loi de composition des vitesses au point  $I_{31}$  s'écrit

$$\vec{V}(I_{31},3/1) = \vec{V}(I_{31},3/2) + \vec{V}(I_{31},2/1)$$

2. En supposant les vecteurs rotation non nuls, on se place sur chacun des trois mouvements pour écrire :

– le vecteur  $\vec{V}(I_{31},3/1)$  est nul ;

– sur le mouvement 3/2, on a  $\vec{V}(I_{31},3/2) = \omega_{32} \vec{n} \wedge \overrightarrow{I_{32}I_{31}}$  ;

– sur le mouvement 2/1, on a  $\vec{V}(I_{31},2/1) = \omega_{21} \vec{n} \wedge \overrightarrow{I_{21}I_{31}}$  ;

Après substitution, on arrive alors au produit vectoriel nul suivant

$$\vec{n} \wedge \underbrace{(\omega_{32} \overrightarrow{I_{32}I_{31}} + \omega_{21} \overrightarrow{I_{21}I_{31}})}_{\vec{u}} = \vec{0}$$

3. Le vecteur  $\vec{n}$  n'est pas nul et les deux vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux. Le seul cas de nullité du produit vectoriel est alors le vecteur  $\vec{u}$  nul, ce qui n'est possible que si les trois CIR sont alignés.

### 3.4

On commence par poser les éléments de réduction en un point  $P$  du torseur cinématique  $\mathcal{V}(i/k)$  :

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \vec{\Omega}(i/k) \\ \vec{V}(P,i/k) \end{cases}$$

L'automent du torseur cinématique  $\mathcal{V}(i/k)$  est l'invariant obtenu par le produit scalaire de la résultante et du moment exprimé en un point quelconque et, dans le cas présent où il est à chaque instant nul, on a l'égalité

$$\forall t, \quad \vec{\Omega}(i/k) \cdot \vec{V}(P,i/k) = 0$$

Trois cas sont à envisager :

– soit le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  est nul, alors le mouvement  $i/k$  est un mouvement de translation, ou le mouvement nul si le torseur cinématique est le torseur nul ;

– soit le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  n'est pas nul et le vecteur vitesse  $\vec{V}(P,i/k)$  est nul, alors le mouvement  $i/k$  est un mouvement de rotation dont l'axe de rotation passe à l'instant considéré par le point  $P$  ;

– soit les deux vecteurs ne sont pas nuls et sont orthogonaux. Dans ce cas, le mouvement est également un mouvement de rotation dont l'axe reste à déterminer.

En effet, l'axe central du torseur est défini dès que le vecteur résultante n'est pas nul et pour tout point de cet axe central, le vecteur vitesse est colinéaire au vecteur rotation. Si le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires est nul, alors nécessairement un des deux vecteurs est nul, et ce n'est pas par hypothèse le vecteur rotation...

### 3.5

1. Le déplacement se décompose en trois phases :

– la phase de translation rectiligne uniformément accélérée pendant  $\Delta t_a$  provoque un déplacement de  $\Delta x_{ai} = \frac{1}{2} a_0 \Delta t_a^2 = \frac{1}{2} v_0 \Delta t_a$  ;

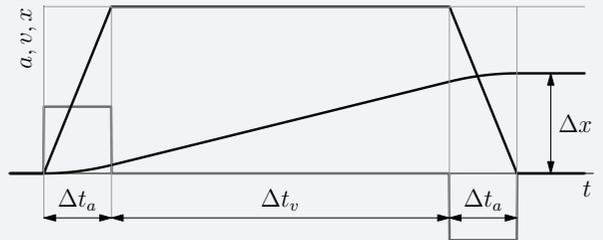
– la phase de translation rectiligne uniforme pendant  $\Delta t_v$  provoque un déplacement de  $\Delta x_v = v_0 \Delta t_v$  ;

– la phase de translation rectiligne uniformément décélérée pendant  $\Delta t_a$  provoque un déplacement  $\Delta x_{af}$  identique à  $\Delta x_{ai}$ .

On obtient finalement

$$\Delta x = v_0 (\Delta t_a + \Delta t_v)$$

2. Les courbes s'analysent en reprenant les trois phases identifiées à la question précédente.

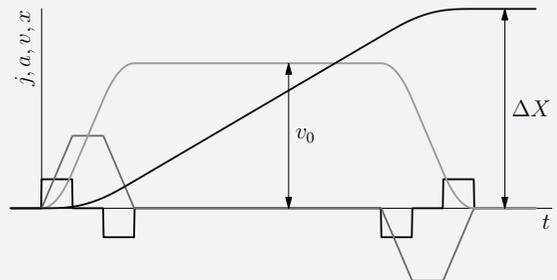


Les trois courbes accélération, vitesse et position en fonction du temps

3. La loi de commande devient particulière si la vitesse nominale n'est pas atteinte, ce qui correspond alors à

$$\Delta x_{min} = v_0 \Delta t_a$$

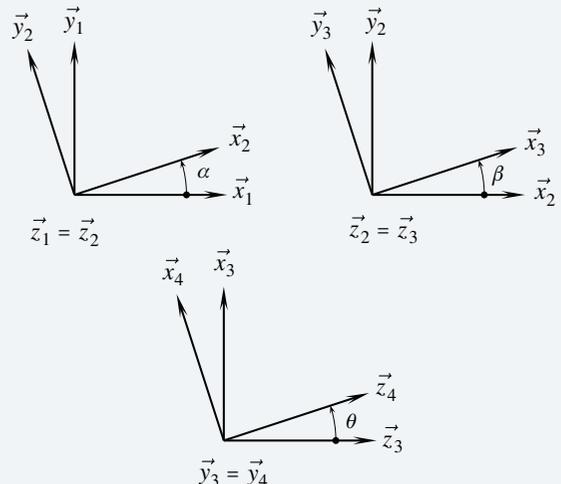
4. L'allure des quatre courbes est donnée sur la figure ci-dessous



Lois de commande en trapèzes d'accélération

### 3.6

1. Les figures de définition des angles sont à faire avec des valeurs petites et positives.



2. La composition des vitesses sur la chaîne ouverte 1 – 2 – 3 – 4 permet d'écrire

$$\vec{V}(D,4/1) = \vec{V}(D,4/3) + \vec{V}(D,3/2) + \vec{V}(D,2/1)$$

Il reste à utiliser la formule de changement de points sur chacun des trois mouvements :

– pour le mouvement 4/3, à partir des éléments de réduction en B du torseur  $\mathcal{V}(4/3)$

$$\vec{V}(D,4/3) = \vec{V}(B,4/3) + \vec{\Omega}(4/3) \wedge \overrightarrow{BD}$$

Après substitution, on a alors deux produits vectoriels à calculer  $\dot{\theta} \vec{y}_3 \wedge (b \vec{y}_3 + c \vec{z}_4)$ , dont le premier est immédiatement nul. La figure de définition de l'angle  $\theta$  permet de trouver

$$\vec{V}(D,4/3) = \dot{\theta} b \vec{x}_4$$

– on recommence pour le mouvement 3/2

$$\vec{V}(D,3/2) = \dot{\beta} \vec{z}_2 \wedge (b \vec{y}_3 + c \vec{z}_4)$$

Le produit vectoriel  $\vec{z}_2 \wedge \vec{y}_3$  se lit sur la figure de définition de l'angle  $\beta$  et le résultat vaut  $-\vec{x}_3$ . Le produit vectoriel  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_4$  se lit sur la figure de définition de l'angle  $\theta$  et le résultat vaut  $\sin \theta \vec{y}_3$ . On en déduit

$$\vec{V}(D,3/2) = \dot{\beta} (-b \vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3)$$

– enfin, le calcul à effectuer sur le mouvement 2/1 est

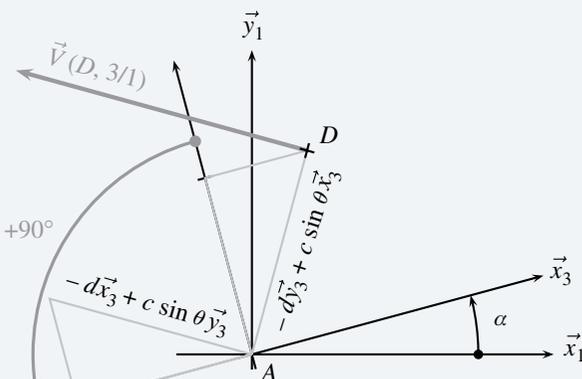
$$\vec{V}(D,2/1) = \dot{\alpha} \vec{z}_2 \wedge (a \vec{y}_2 + b \vec{y}_3 + c \vec{z}_4)$$

Les trois produits vectoriels se déterminent directement sur les figures de définition des angles et on trouve

$$\vec{V}(D,2/1) = \dot{\alpha} (-a \vec{x}_2 - b \vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3)$$

On en déduit l'expression générale recherchée

$$\begin{aligned} \vec{V}(D,4/1) &= \dot{\alpha} (-a \vec{x}_2 - b \vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3) \\ &\quad + \dot{\beta} (-b \vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3) \\ &\quad + \dot{\theta} b \vec{x}_4 \end{aligned}$$



L'angle  $\beta$  est nul et l'angle  $\theta$  positif et constant

3. Dans le cas particulier où l'angle  $\beta$  est nul et l'angle  $\theta$  reste constant, l'expression précédente se simplifie en  $\vec{V}(D,4/1) = \dot{\alpha} (-d \vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3)$ , avec la longueur  $d = a + b$ . Le bras 4 est en mouvement de rotation par rapport au bâti 1 au tour de l'axe  $(A, \vec{z}_1)$ .

4. Dans le cas particulier où seul l'angle  $\beta$  reste constant et nul, l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}(D,4/1)$  se simplifie en  $\vec{V}(D,4/1) = \dot{\alpha} (-d \vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3) + \dot{\theta} b \vec{x}_4$ , avec la longueur  $d = a + b$ .

Le vecteur accélération  $\vec{A}(D,4/1)$  se calcule par dérivation du vecteur vitesse  $\vec{V}(D,4/1)$  dans la base 1. On peut anticiper le calcul en évaluant les dérivées dans 1 des trois vecteurs unitaires :

$$\begin{aligned} - \left[ \frac{d \vec{x}_3}{dt} \right]_1 &= \vec{\Omega}(3/1) \wedge \vec{x}_3 = \dot{\alpha} \vec{y}_3 \\ - \left[ \frac{d \vec{y}_3}{dt} \right]_1 &= \vec{\Omega}(3/1) \wedge \vec{y}_3 = -\dot{\alpha} \vec{x}_3 \\ - \left[ \frac{d \vec{x}_4}{dt} \right]_1 &= \vec{\Omega}(4/1) \wedge \vec{x}_4 = -\dot{\theta} \vec{z}_4 + \dot{\alpha} \cos \theta \vec{y}_3 \end{aligned}$$

La suite du calcul ne fait intervenir que des dérivées de produits de fonctions

$$\begin{aligned} \vec{A}(D,4/1) &= \ddot{\alpha} (-d \vec{x}_3 + c \sin \theta \vec{y}_3) + \ddot{\theta} b \vec{x}_4 \\ &\quad + \dot{\alpha} \dot{\theta} c \cos \theta \vec{y}_3 \\ &\quad - \dot{\alpha}^2 (d \vec{y}_3 + c \sin \theta \vec{x}_3) - \dot{\theta}^2 b \vec{z}_4 + \dot{\alpha} \dot{\theta} b \cos \theta \vec{y}_3 \end{aligned}$$

5. Dans le cas particulier où l'angle  $\theta$  est nul et les deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  restent à chaque instant opposés, on détermine par composition des mouvements le torseur cinématique  $\mathcal{V}(3/1)$

$$\mathcal{V}(3/1) = \begin{cases} \vec{0} \\ -\dot{\alpha} a \vec{x}_2 \end{cases}$$

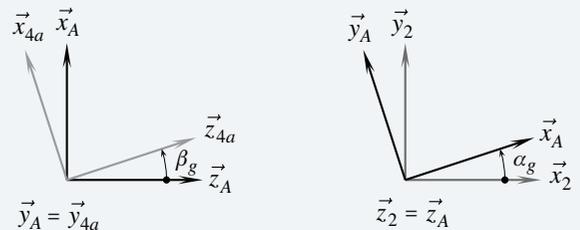
Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(3/1)$  est à chaque instant nul, le mouvement de 3 par rapport à 1 est un mouvement de translation. Le point B a comme trajectoire pour ce mouvement le cercle de centre A et de rayon  $a$  : Le mouvement 3/1 est un mouvement de translation circulaire.

Le bras 4 est solidaire du bras 3 dans le cas étudié, donc le calcul du vecteur accélération  $\vec{A}(D,4/1)$  est immédiat

$$\vec{A}(D,4/1) = \vec{A}(D,3/1) = -\ddot{\alpha} a \vec{x}_2 - \dot{\alpha}^2 a \vec{y}_2$$

### 3.7

1. Le mouvement de la roue avant-gauche par rapport au châssis résulte de la composition des deux rotations définies par l'énoncé.



La forme du torseur cinématique  $\mathcal{V}(4a/2)$  s'obtient par composition des deux rotations précédentes, en prenant soin de vérifier que les deux axes de rotation passent bien par le point A.

$$\mathcal{V}(4a/2) = \begin{cases} \dot{\alpha}_g \vec{z}_2 + \dot{\beta}_g \vec{y}_A \\ \vec{0} \end{cases}$$

2. Le roulement sans glissement au point  $I$  de la roue  $4a$  par rapport au sol 1 se traduit par

$$\vec{V}(I, 4a/1) = \vec{0}$$

La formule de changement de points sur le mouvement  $4a/1$  s'écrit

$$\vec{V}(A, 4a/1) = \vec{V}(I, 4a/1) + \vec{\Omega}(4a/1) \wedge \vec{IA}$$

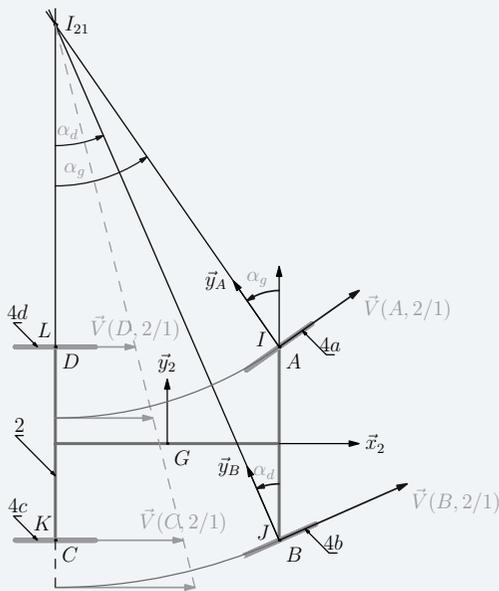
On calcule le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(4a/1)$  par composition des mouvements sur la chaîne  $4a - 2 - 1$  et on trouve  $\vec{\Omega}(4a/1) = \omega_{21}\vec{z}_2 + \dot{\alpha}_g\vec{z}_2 + \dot{\beta}_g\vec{y}_A$ . Comme à chaque instant  $\vec{IA} = R\vec{z}_2$ , on en déduit l'expression cherchée

$$\vec{V}(A, 4a/1) = R\dot{\beta}_g\vec{x}_A$$

Le point  $A$  est à chaque instant sur l'axe de rotation du mouvement  $4a/2$ , le vecteur vitesse  $\vec{V}(A, 4a/2)$  est donc nul, et on en déduit

$$\vec{V}(A, 2/1) = R\dot{\beta}_g\vec{x}_A$$

3.



En adaptant le résultat précédent à chacune des roues, on trouve le vecteur  $\vec{x}_2$  comme direction pour les vecteurs vitesses  $\vec{V}(C, 2/1)$  et  $\vec{V}(D, 2/1)$ .

4. Le CIR  $I_{21}$  est à l'intersection des rayons  $(C, \vec{y}_2)$  et  $(A, \vec{y}_A)$ .

5. Le vecteur vitesse  $\vec{V}(B, 2/1)$  est orthogonal au rayon  $\vec{I}_{21}B$ .

6. Pour trouver la relation entre les deux angles, deux triangles rectangles sont à considérer :

– sur le triangle  $(I_{21}CB)$ , on a  $\tan \alpha_d = \frac{CB}{I_{21}C} = \frac{2L}{I_{21}D + 2a}$  ;

– sur le triangle  $(I_{21}DA)$ , on a  $\tan \alpha_g = \frac{DA}{I_{21}D} = \frac{2L}{I_{21}D}$  ;

Il reste à éliminer la distance  $I_{21}D$  de ces deux équations pour trouver

$$\frac{1}{\tan \alpha_d} - \frac{1}{\tan \alpha_g} = \frac{a}{L}$$

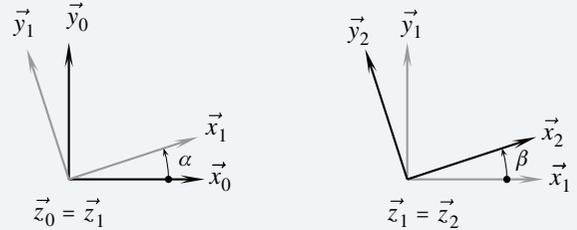
## 7. Applications numériques :

On trouve correspondant à  $\alpha_{g,MAX}$  une valeur  $\alpha_d \approx 32^\circ$ .

Concernant la distance entre trottoirs, on constate que le plus grand rayon est parcouru par le point  $B$ . Sur le triangle  $(I_{21}CB)$ , on évalue  $I_{21}B = \frac{2L}{\sin \alpha_d}$ , ce qui donne un rayon de 5,39 m, soit une distance entre trottoirs de 10,8 m.

## 3.8

1. Les deux figures de définition des angles sont



2. La composition des vecteurs rotations donne directement

$$\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = (\dot{\beta} + \dot{\theta})\vec{z}_0$$

La composition des vecteurs vitesses permet d'écrire au point  $A$ .

$$\vec{V}(A, 2/0) = \vec{V}(A, 2/1) + \vec{V}(A, 1/0)$$

Sur le mouvement  $1/0$ , la formule de changement de points s'écrit

$$\vec{V}(A, 1/0) = \vec{V}(K, 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{KA}$$

Par substitution, on obtient

$$\vec{V}(A, 1/0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 \wedge e\vec{x}_1$$

Le calcul du produit vectoriel se fait directement à partir des figures de définition des angles et on obtient, tout calcul fait

$$\vec{V}(A, 2/0) = \dot{\theta}e\vec{y}_1$$

3. Le champ des vecteurs vitesses du mouvement  $2/0$  est entièrement défini par le calcul préliminaire des vecteurs  $\vec{\Omega}(2/0)$  et  $\vec{V}(A, 2/0)$ , et il suffit d'écrire sur ce mouvement

$$\vec{V}(B, 2/0) = \vec{V}(A, 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{AB}$$

Après substitution et calcul, on obtient

$$\vec{V}(B, 2/0) = -(\dot{\beta}(b+e) + \dot{\theta}b)\vec{y}_1$$

4. Le roulement sans glissement au point  $B$  dans le mouvement  $2/0$  s'exprime par la relation  $\vec{V}(B, 2/0) = \vec{0}$ . On déduit ainsi de l'équation trouvée à la question précédente la relation

$$\dot{\beta} = -\frac{b}{b+e}\dot{\theta}$$

Cette relation s'intègre immédiatement en

$$\beta - \beta_0 = -\frac{b}{b+e}(\theta - \theta_0)$$

5. Toujours sur le mouvement  $2/0$ , la formule de changement de points donne

$$\vec{V}(E, 2/0) = \dot{\theta}e\vec{y}_1 + (\dot{\beta} + \dot{\theta})d\vec{y}_2$$

L'exploitation de la relation sur les taux de rotation permet de dire que

$$\dot{\beta} + \dot{\theta} = \frac{e}{b+e} \dot{\theta}$$

On obtient finalement la forme la plus simple du vecteur vitesse recherchée

$$\vec{V}(E,2/0) = \dot{\theta} e (\vec{y}_1 + \frac{de}{b+e} \vec{y}_2)$$

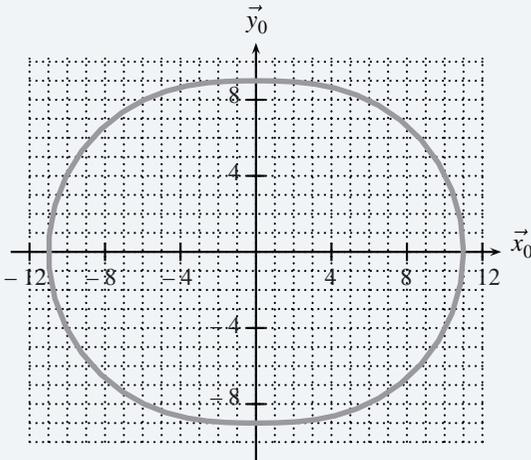
6. On recherche la trajectoire du point  $E$  dans le référentiel  $0$ . Les figures de définition des angles  $\theta$  et  $\theta + \beta$  permettent de déterminer les composantes de ce vecteur dans la base  $0$ .

$$\begin{aligned} \vec{V}(E,2/0) = & -\dot{\theta} e \left( \sin \theta + \frac{d}{b+e} \sin \left( \frac{e}{b+e} \theta \right) \right) \vec{x}_0 \\ & + \dot{\theta} e \left( \cos \theta + \frac{d}{b+e} \cos \left( \frac{e}{b+e} \theta \right) \right) \vec{y}_0 \end{aligned}$$

Par intégration des composantes, on obtient

$$\begin{aligned} x_E = & e \cos \theta + d \cos \left( \frac{e}{b+e} \theta \right) \\ y_E = & e \sin \theta + d \sin \left( \frac{e}{b+e} \theta \right) \end{aligned}$$

7. Tracé de la courbe



### 3.9

1. Par définition du vecteur accélération, on a

$$\vec{A}(P,3/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(P,3/1)}{dt} \right]_1$$

En utilisant la composition des vecteurs vitesse, puis la linéarité de l'opérateur de dérivation, on obtient l'expression de départ recherchée

$$\vec{A}(P,3/1) = \left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1 + \left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1$$

2. La base de dérivation n'est pas associée au repère d'observation du mouvement, le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1$  n'est donc pas un vecteur accélération. Il est nécessaire d'appliquer la formule de dérivation vectorielle pour écrire

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1 &= \left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_2 \\ &+ \vec{\Omega}(3/2) \wedge \vec{V}(P,3/2) \end{aligned}$$

Le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_2$  est par définition le vecteur accélération du point  $P$  dans le mouvement 3/2. On en déduit l'expression du premier terme calculé

$$\left[ \frac{d\vec{V}(P,3/2)}{dt} \right]_1 = \vec{A}(P,3/2) + \vec{\Omega}(3/2) \wedge \vec{V}(P,3/2)$$

3. Pour le calcul du second terme, on introduit un point  $I$  quelconque, mais immobile sur 2 à chaque instant, et on prend en référence la formule de changement de points (34) vue à la page 61, que l'on écrit de suite en adaptant les noms des points.

$$\begin{aligned} \vec{A}(P,2/1) = & \underbrace{\vec{A}(I,2/1)}_{\text{terme A}} \underbrace{\left[ \frac{d\vec{\Omega}(2/1)}{dt} \right]_1}_{\text{terme B}} \wedge \vec{IP} \\ & + \underbrace{\vec{\Omega}(2/1) \wedge (\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{IP})}_{\text{terme C}} \end{aligned}$$

Cette relation est la relation valable pour deux points  $P$  et  $I$  immobiles à chaque instant sur 2. Le point  $P$  étant attaché au solide 3, il faut s'attendre à l'apparition d'un terme complémentaire.

Pour démarrer le calcul, la formule de changement de points sur le mouvement 2/1 et la linéarité de l'opérateur de dérivation permettent de mettre en évidence les deux nouveaux termes à calculer

$$\left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{V}(I,2/1)}{dt} \right]_1 + \left[ \frac{d\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{IP}}{dt} \right]_1$$

Comme le point  $I$  est immobile à chaque instant sur 2 et par définition du vecteur accélération, on peut écrire le premier vecteur « terme A » recherché

$$\left[ \frac{d\vec{V}(I,2/1)}{dt} \right]_1 = \underbrace{\vec{A}(I,2/1)}_{\text{terme A}}$$

La formule de dérivation d'un produit fait apparaître deux vecteurs dont le « terme B » recherché

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{IP}}{dt} \right]_1 = & \underbrace{\left[ \frac{d\vec{\Omega}(2/1)}{dt} \right]_1}_{\text{terme B}} \wedge \vec{IP} + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \underbrace{\left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1}_{\text{terme D}} \end{aligned}$$

Le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1$  n'est pas un vecteur vitesse, car le point

$I$  n'est pas immobile à chaque instant dans le référentiel 1. Il est nécessaire d'appliquer la formule de dérivation vectorielle pour écrire

$$\left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1 = \left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_2 + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{IP}$$

Le point  $P$  attaché au solide 3 et le point  $I$  attaché au solide 2, le vecteur  $\left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_2$  est par définition le vecteur

vitesse  $\vec{V}(P,3/2)$  du point  $P$  dans le mouvement 3/2. On est maintenant en mesure de détailler le vecteur « terme D » et de faire apparaître le troisième vecteur « terme C ».

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(2/1) \wedge \left[ \frac{d\vec{IP}}{dt} \right]_1 \\ = \underbrace{\vec{\Omega}(2/1) \wedge \left( \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{IP} \right)}_{\text{terme C}} + \underbrace{\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P,3/2)}_{\text{terme complémentaire}} \end{aligned}$$

Les différents morceaux sont regroupés et la forme finale du second terme recherché est ainsi

$$\left[ \frac{d\vec{V}(P,2/1)}{dt} \right]_1 = \vec{A}(P,2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P,3/2)$$

4. En remplaçant les deux termes dans l'expression vue à la première question, la relation de composition des accélérations est immédiate

$$\begin{aligned} \vec{A}(P,3/1) = \vec{A}(P,3/2) + \vec{A}(P,2/1) \\ + 2\vec{\Omega}(2/1) \wedge \vec{V}(P,3/2) \end{aligned}$$

### 3.10

1. La première proposition est en général de parler du mouvement du navire par rapport à la mer. Cette dernière n'est pas *solide*, et ne convient donc pas. Il est nécessaire de réaliser que le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est attaché à la terre.

2. Avec la définition donnée, chacun des angles peut être défini lorsque l'on suppose les deux autres nuls.

3. Les trois mouvements ainsi définis correspondent à des cas particuliers du mouvement général de 2 par rapport à 1. La composante  $\omega_x$  n'est la dérivée scalaire de l'angle  $\alpha$  que dans le seul cas où les deux autres angles restent nuls ! Les trois rotations ne se composent pas et le vecteur rotation n'est pas défini à partir des dérivés scalaires des angles.

4. Pour pouvoir composer les mouvements, il est conseillé de s'inspirer de la méthode utilisée pour construire les angles d'Euler. Le vecteur nodal est ainsi choisi orthogonal aux vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{x}_2$ . On peut prendre par exemple

$$\vec{u} = \frac{\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2}{\|\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2\|}$$

5. On obtient ainsi les trois nouvelles figures

6. Les trois rotations ainsi définies se composent et le vecteur rotation s'écrit simplement

$$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\psi}\vec{z}_1 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\phi}\vec{x}_2$$

## Plan

4.1	Chaîne de solides	76
4.2	Les liaisons	77
4.3	Les contacts	87
4.4	Transmissions particulières	91
	Exercices d'application	97
	Exercices d'approfondissement	100
	Solutions des exercices	105

## Introduction

Après le chapitre 2, synthèse des outils mathématiques pour le mécanicien, et après le chapitre 3, consacré aux concepts posés pour la cinématique du solide indéformable, ce chapitre s'intéresse à la description du réel et aux modèles utilisés à cet effet.

Parler de contacts et de liaisons revient à parler respectivement du réel et de modèles. Pour l'étudiant en phase d'apprentissage, il est indispensable de bien séparer ces deux aspects, sous peine de confusions permanentes et d'incompréhensions. Un modèle se suffit à lui-même et se manipule sans trop de précautions, alors que le réel nécessite un regard différent pour poser des hypothèses et exprimer les conditions induites.

Il est également nécessaire de bien distinguer un mouvement possible d'un mouvement constaté. En effet, le mécanicien s'attache toujours dans ses analyses à mettre en évidence des mouvements possibles. Les mouvements réels sont quant à eux observés sur les systèmes réels ou calculés lors de simulation.

## Prérequis

- Les deux chapitres précédents.

## Objectifs

- Imaginer des mouvements dans un espace à six degrés de liberté, parfois restreint à trois degrés de liberté ;
- Distinguer un mouvement possible d'un mouvement réel ;
- Appréhender un ensemble de modèles de comportement ;
- Rechercher des lois entrée-sortie de mécanisme ;
- Confronter résultats théoriques et résultats expérimentaux.

## 4.1 Chaîne de solides

L'étude des mécanismes s'appuie sur le parcours de chaînes de solides, sur lesquelles on compose les mouvements.

### 4.1.1 Graphe de structure

#### Définition

On appelle **graphe de structure** une construction graphique constituée de sommets et d'arcs. En mécanique, les sommets sont des ensembles indéformables et les arcs sont soit des contacts, soit des liaisons.

L'objectif des graphes est de mettre immédiatement en évidence la structure. C'est pourquoi sont posées les règles de syntaxe suivantes, illustrées sur la figure 4.1 :

- les sommets se représentent par des points bien marqués ;
- les  $n$  ensembles indéformables représentés par les sommets sont numérotés de préférence de 1 à  $n$ , parfois de 0 à  $n - 1$  ;
- un arc relie nécessairement deux sommets et se représente sauf impossibilité par des segments de droite. Comme deux arcs  $(a)$  et  $(b)$  relient sur cet exemple les sommets 1 à 2, ils sont tracés en lignes courbes ;
- à l'intérieur d'un graphe apparaissent des boucles à dénombrer lors de la théorie des mécanismes. Il est ainsi important que deux arcs ne se croisent pas.

La théorie des mécanismes est abordée en seconde année.

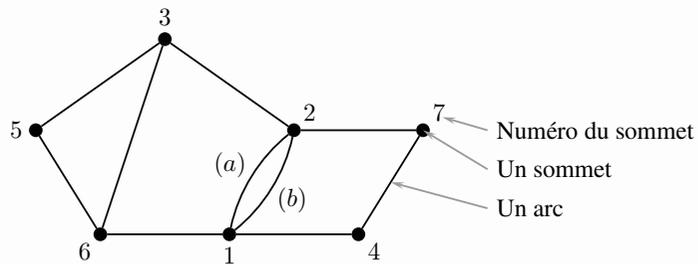


Figure 4.1 Syntaxe pour un graphe de structure.

Suivant la nature des arcs, ce graphe prend différents noms :

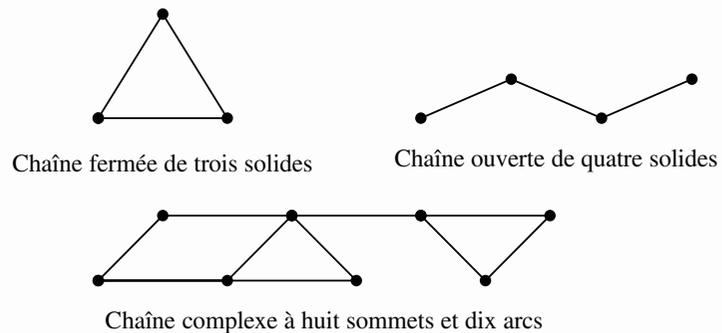
- **graphe des contacts** lorsque les arcs représentent des contacts ;
- **graphe des liaisons** lorsque les arcs représentent des liaisons ;
- un graphe dont les arcs ne sont pas caractérisés garde le nom de graphe de structure.

### 4.1.2 Chaîne ouverte - chaîne fermée

Les graphes de structure sont une expression graphique des chaînes de solides, parmi lesquelles on distingue deux types différents :

- la **chaîne fermée**, pour laquelle en partant d'un sommet, on peut y revenir par un chemin différent de l'aller ;
- la **chaîne ouverte**, pour laquelle seul un retour en arrière permet de revenir au sommet de départ.

Enfin, on appelle **chaîne complexe** une chaîne composée de chaînes ouvertes et fermées. La figure (4.2) illustre la nature des chaînes de solides.



**Figure 4.2** Chaînes fermée, ouverte et complexe.

## 4.2 Les Liaisons

Le mot liaison est à réserver aux modèles de comportement cinématique. Il est trop souvent utilisé indifféremment pour les aspects théoriques et pour les aspects technologiques, et on ne sait alors plus trop ce qu'il représente, en aboutissant à des propositions du type : « Je modélise cette liaison par une liaison pivot ». Il faut admettre qu'il est difficile de modéliser un objet par lui-même...

### 4.2.1 Liaison

Un modèle, donc une construction abstraite représentant la réalité de manière simplifiée...

#### Définition

En mécanique, une **liaison** est un modèle de comportement cinématique.

Une liaison s'attache à définir les possibilités de mouvements entre deux ensembles indéformables. On ne saurait trop insister en répétant qu'un mouvement possible n'est pas forcément un mouvement constaté.

### 4.2.2 Degré de liberté

Comme il a été vu au chapitre III, deux solides sans relation ont six mouvements relatifs indépendants possibles.

#### Définition

On appelle **degré de liberté** un des mouvements indépendants autorisés par une liaison.

Le nombre de degrés de liberté est alors le nombre de mouvements indépendants autorisés par une liaison, et deux solides sans relation ont six degrés de liberté l'un par rapport à l'autre. À l'opposé, deux solides fixés l'un par rapport à l'autre n'admettent aucun degré de liberté.



Usuel, oui, mais pas obligatoire ! Cette manière de faire n'est pas unique.



### 4.2.3

Parmi ces liaisons, neuf sont citées par la norme NF EN ISO 3952-1 de mai 1995.

« Aucune référence technologique » ne veut pas dire aucune référence géométrique...

La connaissance de ces dix liaisons est indispensable pour traiter efficacement un problème de mécanique.

Il est usuel de définir la position d'un solide  $i$  par rapport à un solide  $k$  par la donnée :

- des trois coordonnées de l'origine du repère  $i$  dans le repère  $k$  ;
- des trois angles orientant la base vectorielle  $i$  par rapport à la base vectorielle  $k$ .

En parallèle à cette habitude, les degrés de liberté se classent en deux catégories :

- les degrés de liberté en rotation ;
- les degrés de liberté en translation.

## Liaisons usuelles

Une dizaine de modèles de comportement est posée sans aucune référence technologique, avec des noms plus ou moins explicites.

On rappelle que les liaisons définissent des mouvements possibles et ne donnent aucune indication quant à leur réalisation matérielle. Les formes réelles évoquées par leur appellation n'ont qu'une valeur d'image pour aider à la mémorisation et à la description de la géométrie associée.

### Définition

On appelle **liaison usuelle** un modèle de comportement cinématique possible que l'on peut nommer sans aucune référence technologique.

À une liaison usuelle sont associées six caractéristiques :

- le nom ;
- la description géométrique, à attacher au nom lors de l'énoncé de la liaison ;
- les représentations 3D et 2D ;
- le nombre de degrés de liberté ;
- le paramétrage cinématique, effectué en posant le torseur cinématique ;
- le paramétrage géométrique, proposé de préférence sous la forme de figures.

Pour aborder leur présentation en suivant un ordre de difficulté croissant, on choisit ici de classer les liaisons usuelles en trois catégories, ce que résume le tableau de la figure (4.3).

Liaison à direction	Liaison à axe	Liaison à centre
Glissière Plane	Pivot Pivot glissant Hélicoïdale Cylindre plan	Sphérique Sphère plan Sphère cylindre Sphérique à doigt

Figure 4.3 Les dix liaisons usuelles.

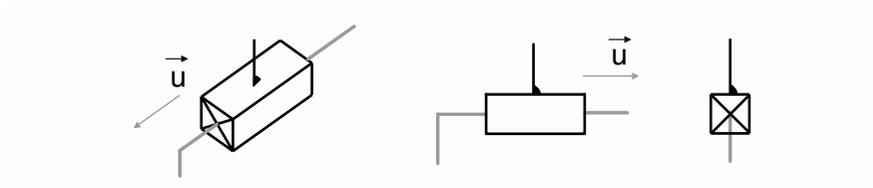
### Les liaisons à direction

#### Glissière

Le nom *glissière* fait penser au verbe *glisser* : cette liaison comporte effectivement un degré de liberté en translation.

#### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation est nul. Le champ des vecteurs vitesse est uniforme. Le torseur cinématique est un torseur couple.

**Exemple :** Glissière de direction  $\vec{u}$ 

Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \vec{0} \\ V_{ik}\vec{u} \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique est valable en n'importe quel point de l'espace.

$$\forall P, \vec{V}(P, i/k) = V_{ik}\vec{u}$$

**► Aspect géométrique**

Sur le solide  $i$  est définie une direction  $\vec{u}_i$ , sur le solide  $k$  est définie une direction  $\vec{u}_k$ , et ces deux directions restent à chaque instant égales.

$$\forall t, \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

Le paramètre cinématique est la dérivée d'un paramètre de mise en position suivant  $\vec{u}$ . Soient  $A$  et  $B$  deux points quelconques pris respectivement sur  $i$  et sur  $k$ . On pose  $\vec{AB} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ , avec  $\vec{v}$  orthogonal à  $\vec{u}$ . Le vecteur  $\vec{AB}$  est un vecteur position du point  $B$  dans le repère  $i$  et on a

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = V_{ik} \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases}$$

**Appui-plan ou plane**

Le mot **appui-plan** fait référence au *contact* plan. Cette liaison correspond au mouvement plan d'un solide par rapport à un autre et comporte trois degrés de liberté :

- la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan concerné ;
- les deux translations dans le plan.

**► Aspect cinématique**

Le vecteur rotation ne comporte qu'une seule composante scalaire suivant la normale au plan. Tous les vecteurs vitesses sont orthogonaux à la normale.

**Exemple :** Liaison plane de normale  $\vec{n}$ .

Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \omega_{ik}\vec{n} \\ \vec{V}(A, i/k), \text{ avec } \vec{V}(A, i/k) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique est valable en n'importe quel point de l'espace.

$$\forall P, \vec{V}(P, i/k) \cdot \vec{n} = 0$$

► **Aspect géométrique**

Sur le solide  $i$  est défini un plan de normale  $\vec{n}_i$ , sur le solide  $k$  est défini un plan de normale  $\vec{n}_k$ , et ces deux plans restent confondus à chaque instant.

**À propos des liaisons à direction**

Chacune de ces deux liaisons est dite **liaison à direction** car la forme des éléments de réduction du torseur cinématique est la même en tout point de l'espace.

En conséquence, le symbole cinématique se positionne n'importe où sur une figure, et l'unique contrainte est de respecter la direction posée.

**Les liaisons à axe**

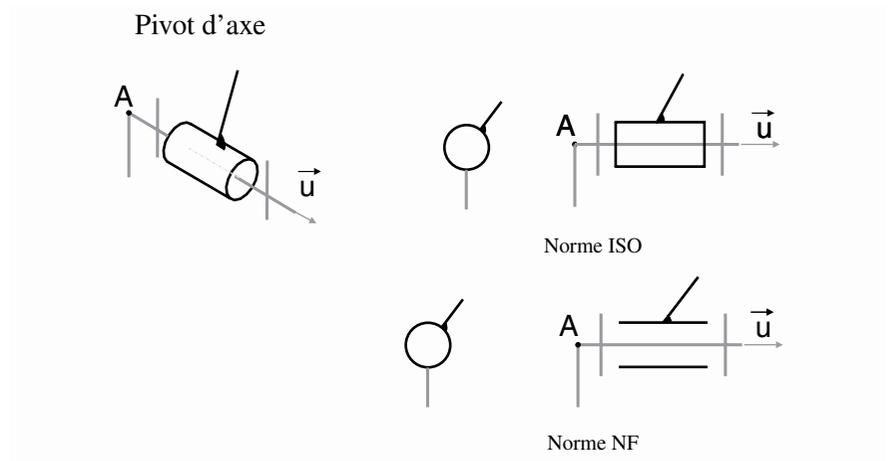
**Pivot**

Le nom **pivot** fait penser au verbe *pivoter* : cette liaison comporte un degré de liberté en rotation. Deux solides en liaison pivot peuvent tourner l'un par rapport à l'autre autour d'une droite.

► **Aspect cinématique**

Le vecteur rotation ne comporte qu'une seule composante scalaire.

**Exemple :** Pivot d'axe  $(A, \vec{u})$



Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{ik} \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

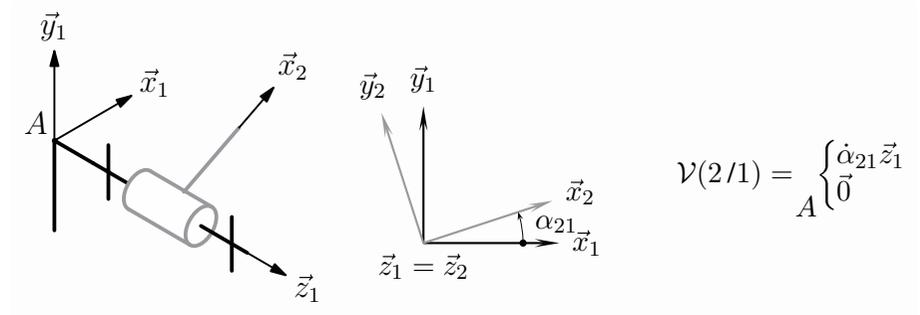
La forme donnée du torseur cinématique est valable pour tous les points de l'axe de rotation.

$$\forall P \in (A, \vec{u}), \vec{V}(P, i/k) = \vec{V}(A, i/k) = \vec{0}$$

► **Aspect géométrique**

Le paramètre cinématique est la dérivée scalaire du paramètre angulaire de mise en position du solide  $i$  par rapport au solide  $k$ .

**Exemple :** Pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  entre deux solides 2 et 1



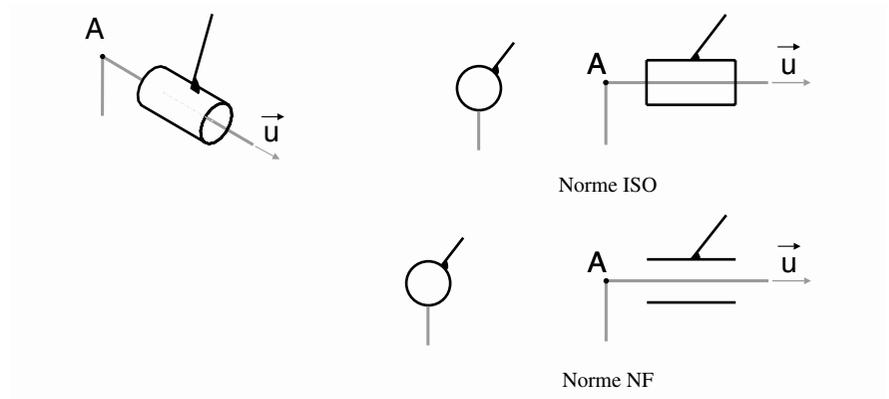
### **Pivot-glissant**

Le nom **pivot-glissant** combine les caractéristiques des mots pivoter et glisser. Cette liaison comporte deux degrés de liberté, une rotation et une translation orientées par un même vecteur.

#### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation ne comporte qu'une seule composante scalaire, ainsi que le vecteur vitesse d'un point de l'axe de rotation.

**Exemple :** Pivot-glissant d'axe  $(A, \vec{u})$



Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \omega_{ik} \vec{u} \\ V_{ik} \vec{u} \end{cases}_A$$

La forme donnée du torseur cinématique est valable pour tous les points de l'axe de rotation.

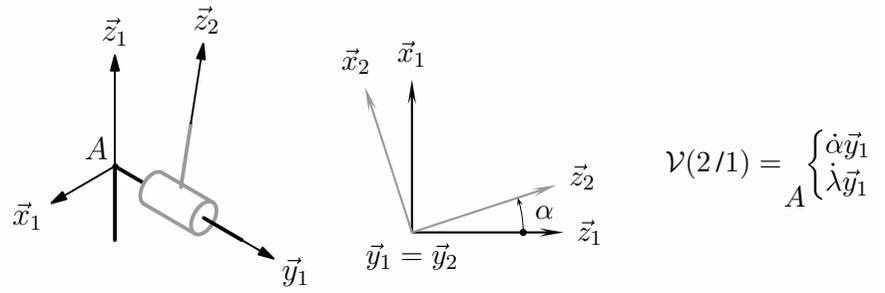
$$\forall P \in (A, \vec{u}), \vec{V}(P, i/k) = \vec{V}(A, i/k) = V_{ik} \vec{u}$$

#### ► Aspect géométrique

Sur chaque solide est définie une droite, et ces deux droites restent confondues au cours du temps.

**Exemple :** Pivot-glissant d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  entre deux solides 2 et 1.

Soient  $A$  et  $B$  deux points quelconques pris sur l'axe de rotation et attachés respectivement à 1 et à 2. On pose  $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{y}_1$  et on a



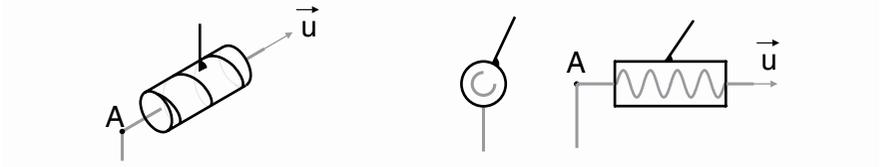
**Hélicoïdale**

Le nom *hélicoïdale* est dérivé du mot hélice. Cette liaison comporte un seul degré de liberté, une rotation et une translation orientées par un même vecteur et combinées.

► **Aspect cinématique**

Le vecteur rotation ne comporte qu'une seule composante scalaire, ainsi que le vecteur vitesse d'un point de l'axe de rotation. Ces deux composantes sont liées.

**Exemple : Hélicoïdale d'axe  $(A, \vec{u})$**



Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(i/k) = A \begin{cases} \omega_{ik} \vec{u} \\ p \omega_{ik} \vec{u} \end{cases}, \text{ avec } p \text{ le pas de l'hélice}$$

L'hélice est à droite lorsque le pas est positif, à gauche lorsque le pas est négatif. Réciproquement, le pas est positif si l'hélice est à droite, négatif si l'hélice est à gauche.

La forme donnée du torseur cinématique est valable pour tous les points de l'axe de rotation.

$$\forall P \in (A, \vec{u}), \vec{V}(P, i/k) = \vec{V}(A, i/k) = V_{ik} \vec{u} = p \omega_{ik} \vec{u}$$

► **Aspect géométrique**

Sur chaque solide est définie une hélice de pas constant. Ces deux hélices sont semblables et restent à chaque instant confondues. Les paramètres de mise en position peuvent être définis comme pour la liaison pivot-glisant, et on ajoute la relation de dépendance.

**Cylindre-plan**

Une liaison à nom explicite, car il suffit d'imaginer pour le nom *cylindre-plan* un cylindre de révolution à chaque instant sur un plan. Cette liaison autorise quatre degrés de liberté, qui ne sont pas très simples à décrire. Sont possibles :

- les deux rotations suivant la normale au plan et suivant l'axe du cylindre de révolution ;
- les deux translations dans le plan.



L'unité du pas dans le système international est le mètre par radian [m/rad].



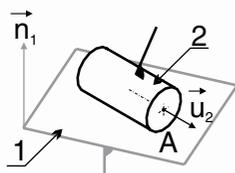
Imaginez une hélice à droite et le mouvement correspondant !

### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation admet deux composantes scalaires dans une base vectorielle locale, construite à partir d'un vecteur de chaque solide.

Le vecteur vitesse d'un point de l'axe de révolution admet deux composantes dans le plan d'évolution.

**Exemple :** Cylindre plan d'axe  $(A, \vec{u}_2)$  et de normale  $\vec{n}_1$ .



$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \omega_n \vec{n}_1 + \omega_u \vec{u}_2 \\ \vec{V}(A, 2/1), \text{ avec } \vec{V}(A, 2/1) \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}$$

Seuls les points de l'axe de rotation n'ont pas de composante de vitesse suivant  $\vec{n}_1$ .

### ► Aspect géométrique

Sur un des solides est définie une droite, sur le second est défini un plan, et la droite reste à chaque instant dans le plan.

### À propos des liaisons à axe

Chacune de ces quatre liaisons est dite **liaison à axe** car la forme des éléments de réduction du torseur cinématique est la même en tout point de l'axe de la liaison.

En conséquence, le symbole cinématique se positionne obligatoirement sur l'axe. Par contre la position du symbole sur cet axe reste libre.

### Les liaisons à centre

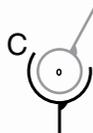
#### Sphérique

Le nom **sphérique** dérive du mot sphère, dont le centre matérialise le point immobile dans le mouvement relatif des deux solides. Cette liaison comporte trois degrés de liberté en rotation.

### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation est quelconque, le vecteur vitesse du centre est à chaque instant nul.

**Exemple :** Sphérique de centre  $C$ .



$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \vec{\Omega}(i/k) \\ \vec{0} \end{cases}_C$$

La forme donnée du torseur cinématique n'est valable à chaque instant qu'au centre  $C$ .

### ► Aspect géométrique

Sur chaque solide est défini un point, et ces deux points restent confondus au cours du temps.

#### Sphère-plan

Une liaison à nom explicite, car il suffit d'imaginer pour le nom **sphère-plan** une sphère en contact à chaque instant avec un plan. Cette liaison autorise cinq degrés de

Imaginer et construire les trois bases vectorielles : celle attachée à 1, celle attachée à 2 et la base locale  $(\vec{n}_1, \vec{u}_2, \vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2)$ .

liberté, les trois rotations et les deux translations dans le plan. Il est également possible de dire que la liaison sphère-plan empêche la seule translation suivant la normale au plan.

► **Aspect cinématique**

Le vecteur rotation est quelconque et le vecteur vitesse du centre de la sphère est orthogonal à la normale au plan.

**Exemple :** Sphère-plan de centre  $C_2$  et de normale  $\vec{n}_1$



Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(C,2/1) \end{cases}, \text{ avec } \vec{V}(C,2/1) \cdot \vec{n}_1 = 0$$

La forme donnée du torseur cinématique n'est valable à chaque instant qu'au centre  $C$ .

► **Aspect géométrique**

Sur un des solides est défini un point, sur l'autre un plan. À chaque instant, le point du premier solide reste sur le plan du second.

**Sphère-cylindre**

Une liaison à nom explicite, car il suffit d'imaginer pour le nom *sphère-cylindre* une sphère à chaque instant à l'intérieur d'un cylindre de révolution. Cette liaison autorise quatre degrés de liberté, les trois rotations et la translation suivant l'axe du cylindre de révolution.

► **Aspect cinématique**

Le vecteur rotation est quelconque et le vecteur vitesse du centre de la sphère n'a qu'une composante scalaire suivant l'axe de révolution.

**Exemple :** Sphère-cylindre de centre  $C_2$  et d'axe  $(C, \vec{u}_1)$



Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ V_{21}\vec{u}_1 \end{cases}$$

La forme donnée du torseur cinématique n'est valable à chaque instant qu'au point  $C$ .

► **Aspect géométrique**

Sur un des solides est défini un point, sur l'autre un axe. À chaque instant, le point du premier solide reste sur l'axe du second.

Le point dont on parle est le centre de la sphère et le plan cité est le plan de normale  $\vec{n}_1$  passant par ce centre.

### Sphérique-à-doigt

Cette liaison est la seule dont le nom n'est pas entièrement explicite. En effet la liaison *sphérique-à-doigt* est une liaison sphérique sur laquelle on ajoute :

- sur le premier solide une droite passant par le centre de la sphère ;
- sur le second un plan contenant le centre de la sphère.

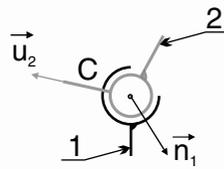
Cette liaison comporte deux degrés de liberté :

- la rotation autour de la droite ;
- la rotation suivant la normale au plan.

#### ► Aspect cinématique

Le vecteur rotation admet deux composantes scalaires dans une base locale et le vecteur vitesse du centre de la sphère est nul.

**Exemple :** Sphérique-à-doigt de centre  $C$ , d'axe  $(C, \vec{u}_2)$  et de normale  $\vec{n}_1$ .



Le symbole

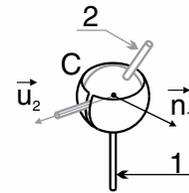


Image plus réaliste pour comprendre

Le torseur cinématique correspondant s'écrit simplement

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{C}{\begin{Bmatrix} \omega_u \vec{u}_2 + \omega_n \vec{n}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

La forme donnée du torseur cinématique n'est valable à chaque instant qu'au point  $C$ .

#### ► Aspect géométrique

Sur le premier solide est défini un point sur une droite, sur le second un point sur un plan. À chaque instant, les deux points restent confondus et la droite reste sur le plan.

#### À propos des liaisons à centre

Chacune de ces quatre liaisons est dite *liaison à centre* car la forme des éléments de réduction du torseur cinématique n'est valable à chaque instant que pour le point donné. En conséquence, le symbole cinématique se positionne obligatoirement au point caractéristique, sans aucune autre possibilité.

#### Compléments concernant toutes les liaisons

- Pour les liaisons glissière, pivot, pivot-glissant, hélicoïdale et sphérique, les symboles semblent faire référence à un contenu et un contenant. Au risque de se répéter, cette distinction est purement symbolique et sans rapport avec quelque réalisation technologique que ce soit. C'est pourquoi les solides n'ont pas été repérés sur les figures proposées. Les solides  $i$  et  $k$  sont pour ces liaisons indifféremment attachés aux traits noirs ou bleus, et le choix se fait lors de la réalisation d'un schéma cinématique en suivant des critères de lecture ou d'esthétique.
- Pour la liaison plane, le symbole est symétrique et les numéros s'échangent également sans souci.
- Une attention particulière doit être portée aux quatre dernières liaisons, pour lesquelles les caractéristiques géométriques ne sont pas les mêmes sur les deux solides :

## 4.2.4

### Liaison équivalente

Les liaisons usuelles sont des modèles dont les caractéristiques sont complètement déterminées, indépendamment de toute réalisation technologique. Il est donc possible de les combiner.

#### Définition

On appelle **liaison équivalente** une liaison que l'on pose entre deux solides et dont on détermine les caractéristiques par résolution de chaînes fermées.

On distingue :

– les liaisons en série, générant une chaîne ouverte de solides ;

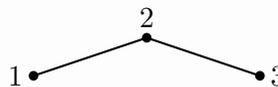


– les liaisons en parallèle, pour lesquelles on constate plusieurs arcs entre deux solides.



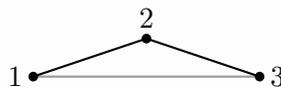
#### ► Liaison en série

Soit par exemple une chaîne ouverte de solides 1 – 2 – 3 dont les deux liaisons sont supposées connues.



$$\mathcal{V}(2/1) \text{ et } \mathcal{V}(3/2)$$

On pose la liaison équivalente recherchée entre 1 et 3, dont on détermine les six inconnues scalaires cinématiques par la résolution de la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 1.



$$\mathcal{V}(3/1) = \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1)$$

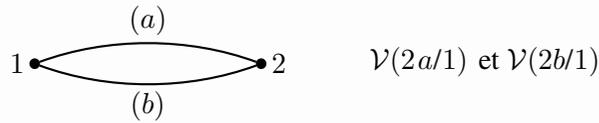
Cette liaison équivalente est ainsi connue, avec des caractéristiques exprimées en fonction des paramètres des liaisons 1 – 2 et 2 – 3.



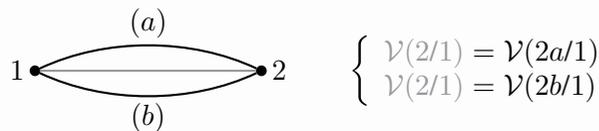
$$\mathcal{V}(3/1)$$

### ► Liaison en parallèle

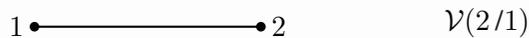
Soit par exemple deux solides 1 et 2 reliés par deux liaisons connues.



On pose la liaison équivalente recherchée entre 1 et 2, dont on détermine les six inconnues scalaires cinématiques par la résolution des deux chaînes fermées  $1 - 2a - 1$  et  $1 - 2b - 1$ .



C'est ainsi que l'on obtient la liaison équivalente entre les deux solides 1 et 2. Elle cumule les caractéristiques des deux liaisons précédentes



## 4.3 Les contacts

On s'intéresse maintenant aux contacts réels entre solides, avec l'objectif d'associer aux différentes situations rencontrées des modèles de comportement cinématique.

Pour toute cette section, il est supposé que le contact décrit est un contact observé à chaque instant. Des contacts temporaires, tels des butées de fin de course, limitent bien évidemment l'amplitude des mouvements, mais n'ont aucune influence sur leur nature.

### 4.3.1

### Géométrie du contact ponctuel

Deux objets en contact le sont au moins au niveau d'un point, ou au niveau d'une surface suffisamment petite pour l'assimiler à un seul point.

Soient deux ensembles indéformables en contact en un point  $P$ . On s'intéresse au plan tangent au niveau du contact que l'on caractérise par son vecteur normal.

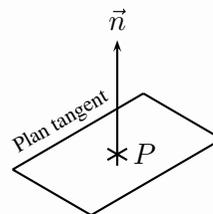


Figure 4.4 Un point de contact  $P$  et sa normale  $\vec{n}$ .

Comme l'on passe sans arrêt de l'espace affine à l'espace vectoriel associé, le terme « normal » ou « normale » est utilisé à la fois pour parler du vecteur seul et de la droite définie par le vecteur et le point de contact.

### 4.3.2

## Cinématique du contact ponctuel

Soient deux solides  $i$  et  $k$  en contact en un point  $P$  et soit  $\vec{n}$  le vecteur normal au contact.

Le torseur cinématique caractérisant les mouvements possibles  $i/k$  est

$$\mathcal{V}(i/k) = \begin{cases} \vec{\Omega}(i/k) \\ \vec{V}(P, i/k), \text{ avec } \vec{V}(P, i/k) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Comme cela a été vu au chapitre II en application du double produit vectoriel, on décompose le vecteur rotation suivant la normale et sur le plan tangent

$$\vec{\Omega}(i/k) = \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{\Omega}(i/k)}_{\text{pivotement}} \vec{n} + \underbrace{\vec{n} \wedge (\vec{\Omega}(i/k) \wedge \vec{n})}_{\text{roulement}} \quad (2)$$

La composante normale du vecteur rotation est appelée **pivotement** et la composante tangentielle **roulement**.

De même, on décompose le vecteur vitesse du point de contact suivant la normale et sur le plan tangent

$$\vec{V}(P, i/k) = \underbrace{\vec{V}(P, i/k) \cdot \vec{n}}_{\text{pénétration}} \vec{n} + \underbrace{\vec{n} \wedge (\vec{V}(P, i/k) \wedge \vec{n})}_{\text{glissement}} \quad (3)$$

Le contact ponctuel est caractérisé par une vitesse de pénétration nulle et la composante dans le plan tangent est appelé **vitesse de glissement**.

Un contact ponctuel induit un torseur cinématique de la même forme que celui de la liaison sphère-plan. Ce n'est pas pour autant qu'il faille confondre réel et modèle!

### 4.3.3

## Matérialiser les liaisons

Un point de contact enlève un degré de liberté seulement quand il n'a pas encore été supprimé par un autre point...

Un premier exercice pour s'habituer à la manipulation des points de contact et de leur normale est de chercher à matérialiser les liaisons usuelles.

Le tableau de la figure (4.5) propose une solution pour quatre liaisons usuelles, en donnant le nombre minimum de points nécessaires et la propriété que doit vérifier les normales géométriques.

Liaison	Nb.	Propriété	Rque
sphère-plan	1		
sphère-cylindre	2	sécantes	(1)
sphérique	3	concourantes	(2)
plane	3	parallèles	(3)

Figure 4.5 Matérialisation de quelques liaisons.

Concernant les remarques :

- (1) ... et non confondues ;
- (2) ... et non coplanaires ;
- (3) ... et non coplanaires.

### 4.3.4

## Modéliser les contacts

L'art de la modélisation des contacts s'appuie sur leurs descriptions et requiert les réponses à deux questions :

- quelle est la nature géométrique de la famille de points de contact ?
- quelles sont les propriétés géométriques des normales aux contacts ?

Il est en général assez facile de répondre à la première question, un peu plus délicat de répondre à la seconde. La suite de la section propose du vocabulaire et décrit un certain nombre de configurations courantes, mais sans chercher à être exhaustif.

#### a) Une ligne de contact

Deux configurations particulières sont à citer :

- un contact **linéaire rectiligne**, défini par exemple pour un cylindre de révolution sur un plan. Le contact a lieu suivant un segment de droite avec toutes les normales identiques.
- un contact **linéaire annulaire**, défini par exemple pour une sphère à l'intérieur d'un cylindre de révolution. La ligne de contact est un cercle avec toutes les normales coplanaires et concourantes.

#### b) Une surface de contact

Deux surfaces génériques sont à connaître :

- les surfaces cylindriques, générées par la translation d'une droite ;
- les surfaces de révolution, générées par la rotation d'une courbe quelconque.

Le premier cas conduit à un modèle de liaison glissière, le second à un modèle de liaison pivot. Le cumul des deux propriétés, à savoir une surface de révolution, conduit à un modèle de liaison pivot-glissant.

Dans le langage courant, le mot cylindre est trop souvent pris comme abréviation de cylindre de révolution, ce qui est gênant pour le technologue !

## 4.3.5 Contacts particuliers

### a) Roulement sans glissement

Phénomène cinématique que l'on rencontre au contact entre une roue et le sol, et par extension au contact entre un élément roulant sur un autre.

#### Définition

On appelle **roulement sans glissement** le phénomène au point de contact  $I$  entre deux solides 1 et 2 en mouvement relatif caractérisé par une vitesse de glissement nulle.

$$\vec{V}(I, 2/1) = \vec{0}$$

#### Exemple

La figure (4.6) propose le roulement sans glissement d'une roue 2 de rayon  $R$  sur le sol 1.

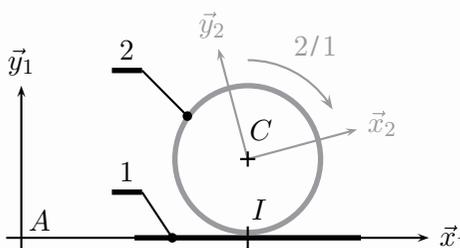


Figure 4.6 Une roue au contact du sol.



Nommer le point de contact et identifier le mouvement concerné donnent la clé !

Le frottement est défini au chapitre V.

On constate le roulement sans glissement en  $I$  de la roue 2 sur le sol 1. Cette proposition se traduit par  $\vec{V}(I, 2/1) = \vec{0}$  et en supposant la roue 2 évoluant dans le plan  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ , le torseur cinématique du mouvement possible 2/1 est alors caractérisé par

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

**b) Contact par éléments roulants**

Roulements à billes, à rouleaux ou à aiguilles sont des composants technologiques fréquemment utilisés pour substituer du frottement de roulement au frottement de glissement entre deux pièces en mouvement relatif. La cinématique d'un tel assemblage est complexe, comme l'exprime le graphe de structure de la figure (4.7).

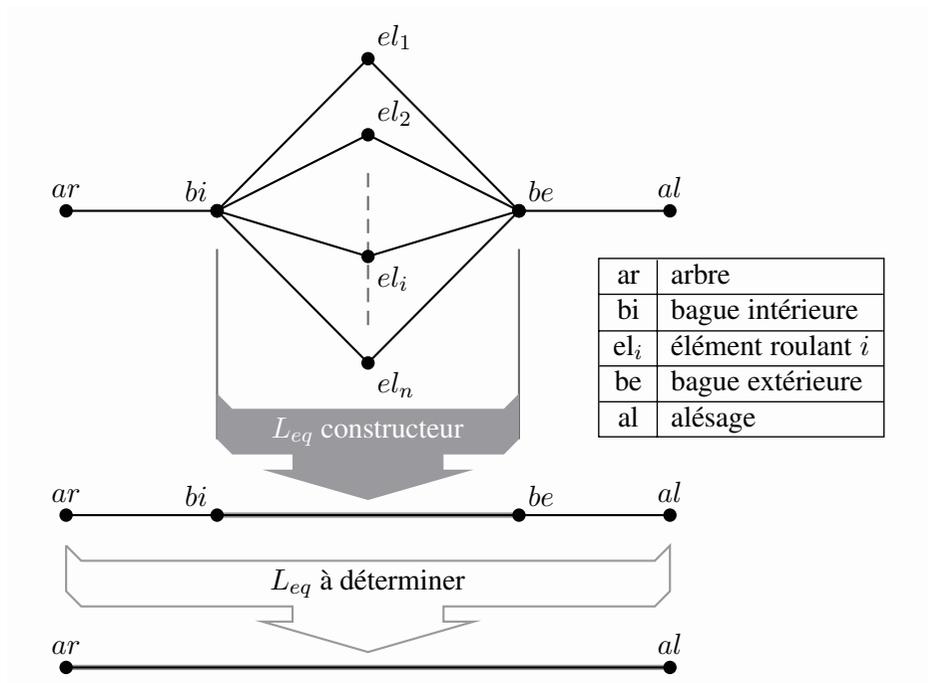
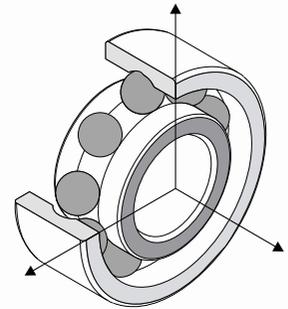


Figure 4.7 Graphe de structure pour un roulement.

Les modèles de comportement à adopter entre la bague intérieure et la bague extérieure sont proposés par le fabricant du composant. Le technologue complète ce modèle avec les informations issues du montage du composant.

**c) Came**

**Définition**

Une **came** est une pièce qui n'est pas de révolution, mais que l'on fait tourner autour d'un axe, en général pour définir une loi cinématique particulière pour la pièce entraînée.

Il n'y a pas de modèle global pour une came, les contacts sont à analyser au cas par cas.



Sur un sujet, le modèle à adopter est généralement proposé.

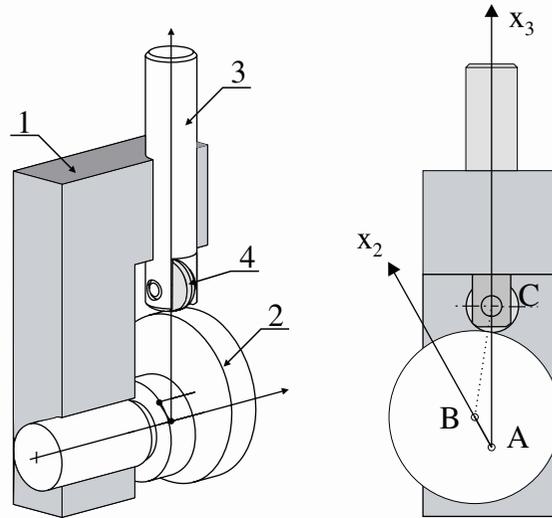


Figure 4.8 Exemple de mécanisme à came.

## 4.4 Transmissions particulières

### 4.4.1 Roues de friction

On appelle *roues de friction* un mécanisme de transmission de puissance pour lequel deux roues lisses roulent sans glisser l'une sur l'autre. La figure (4.9) propose le schéma cinématique d'un tel mécanisme.

Ce mécanisme comporte trois ensembles :

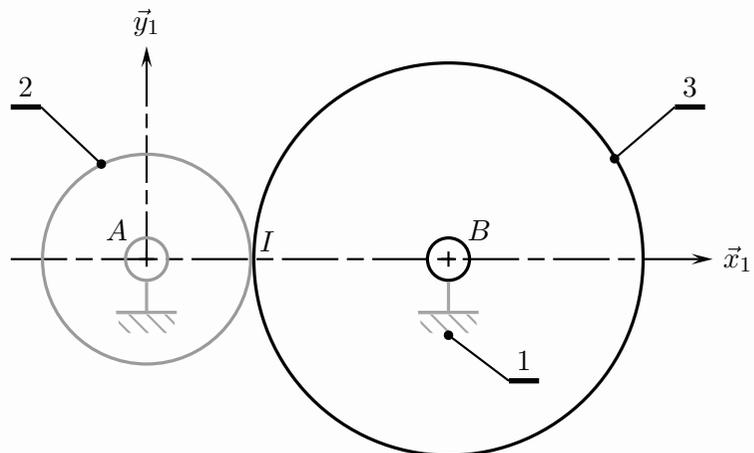
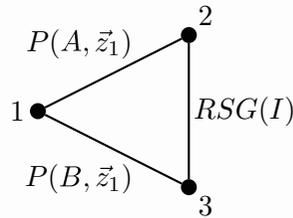


Figure 4.9 Roues de friction.

- un bâti repéré 1, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On pose  $\overrightarrow{AB} = e\vec{x}_1$ .
  - une roue lisse motrice 2, de rayon  $R_2$ , en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti ;
  - une roue lisse réceptrice 3, de rayon  $R_3$ , en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti.
- Les deux roues sont en contact au point  $I$  et roulent sans glisser l'une sur l'autre.

Le graphe des liaisons comporte une chaîne fermée de trois solides.



$P(dte)$	pivot d'axe ( <i>dte</i> )
$RSG(pt)$	roulement sans glissement au point ( <i>pt</i> )

Le souci principal concerne le décompte des inconnues cinématiques, qui dépend de la nature du contact. C'est pourquoi on se propose de trouver la loi  $\omega_{31} = f(\omega_{21})$ .



Les torseurs cinématiques des deux liaisons pivots s'écrivent simplement

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/1) = B \begin{Bmatrix} \omega_{31} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On exprime le roulement sans glissement au point  $I$  pour le mouvement 3/2 par  $\vec{V}(I,3/2) = \vec{0}$ . La composition des vecteurs vitesses sur la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 1 donne

$$\vec{V}(I,3/2) = \vec{V}(I,3/1) - \vec{V}(I,2/1)$$

On s'intéresse alors à chacun des deux mouvements introduits :

– concernant le mouvement 2/1, par la formule de changement de points

$$\vec{V}(I,2/1) = \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \vec{AI}$$

– de même pour le mouvement 3/1

$$\vec{V}(I,3/1) = \omega_{31} \vec{z}_1 \wedge \vec{BI}$$

Les vecteurs  $\vec{AI}$  et  $\vec{BI}$  s'expriment à chaque instant par  $\vec{AI} = R_2 \vec{x}_1$  et  $\vec{BI} = -R_3 \vec{x}_1$ . On obtient alors, tout calcul fait

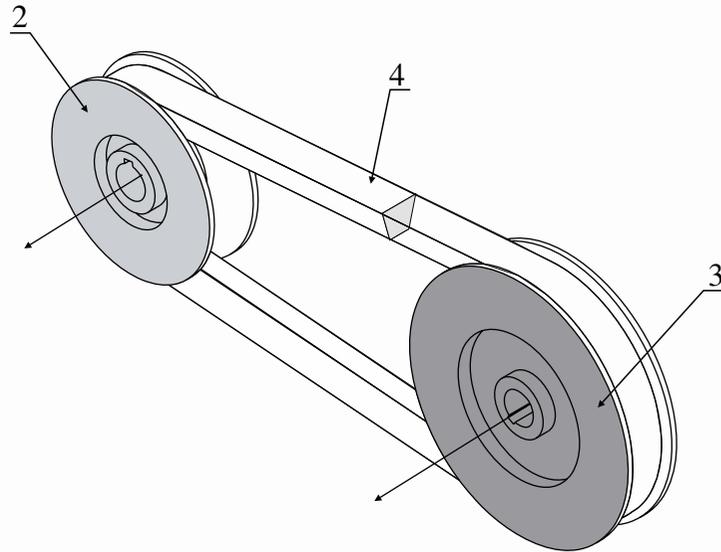
$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{R_2}{R_3}$$

C'est ainsi que l'on a calculé le rapport de transmission sans avoir eu à s'intéresser aux mouvements possibles entre les deux roues.

## 4.4.2

### Transmission par courroie

Un transmission par courroie est un mécanisme comportant deux ou plusieurs poulies sur lesquelles s'enroule une courroie de différents formes possibles. La figure (4.10) propose une image de deux poulies à gorge à section trapézoïdale.



**Figure 4.10** Exemple de transmission par courroie trapézoïdale.

Ce mécanisme comporte trois ensembles :

- un bâti, non représenté sur la figure ;
- une poulie motrice 2, de diamètre  $\varnothing_2$ , en liaison pivot avec le bâti ;
- une poulie réceptrice 3, de diamètre  $\varnothing_3$ , en liaison pivot avec le bâti. Les deux poulies sont reliées par une courroie repérée 4.

On suppose la courroie inextensible, infiniment flexible et s'enroulant sans glisser sur les poulies.

#### ► Loi entrée-sortie en cinématique

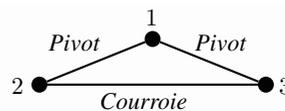
Le décompte des inconnues cinématiques pour le contact par courroie pose souci. C'est pourquoi on propose un théorème permettant de calculer directement le rapport de transmission.

#### TRANSMISSION PAR COURROIE



#### Théorème

Soit un mécanisme dont la structure est une chaîne fermée de trois solides comportant deux pivots et une transmission de mouvements par courroie.



Alors les axes de rotation des poulies sont immobiles dans le référentiel attaché au solide 1 et le rapport de transmission est donné par la formule

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \pm \frac{\varnothing_2}{\varnothing_3}$$

Le signe se détermine et se pose au cas par cas de manière élémentaire

Il est indispensable d'identifier et de nommer les mouvements et de ne pas se contenter d'une expression du style  $\frac{\omega_s}{\omega_e}$ .

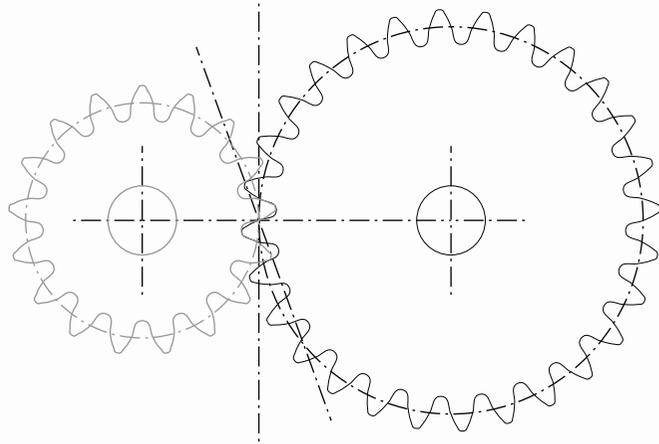
## 4.4.3

## Transmission par engrenage

Les transmissions de puissance par roues de friction et par courroie sont des solutions simples, mais pour lesquelles il est difficile d'empêcher le glissement au niveau du contact lorsque la puissance transmise augmente.

**Définition**

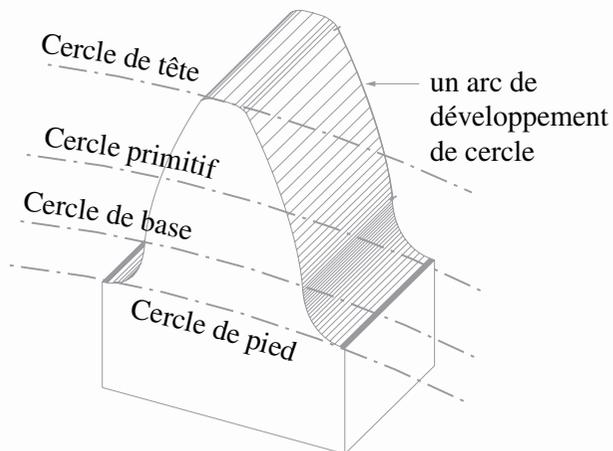
Un **engrenage** est l'association de deux roues dentées qui engrènent l'une avec l'autre.



**Figure 4.11** Un engrenage et ses deux pignons.

► **Profil des dents**

La figure (4.12) illustre le profil en développante de cercle des dents.



**Figure 4.12** Les cercles remarquables sur un pignon.

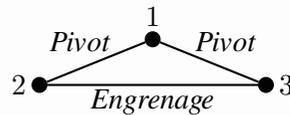
- le cercle de base est le cercle d'où sont issues les développantes de cercle ;
- le cercle de tête correspond au diamètre maximum du pignon ;
- le cercle de pied correspond au diamètre mesuré au fond des dentures ;
- enfin le cercle primitif qui n'existe qu'en fonctionnement et qui correspond au diamètre du cylindre de révolution qui roule sans glisser sur le cylindre primitif de l'autre pignon.

### ► Loi entrée-sortie en cinématique

Imaginer et modéliser les mouvements possibles au niveau du contact des dentures est difficile. Comme les dents sont taillées pour qu'il y ait roulement sans glissement des deux cylindres de révolution primitifs, on pose un théorème permettant de déterminer directement le rapport de transmission.

#### Théorème

Soit un mécanisme dont la structure est une chaîne fermée de trois solides comportant deux pivots et un contact par engrenage.



Alors les axes de rotation des pignons sont immobiles dans le référentiel attaché au solide 1 et le rapport de transmission est donné par la formule

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \pm \frac{Z_2}{Z_3}$$

Le signe se détermine et se pose au cas par cas de manière élémentaire

#### Exemple

On considère un réducteur à renvoi d'angle schématisé sur la figure (4.13). Il est composé de trois ensembles :

- un bâti, repéré 1, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un arbre moteur, repéré 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti. Sur cet arbre est taillé un pignon conique de  $Z_2$  dents ;
- un arbre récepteur, repéré 3, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  avec le bâti. Sur cet arbre est monté un pignon conique de  $Z_3$  dents qui engrènent avec le pignon 2.

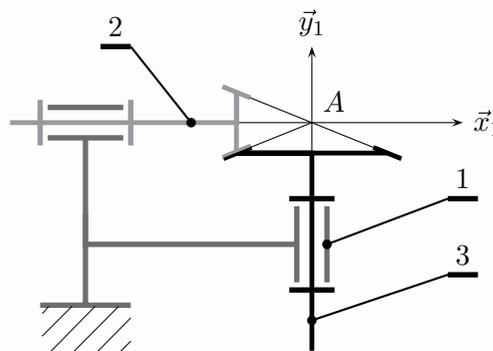


Figure 4.13 Réducteur à renvoi d'angle.

Les axes de rotation des pignons sont fixes dans le référentiel 1 et on a alors

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{Z_2}{Z_3}$$

Le signe négatif est posé en imaginant une rotation 2/1 positive et en constatant une rotation 3/1 induite négative.

Il est indispensable d'identifier et de nommer les mouvements et de ne pas se contenter d'une expression du style  $\frac{\omega_s}{\omega_e}$ .

On note  $Z_i$  le nombre de dents du pignon  $i$ .

La figure (4.14) montre une configuration pour laquelle le signe est positif et on a dans ce cas

$$\frac{\omega_{64}}{\omega_{54}} = + \frac{Z_5}{Z_6}$$

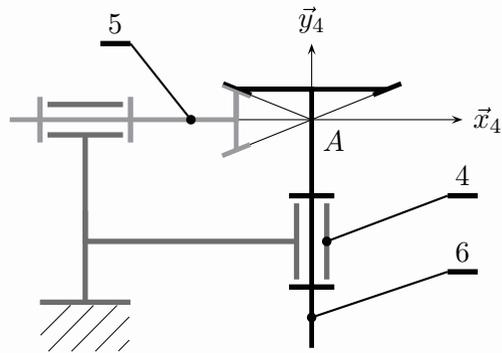


Figure 4.14 Réducteur à renvoi d'angle.

## Synthèse

### Connaissances

Je sais définir les mots ou expressions :

- chaîne de solides ;
- chaîne ouverte, chaîne fermée, chaîne complexe ;
- liaison, contact ;
- graphe de structure, graphe des contacts, graphe des liaisons ;
- degré de liberté ;
- liaison équivalente ;

- pivotement, roulement, glissement ;
- roulement sans glissement ;
- engrenage.

Je connais :

- les dix liaisons usuelles ;
- le théorème pour les transmissions par engrenage ;
- le théorème pour les transmissions par courroie.

### Savoir-faire

Je sais

- caractériser une liaison usuelle par son nom, ses représentations 2D et 3D, ses degrés de liberté, ses propriétés géométriques et son torseur cinématique ;
- déterminer une liaison équivalente ;
- proposer des contacts simples pour illustrer les liaisons usuelles ;
- dénombrer les inconnues cinématiques d'un problème ;
- rechercher une équation scalaire évitant une inconnue cinématique donnée.

## Exercices d'application

### 4.1 Questions de cours

1. Classer la dizaine de liaisons usuelles dans le tableau suivant

Liaison à centre	Liaison à axe	Liaison à direction

2. Lister les dix liaisons dans l'ordre du nombre de degrés de liberté croissant.

3. Citer les liaisons autorisant 2 rotations, au moins 2 rotations.

4. Citer les liaisons autorisant 1 translation, au moins 1 translation.

5. Associer si possible un nom de liaison à chacun des torseurs cinématiques donnés, sachant que la forme proposée est valable à chaque instant.

a)  $\mathcal{V}(2/1) = A \begin{Bmatrix} \omega \vec{u}_1 \\ V \vec{u}_1 \end{Bmatrix}$       b)  $\mathcal{V}(2/1) = B \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} (2/1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

c)  $\mathcal{V}(2/1) = C \begin{Bmatrix} \omega \vec{x}_1 \\ V \vec{y}_1 \end{Bmatrix}$       d)  $\mathcal{V}(2/1) = D \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} (2/1) \\ V \vec{u}_1 \end{Bmatrix}$

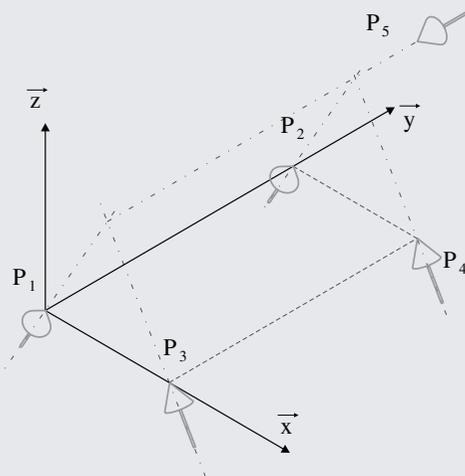
e)  $\mathcal{V}(2/1) = E \begin{Bmatrix} \omega \vec{x}_1 \\ V_y \vec{y}_1 + V_z \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$

f)  $\mathcal{V}(2/1) = F \begin{Bmatrix} \omega \vec{z}_1 \\ p \omega \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$       g)  $\mathcal{V}(2/1) = G \begin{Bmatrix} \omega \vec{x}_1 \\ a \omega \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$

h)  $\mathcal{V}(2/1) = H \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V \vec{u}_1 \end{Bmatrix}$

### 4.2 Identifications de liaisons

On considère deux ensembles indéformables en contact. La figure ci-dessous positionne cinq points de contact envisagés et leur normale dessinée par une flèche.



Cinq points de contact et leur normale.

En fonction de la géométrie constatée et lorsque c'est possible, proposer les noms des liaisons usuelles que matérialisent les points de contact considérés. On suppose ces contacts conservés dans le temps.

Points de contact	Liaison usuelle
$\{P_1, P_3\}$	
$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$	
$\{P_2, P_3\}$	
$\{P_3, P_4\}$	
$\{P_1, P_2, P_5\}$	
$\{P_1, P_3, P_5\}$	
$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$	

### 4.3 Table élévatrice

On s'intéresse à une table élévatrice telle que présentée sur la figure ci-dessous. Son architecture s'appuie sur un quadrilatère déformable. Elle comprend :

- un bâti noté 1 auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on pose  $\vec{OC} = L_1 \vec{x}_1$  ;
- un bras motorisé 2, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en prenant soin de confondre les vecteurs  $\vec{z}_2$  et  $\vec{z}_1$  et on pose d'une part  $\alpha_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , d'autre part  $\vec{OA} = R_2 \vec{x}_2$  ;
- une plateforme 3 sur laquelle est posée la charge. Cette plateforme est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec le bras motorisé 1. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  en prenant soin de confondre les vecteurs  $\vec{z}_3$  et  $\vec{z}_2$  et on pose d'une part  $\alpha_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ , d'autre part  $\vec{AB} = L_3 \vec{x}_3$  ;
- une jambe 4 de longueur  $R_4$ , en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_1)$  avec le bâti et en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_3)$  avec la plateforme 3.

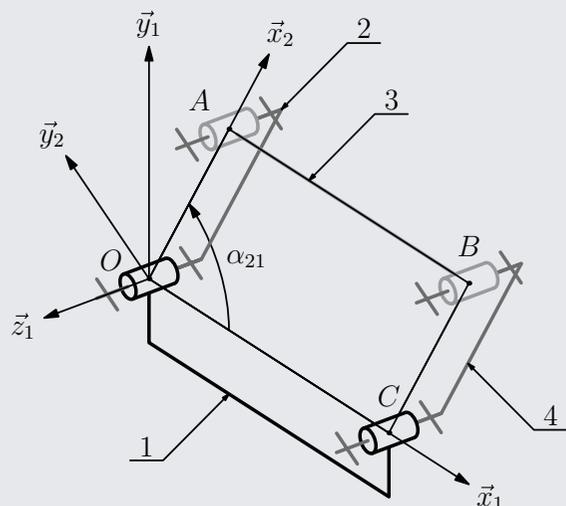


Schéma cinématique d'une table élévatrice.

L'objectif de cette étude est de caractériser le mouvement de la table 3 par rapport au bâti 1 dans le cas particulier où le quadrilatère ( $OABC$ ) est un parallélogramme.

1. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme et dénombrer les inconnues cinématiques.
2. Poser les torseurs cinématiques et tracer les figures de définition des deux angles définis.
3. Déterminer la relation  $f(\dot{\alpha}_{32}, \alpha_{32}, \dot{\alpha}_{21}, \alpha_{21}) = 0$ .
4. Intégrer cette relation, puis dans le cas particulier où  $L_3 = L_1 = L$ ,  $R_4 = R_2 = R$  et  $L \neq R$ , détailler les mouvements possibles.
5. Caractériser le mouvement de la table 3 par rapport au bâti 1 lorsque  $\alpha_{32} = -\alpha_{21}$ .

#### 4.4 Bielle-manivelle

Les mécanismes de transformation de mouvements basés sur une architecture bielle-manivelle sont très nombreux. La figure ci-dessous propose un schéma cinématique de son principe de fonctionnement.

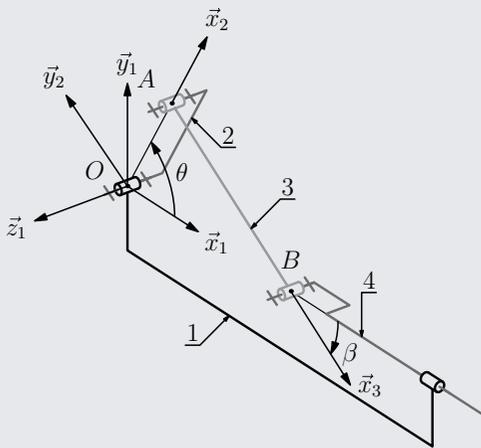


Schéma cinématique d'un système bielle-manivelle.

Ce mécanisme est composé de quatre ensembles :

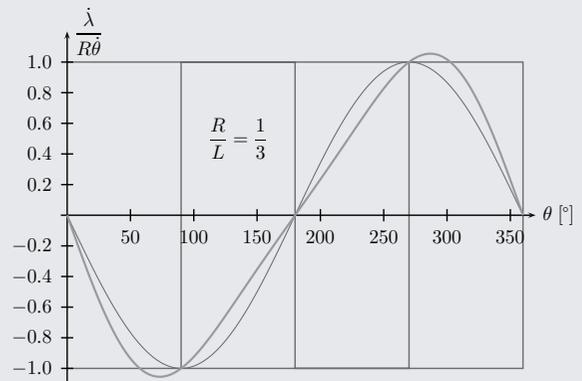
- un bâti repéré 1, auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- une manivelle, repérée 2, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le bâti. On lui associe un repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ , et on pose d'une part  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , d'autre part  $\vec{OA} = R\vec{x}_2$  ;
- un piston, repéré 4, en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x}_1)$  avec le bâti. On pose  $\vec{OB} = \lambda\vec{x}_1$  ;
- une bielle repérée 3, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec la manivelle, et en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_3)$  avec le piston 4. On pose  $\vec{AB} = L\vec{x}_3$ .

L'objectif de cette étude est de trouver la loi  $\dot{\lambda} = f(\dot{\theta})$ .



1. Tracer le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.
2. Tracer un schéma cinématique de ce mécanisme dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ .
3. Détailler la forme des torseurs cinématiques.
4. Proposer une équation scalaire qui évite les trois inconnues cinématiques que l'on ne souhaite pas voir dans la loi entrée-sortie, et détailler cette équation sous la forme  $f(\dot{\lambda}, \lambda, \dot{\theta}, \theta) = 0$ .
5. L'équation précédente peut-elle être également trouvée par l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses (3/1) ?
6. Intégrer l'équation différentielle obtenue par l'une des deux dernières questions.

7. La figure ci-dessous propose le tracé de la fonction  $\frac{\dot{\lambda}}{R\dot{\theta}}$ , superposé au tracé de la fonction  $-\sin \theta$ . Interpréter les points remarquables de cette courbe et les mettre en corrélation avec les configurations géométriques correspondantes.



Vitesse du piston  $\dot{\lambda}$  pour un tour de manivelle.

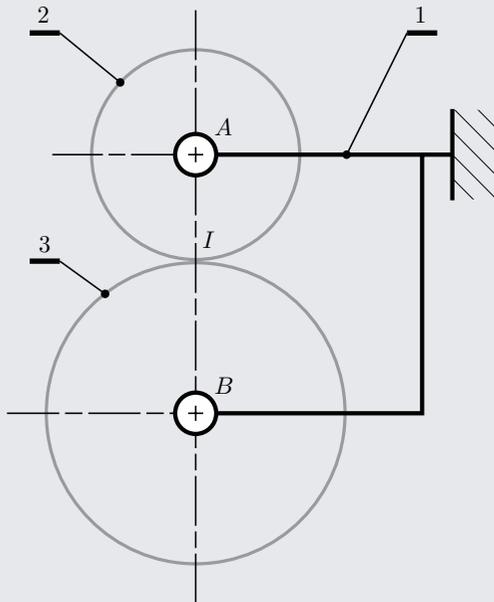
#### 4.5 Engrenage

Étant donnés trois solides 1, 2 et 3, on définit le mécanisme engrenage à partir de l'épure plane ci-dessous, sur laquelle deux cercles respectivement de rayon  $R_2$  et  $R_3$  et de centres  $A$  et  $B$  sont tangents au point  $I$ .

On suppose que le contact en  $I$  est tel que le roulement s'y effectue sans glissement.

1. Compléter la description du mécanisme et le paramétrer complètement.
2. Tracer le graphe de liaison.
3. Exprimer le non-glissement au point  $I$ .

4. Trouver la relation entre les paramètres cinématiques des deux liaisons pivot.



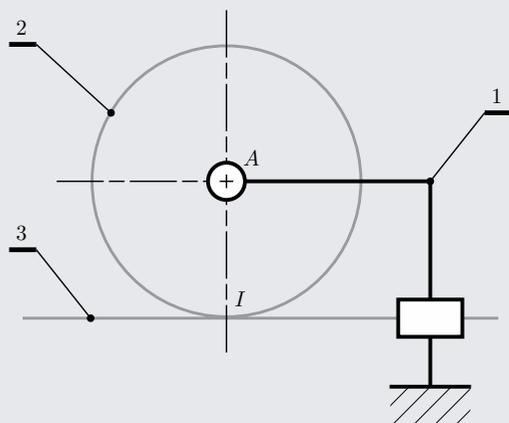
Épure plane d'un mécanisme engrenage

#### 4.6 Pignon-crémaillère

Étant donnés trois solides 1, 2 et 3, on définit le mécanisme pignon-crémaillère à partir de l'épure plane ci-dessous, sur laquelle un cercle de centre  $A$  et de rayon  $R_2$  est tangent à une droite au point  $I$ .

On suppose que le contact en  $I$  est tel que le roulement s'y effectue sans glissement.

1. Compléter la description du mécanisme et le paramétrer complètement.
2. Tracer le graphe de liaison.
3. Exprimer le non-glissement au point  $I$ .
4. Trouver la relation entre les paramètres cinématiques des liaisons pivot et glissière.



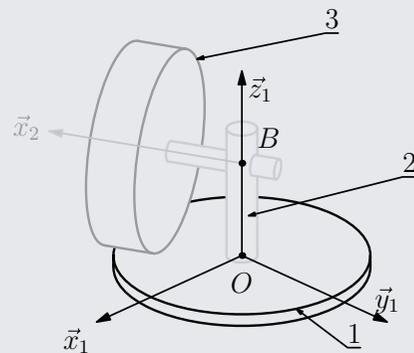
Épure d'un mécanisme pignon-crémaillère

#### 4.7 Meule à grains

Nos ancêtres utilisaient pour mouder le grain des meules en pierre entraînées en rotation par des animaux. La figure ci-après présente un tel dispositif.

On décrit le mécanisme par trois ensembles :

- le sol, plan horizontal repéré 1, auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , avec  $\vec{z}_1$  orientant la verticale ascendante et  $O$  un point du plan ;
- un chariot 2, en liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le sol. On choisit un point  $B$  tel que  $\vec{OB} = z \vec{z}_1$  et on associe au chariot un repère  $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , en prenant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ . On pose  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ .
- la meule en pierre repérée 3, en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_2)$  avec le chariot 2. Cette meule est cylindrique de révolution, de rayon  $R$  et en contact avec le sol suivant un segment  $[J, K]$  dont un point courant  $I$  est paramétré par  $\vec{OI} = \lambda \vec{x}_2$ . On associe à la meule un repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , en prenant  $\vec{x}_3 = \vec{x}_2$ . On pose  $\beta = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ .



Meule à grain : schéma de principe.

L'objectif de cette étude est de caractériser le comportement cinématique au niveau du segment de contact entre la meule et le sol.

1. Tracer un graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.
2. Proposer un schéma cinématique
3. Par composition des mouvements sur la chaîne ouverte 1 – 2 – 3, déterminer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}(I, 3/1)$ .
4. Le vecteur vitesse  $\vec{V}(I, 3/1)$  trouvé à la question précédente est-il compatible avec le contact meule-sol ?
5. Le roulement sans glissement au point  $I$  dans le mouvement de la meule par rapport au sol est-il possible ?
6. Si on généralise ce résultat au contact d'une roue de véhicule avec le sol, que peut-on déduire de cette étude ?

## Exercices d'approfondissement

### 4.8 Mécanisme à excentrique

On considère le mécanisme à excentrique schématisé ci-dessous, que l'on étudie en mouvement plan. Il comprend trois solides :

- un bâti 1, auquel est associé un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un excentrique 2, en liaison pivot d'axe la droite  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti. On lui associe une base  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ , puis on pose  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  et  $\vec{AC} = e \vec{x}_2$ .

Cet excentrique comporte dans le plan  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$  un cercle de centre  $C$  et de rayon  $R$  ;

- un piston 3, en liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  avec le bâti 1. La rotation possible n'est pas exploitée dans cet exercice et on lui associe alors une base 3 confondue avec la base 1.

Ce piston comporte une droite  $(B, \vec{x}_3)$  en contact avec l'excentrique en un point  $I$ .

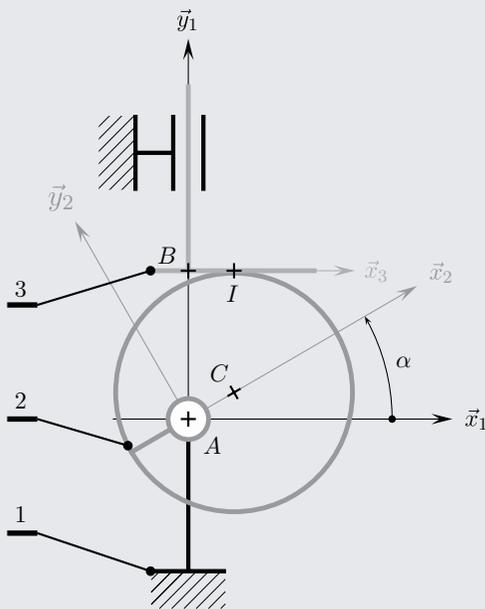


Schéma cinématique du mécanisme à excentrique

1. Tracer le graphe de structure, et dénombrer les mouvements de solides possibles.
2. Caractériser graphiquement les vecteurs vitesse  $\vec{V}(I, 3/1)$ ,  $\vec{V}(I, 2/1)$  et  $\vec{V}(I, 2/3)$ .
3. Préciser les trajectoires des points  $I$  dans chacun des mouvements énoncés, à savoir 3/1, 2/1 et 2/3.

On s'intéresse maintenant au point géométrique  $I$  qui suit le contact au cours du temps.

4. Déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}(I/1)$ .

### 4.9 Différentiel linéaire

On considère le mécanisme à cinq solides schématisé ci-dessous. Il comprend :

- un bâti 1, auquel est associé une base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un arbre 2, en liaison glissière de direction  $\vec{x}_1$  avec le bâti. La base 2 est choisie confondue avec la base 1 ;
- un pignon 3, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec l'arbre 2. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$  et on note  $\alpha$  l'angle  $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$  ;
- deux crémaillères repérées 4 et 5, en liaisons glissière de direction  $\vec{x}_1$  avec le bâti 1. Elles engrènent sur le pignon 3 respectivement en  $I$  et en  $K$ .

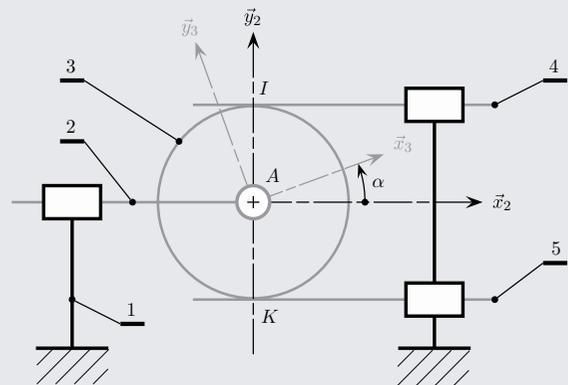


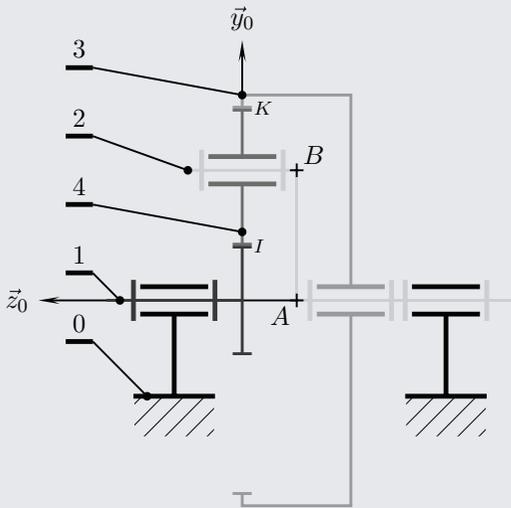
Schéma cinématique d'un différentiel linéaire

1. Tracer le graphe des liaisons.
2. Soient respectivement  $V_{41}$ ,  $V_{51}$  et  $V_{21}$  les vitesses scalaires des solides 4, 5 et 2 par rapport au bâti 1. Caractériser les torseurs cinématiques des liaisons.
3. Déterminer l'équation reliant les trois paramètres scalaires précédents.
4. À partir de cette équation, imaginer et retrouver les mouvements possibles dans les deux cas particuliers suivants :
  - on bloque l'arbre 2 par rapport au bâti 1 ;
  - on bloque la rotation du pignon 3 par rapport à l'arbre 2.

### 4.10 Train épicycloïdal

La figure ci-dessous propose le schéma cinématique d'un train épicycloïdal sous une forme très générale. Ce mécanisme comprend :

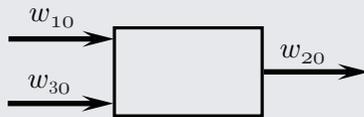
- un bâti 0 auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- un planétaire 1, muni d'un pignon de  $Z_1$  dents, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bâti ;
- un porte satellite 2, sur lequel on pose  $\vec{AB} = R \vec{y}_2$ . Il est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bâti ;
- une couronne 3 de  $Z_3$  dents, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bâti ;



Structure d'un train épicycloïdal.

– un ou plusieurs satellites 4 de  $Z_4$  dents, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec le porte-satellite 2. Le satellite représenté engrène avec le planétaire au point  $I$  et avec la couronne au point  $K$ .

Ce mécanisme comporte dans cette configuration trois entrées-sorties, et est utilisé en pilotant deux entrées, par exemple  $\omega_{10}$  et  $\omega_{30}$ .



- Tracer en vue de gauche, donc dans le plan  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  :
  - les cercles primitifs du planétaire et de la couronne ;
  - en filigrane le cercle primitif d'un satellite dans le cas particulier initial où  $\vec{y}_2 = \vec{y}_0$  ;
  - ce même cercle primitif en supposant d'une part que le planétaire a tourné par rapport au bâti dans le sens positif, d'autre part que la couronne reste immobile par rapport au bâti ;
  - les deux points de roulement sans glissement  $I$  et  $K$  et le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$  dans la nouvelle position.
- Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
- Justifier la contradiction apparente entre le texte de l'énoncé et le schéma cinématique donné concernant la liaison entre la couronne et le bâti.
- Dans quel référentiel tous les axes de rotation sont-ils fixes ?
- Déterminer la loi  $f(\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}) = 0$ , et détailler le rapport de transmission dans le cas usuel où la couronne est immobile par rapport au bâti.
- Pourquoi qualifie-t-on ce mécanisme d'épicycloïdal ?
- En exploitant la définition d'un entraxe, trouver une relation entre les nombres de dents  $Z_1$ ,  $Z_4$  et  $Z_3$ .

#### 4.11 Transmission par courroie

La figure ci-dessous propose une architecture combinant deux mouvements de rotation à partir d'un seul moteur.

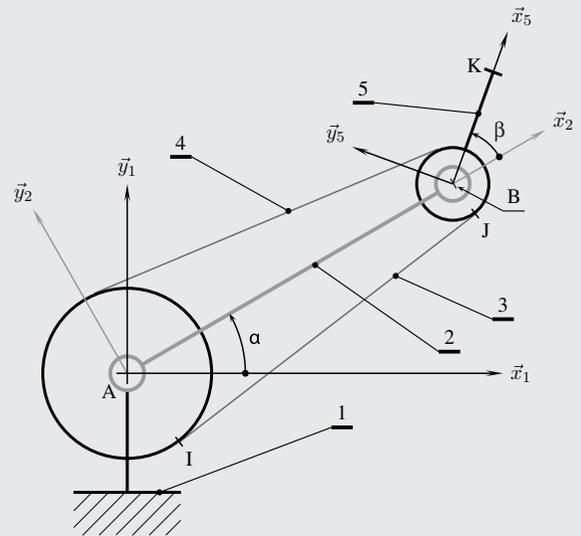


Schéma cinématique du bras manipulateur.

Ce mécanisme comprend trois ensembles :

- un bâti 1, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , et sur lequel est fixée une poulie d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  et de rayon  $R_1$  ;
- un bras 2 motorisé, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , ainsi que  $\vec{AB} = a\vec{x}_2$ .
- un poignet 5, en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_2)$  avec le bras 2. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  en choisissant  $\vec{z}_5 = \vec{z}_2$  et on pose  $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_5)$ , ainsi que  $\vec{BK} = b\vec{x}_5$ . Sur ce poignet est montée une poulie d'axe  $(B, \vec{z}_5)$  et de rayon  $R_5$ .
- une courroie inextensible et infiniment souple est tendue autour des deux poulies 1 et 5. Les deux brins sont repérés 3 et 4.

L'objectif de cet étude est de caractériser différents mouvements à partir de l'expression paramétrique de la trajectoire du point  $K$  dans le référentiel 1.

- Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
- Tracer les figures de définition des deux angles  $\alpha$  et  $\beta$ .
- Déterminer la relation  $\dot{\beta} = f(\dot{\alpha})$ .
- Écrire les expressions les plus simples des vecteurs vitesses  $\vec{V}(K, 5/2)$  et  $\vec{V}(K, 5/1)$ .
- En prenant comme condition initiale  $\beta = \beta_0$  pour  $\alpha = 0$ , donner l'expression paramétrique de la trajectoire du point  $K$  dans le référentiel 1 en fonction de l'angle  $\alpha$ .
- Déterminer la nature de cette trajectoire dans les cas particuliers suivants :

- $R_1 = R_5, b = 2a$  et  $\beta_0 = 0$  ;
- $R_1 = 2R_5, b = a$  et  $\beta_0 = 0$  ;
- $R_1 = 4R_5, b = \frac{a}{2}$  et  $\beta_0 = 180^\circ$ .

4.12 Réglage du roulis sur une fusée d'aéromodélisme

Le réglage du roulis sur une fusée d'aéromodélisme est obtenu par les rotations opposées de deux ailettes par rapport au corps de la fusée. Le mécanisme de réglage utilise un servomoteur. Sur l'arbre moteur de celui-ci est lié un plateau moteur 2 qui entraîne deux biellettes 4 liées chacune à un plateau récepteur. Les ailettes sont fixées sur ces derniers.

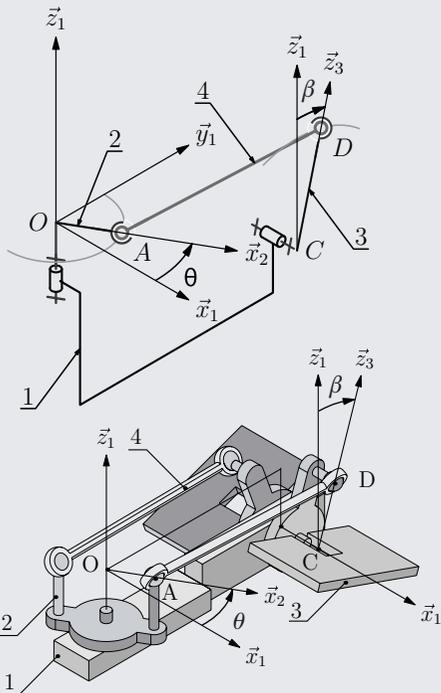


Schéma cinématique et vue d'ensemble du mécanisme.

On modélise un demi-mécanisme avec quatre solides :

- un support 1 auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- On pose  $\vec{OC} = a\vec{x}_1 + L\vec{y}_1 - b\vec{z}_1$  ;
- le plateau moteur 2, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le support 1 :
  - on associe un repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  à ce plateau et la rotation possible est paramétrée par l'angle  $\theta$  ;
  - on définit le point A par  $\vec{OA} = a\vec{x}_2$ .
- un plateau récepteur 3, en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_1)$  avec le support 1 :
  - on associe un repère  $(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  à ce plateau et la rotation possible est paramétrée par l'angle  $\beta$  ;
  - on définit le point D par  $\vec{CD} = b\vec{z}_3$ .
- une biellette 4 en liaison sphérique ce centre A avec le plateau moteur 2 et en liaison sphérique de centre D avec le plateau récepteur 3. On pose  $\vec{AD} = L\vec{u}_4$ .

L'objectif de ce problème est de trouver une relation entre  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\theta}$ .



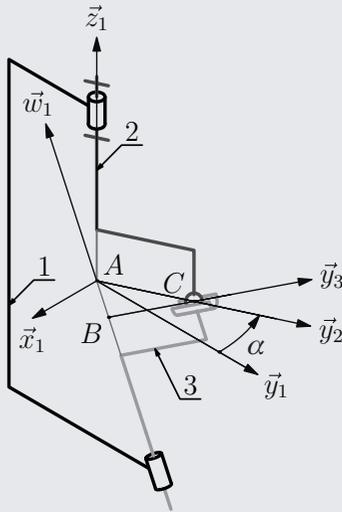
1. Réaliser le graphe de liaison du mécanisme et dénombrer les inconnues cinématiques.
2. Définir les torseurs cinématiques associés aux liaisons et tracer les figures de définition des angles  $\beta$  et  $\theta$ .
3. Trouver une équation scalaire qui évite les inconnues cinématiques des deux liaisons sphériques.
4. En déduire l'expression de  $\dot{\beta}$  en fonction de  $\dot{\theta}$ , a, b, L,  $\theta$  et  $\beta$ .
5. Simplifier cette expression lorsque les angles  $\theta$  et  $\beta$  restent petits devant 1.

4.13 Pompe de préparation

Le principe de fonctionnement de la pompe de préparation photographié est présenté sur le schéma ci-dessous. La rotation d'un arbre est transformée en translation rectiligne alternative d'un piston sans pièce intermédiaire.



- Au bâti 1 est associé le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On définit dans le plan  $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  la droite  $(A, \vec{w}_1)$  orientée par l'angle  $\theta = (\vec{z}_1, \vec{w}_1)$ .
- L'arbre moteur 2 est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti. Le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est attaché à 2 tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . Enfin, on définit sur cet arbre un point C et on pose  $\vec{AC} = r\vec{y}_2$ .
- Le piston 3 est lié au bâti 1 par une liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{w}_1)$ .



Le repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est attaché à 3 tel que  $\vec{z}_3 = \vec{w}_1$  et on pose  $\gamma = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$ .

La position du point  $B$  est repéré dans 1 par le vecteur  $\vec{AB} = \lambda \vec{w}_1$ .

Ce piston 3 est également lié à l'arbre 2 par une liaison sphère-cylindre de centre  $C$  et d'axe  $(B, \vec{y}_3)$ , et on pose  $\vec{BC} = \mu \vec{y}_3$ .

- Réaliser le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.
- Définir les torseurs cinématiques associés aux différentes liaisons.
- Réaliser les figures de définition des angles  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\theta$ .
- Écrire la fermeture cinématique de cette chaîne pour exprimer la relation  $\dot{\lambda} = f(\dot{\alpha}, \alpha, \theta, r)$ .
- Superposer sur un même schéma réalisé à l'échelle 2 : 1 dans le plan  $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  les positions particulières obtenues pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi$ .  
On donne  $r = 20 \text{ mm}$ ,  $\theta = 20^\circ$  et  $\tan(20) = 0,36$ .
- Quelle valeur pour la course du piston peut-on lire sur le schéma précédent ?  
Peut-on trouver ce résultat par le calcul ?

#### 1.44 The Falkirk Wheel

L'élévateur de Falkirk, en Écosse, permet de faire passer les bateaux d'un plan d'eau de niveau  $N_I$  à un canal de niveau  $N_S$  à l'aide d'un bras animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal selon le schéma de principe donné ci-dessous.

Le dénivelé est de 25 mètres et le mécanisme comprend :

- un bâti 1 auquel est associé le repère  $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ; il comporte une roue dentée de  $Z_1$  dents ;
- un bras motorisé 2 en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1 ; on lui associe le repère  $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , avec  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ , et on pose :

- l'angle  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ ,
- les longueurs  $\vec{CA} = a \vec{x}_2$  et  $\vec{CB} = b \vec{x}_2$  ;

- deux pignons identiques 3 et 5 de  $Z_3 = Z_5$  dents, en liaisons pivot respectivement d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  et d'axe  $(D, \vec{z}_2)$  avec le bras 2 ;
- deux roues identiques 4 et 6 de  $Z_4 = Z_6$  dents, en liaisons pivot respectivement d'axe  $(B, \vec{z}_2)$  et d'axe  $(E, \vec{z}_2)$  avec le bras 2 ;
- deux bacs  $b_4$  et  $b_6$  à considérer encastres respectivement sur les roues 4 et 6.

D'un point de vue géométrique, les roues 6 et 5 sont respectivement les symétriques des roues 4 et 3 par rapport à l'axe  $(C, \vec{y}_2)$ .

D'un point de vue cinématique, la principale caractéristique est l'égalité des nombres de dents  $Z_1$  du bâti et des roues extérieures  $Z_4$  et  $Z_6$ .

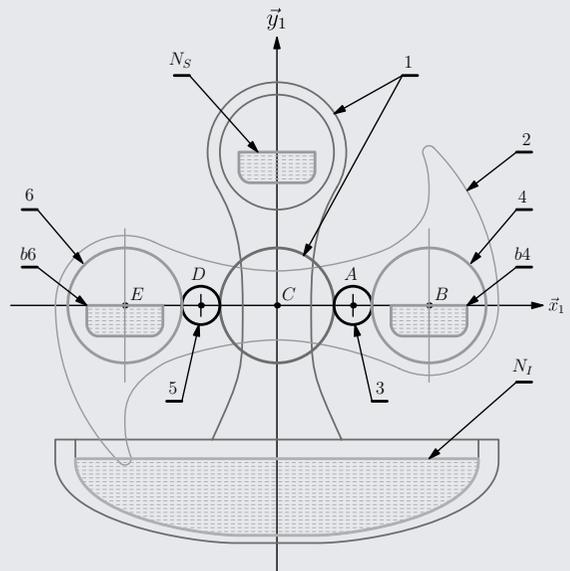


Schéma de principe de l'élévateur

- Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
- Montrer que les bacs  $b_4$  et  $b_6$  sont bien en mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 1.

#### 1.15 Chaîne fonctionnelle MAXPID

Le mécanisme étudié est la partie opérative d'un axe asservi pour le contrôle d'un angle.

Le mécanisme est composé de cinq ensembles :

- un bâti 1, auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , le vecteur  $\vec{y}_1$  orientant la verticale ascendante. On pose  $\vec{OA} = a \vec{x}_1$  et  $\vec{OB} = b \vec{y}_1$ .
- un bras 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  et  $\vec{AC} = c \vec{x}_2$ . L'angle  $\theta$

est la grandeur asservie et on constate deux directions privilégiées du bras par rapport au bâti :

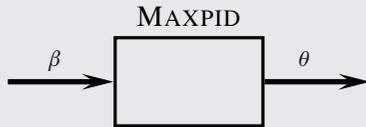
- la direction définie pour  $\theta = 0^\circ$  et nommée horizontale ;
- la direction orthogonale définie pour  $\theta = 90^\circ$ , et donc nommée verticale.

– une noix 4, en liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{z}_2)$  avec le bras 2.

– un moteur électrique, dont le carter 5 est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  en choisissant  $\vec{z}_5 = \vec{z}_1$  et on pose  $\gamma = (\vec{x}_1, \vec{x}_5)$ .

– une vis 3, solidaire de l'arbre du moteur. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  en choisissant  $\vec{x}_3$  suivant l'axe de rotation du moteur électrique confondu avec  $\vec{x}_5$ . Cette vis est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_3)$  avec le carter 5 et on pose  $\beta = (\vec{y}_5, \vec{y}_3)$ . Elle est également en liaison hélicoïdale de pas  $p$  et d'axe  $(C, \vec{x}_3)$  avec la noix 4.

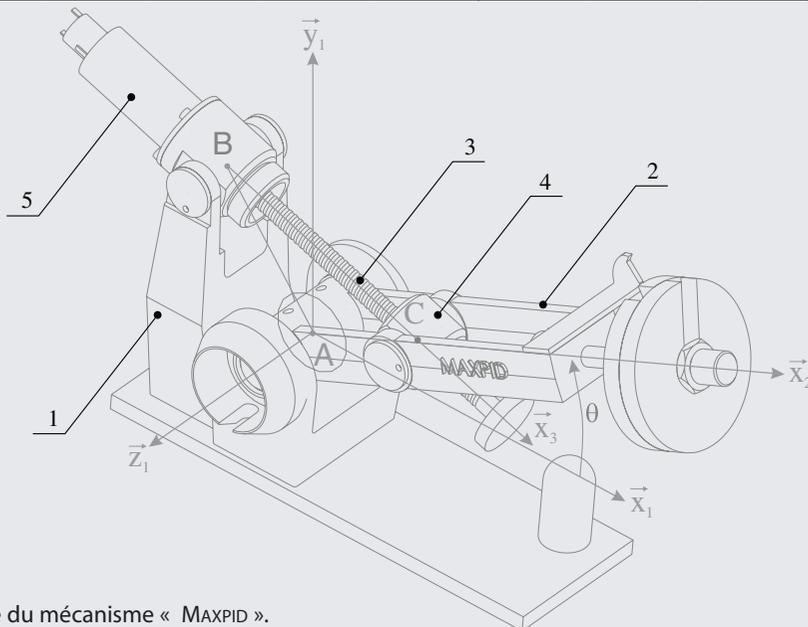
L'objectif de ce problème est de déterminer la loi entrée-sortie  $\dot{\theta} = f(\dot{\beta})$ .



$\beta$ [tr]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\theta$ [°]	0	3,6	8,7	13,6	18,2	22,5	26,5	30,4	34,2	37,9

$\beta$ [tr]	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\theta$ [°]	41,4	45,0	48,2	51,5	54,7	58,0	61,0	64,1	67,1	70,1

$\beta$ [tr]	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
$\theta$ [°]	73,2	76,0	79,1	82,0	84,8	87,5	89,9	91,2	91,2	



Vue d'ensemble du mécanisme « MAXPID ».

1. Tracer le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.

Tracer les figures de définition des angles concernés par la loi entrée-sortie recherchée.

2. Proposer un schéma cinématique tracé dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ .

3. On pose  $\vec{BC} = \lambda \vec{x}_3$ . Trouver une relation entre  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\beta}$ .

4. Déterminer la relation liant  $\dot{\theta}$  à  $\dot{\lambda}$ , et intégrer l'équation différentielle obtenue.

5. Un relevé géométrique sur le système réel donne les valeurs suivantes

On donne par ailleurs les valeurs numériques trouvées dans une documentation technique :

a	b	c	p
70 mm	80 mm	80 mm	4 mm/tr

Superposer le tracé théorique et les points expérimentaux de la fonction  $\theta = g(\beta)$ . Commenter les courbes obtenues.

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 4.1

1. L'ordre des liaisons à l'intérieur d'une colonne n'a aucune importance.

Liaison à centre	Liaison à axe	Liaison à direction
Sphérique	Pivot	Glissière
Sphérique à doigt	Pivot glissant	Plane
Sphère cylindre	Hélicoïdale	
Sphère plan	Cylindre plan	

2. Les liaisons à même nombre de degrés de liberté peuvent être citées dans un ordre quelconque.

1 DDL : pivot, glissière, hélicoïdale ;

2 DDL : pivot glissant, sphérique à doigt ;

3 DDL : sphérique, plane ;

4 DDL : sphère-cylindre, cylindre-plan ;

5 DDL : sphère-plan.

3. Deux liaisons autorisent 2 et seulement 2 rotations : sphérique à doigt et cylindre plan.

Cinq liaisons autorisent au moins 2 rotations : les deux citées précédemment, ainsi que sphérique, sphère-cylindre et sphère-plan.

4. Quatre liaisons autorisent 1 et seulement 1 translation : glissière, hélicoïdale, pivot glissant, sphère-cylindre.

Sept liaisons autorisent au moins 1 translation : les quatre citées précédemment, ainsi que cylindre-plan et sphère plan.

5. Sept liaisons peuvent être nommées :

(a) : pivot glissant d'axe  $(A, \vec{u}_1)$  ;

(b) : sphérique de centre  $B$  ;

(c) : n'existe pas ;

(d) : sphère cylindre de centre  $D$  et d'axe  $(D, \vec{u}_1)$  ;

(e) : plane de normale  $\vec{x}_1$  ;

(f) : hélicoïdale d'axe  $(F, \vec{z}_1)$  et de pas  $p$  ;

(g) : pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$ , avec  $\vec{AG} = a\vec{y}_1$  ;

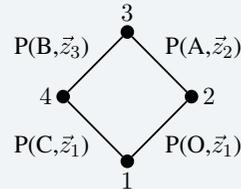
(h) : glissière de direction  $\vec{u}_1$ .

### 4.2

Points de contact	Liaison usuelle
$\{P_1, P_3\}$	Sphère-cylindre
$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$	Pivot-glissant
$\{P_2, P_3\}$	
$\{P_3, P_4\}$	Cylindre-plan
$\{P_1, P_2, P_3\}$	
$\{P_1, P_3, P_5\}$	Sphérique
$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$	Pivot

### 4.3

1. Le graphe des liaisons comporte 4 sommets et 4 arcs

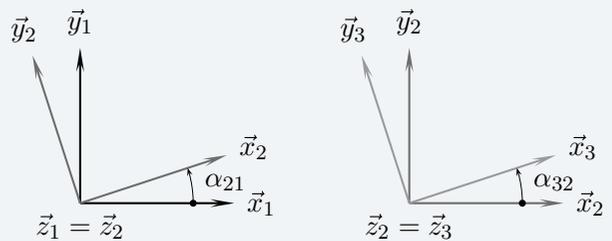


2. On compte quatre inconnues scalaires cinématiques

$$\mathcal{V}(2/1) = O \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_{21} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2) = A \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_{32} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(4/1) = C \begin{Bmatrix} \omega_{41} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/4) = B \begin{Bmatrix} \omega_{34} \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Les deux angles définis sont les angles  $\alpha_{21}$  et  $\alpha_{32}$ .



3. La composition des mouvements sur la chaîne fermée 1 - 2 - 3 - 4 - 1 s'écrit par exemple

$$\mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1) = \mathcal{V}(3/4) + \mathcal{V}(4/1)$$

La composition des vecteurs vitesses au point  $B$  évite l'inconnue  $\omega_{34} \vec{z}_3$ . Cette même équation scalaire  $\vec{CB}$  annule le produit vectoriel  $\omega_{41} \vec{z}_1 \wedge \vec{CB}$  et évite ainsi l'inconnue  $\omega_{41} \vec{z}_1$ . On obtient alors

$$\left( \omega_{32} \vec{z}_2 \wedge \vec{AB} \right) \cdot \vec{CB} + \left( \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \vec{OB} \right) \cdot \vec{CB} = 0$$

On décrit  $\vec{CB}$  par  $\vec{CO} + \vec{OA} + \vec{AB}$  et on utilise les propriétés du produit mixte pour transformer l'équation précédente

$$\omega_{32} \left( \vec{AB} \wedge \vec{CA} \right) \cdot \vec{z}_1 + \omega_{21} \left( \vec{OB} \wedge \vec{CO} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Il reste à détailler le calcul des deux produits vectoriels :  
– concernant le premier :

$$\begin{aligned} L_3 \vec{x}_3 \wedge (-L_1 \vec{x}_1 + R_2 \vec{x}_2) \\ = (L_3 L_1 \sin(\alpha_{32} + \alpha_{21}) - L_3 R_2 \sin \alpha_{32}) \vec{z}_1 \end{aligned}$$

– quant au second :

$$\begin{aligned} (R_2 \vec{x}_2 + L_3 \vec{x}_3) \wedge -L_1 \vec{x}_1 \\ = (R_2 L_1 \sin \alpha_{21} + L_3 L_1 \sin(\alpha_{32} + \alpha_{21})) \vec{z}_1 \end{aligned}$$

On obtient après arrangement

$$\begin{aligned} & R_2 L_1 \dot{\alpha}_{21} \sin \alpha_{21} \\ & - R_2 L_3 \dot{\alpha}_{32} \sin \alpha_{32} \\ & + L_3 L_1 (\dot{\alpha}_{32} + \dot{\alpha}_{21}) \sin (\alpha_{32} + \alpha_{21}) = 0 \end{aligned}$$

4. Cette dernière équation différentielle s'intègre par rapport au temps en

$$R_2 L_1 \cos \alpha_{21} - R_2 L_3 \cos \alpha_{32} + L_3 L_1 \cos (\alpha_{32} + \alpha_{21}) = cste$$

On choisit  $L_3 = L_1 = L$  et  $R_4 = R_2 = R$ . Ces valeurs autorisent comme conditions initiales  $\alpha_{32} = \alpha_{21} = 0$ .

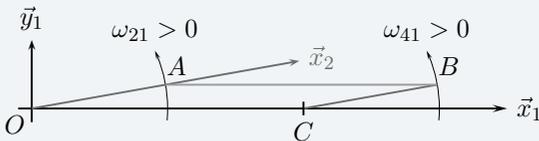
On obtient alors l'équation suivante

$$R \cos \alpha_{21} - R \cos \alpha_{32} + L \cos (\alpha_{32} + \alpha_{21}) = L \quad (1)$$

Si on suppose  $L \neq R$ , l'équation (1) admet deux solutions. En effet, lorsque les quatre points  $O$ ,  $A$ ,  $C$  et  $B$  sont alignés, deux possibilités de mouvements existent pour la jambe 4 par rapport au bâti 1 :

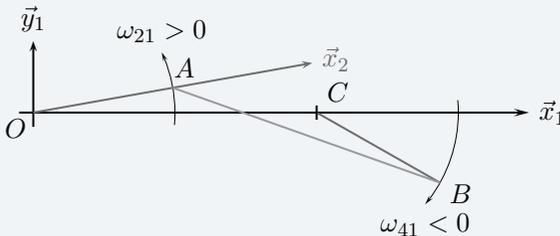
– la jambe 4 tourne dans le sens positif par rapport au bâti, et dans ce cas :

$$\alpha_{32} = -\alpha_{21}$$



– la jambe 4 tourne dans le sens négatif par rapport au bâti, et dans ce cas :

$$\alpha_{32} = \arctan \left( \frac{(L^2 - R^2) \sin (\alpha_{21})}{(2LR - \cos (\alpha_{21}) R^2 - \cos (\alpha_{21}) L^2)} \right)$$



### Remarques

- Les configurations singulières pour lesquelles les points sont alignés sont à proscrire sur un système réel !
- Un exemple de résolution de l'équation (1) est donné avec le logiciel MAPLE :

```
[> restart ;
[> deg:=Pi/180 ;
[> eq:=R*cos(alpha21)-
R*cos(alpha32)+L*cos(alpha21+alpha32)=L;
[> solve(eq,alpha32);
```

5. On conserve comme solution  $\alpha_{32} = -\alpha_{21}$  et par composition des mouvements sur la chaîne ouverte 1-2-3, on trouve alors :

– concernant les vecteurs rotations,

$$\vec{\Omega}(3/1) = \dot{\alpha}_{32} \vec{z}_2 + \dot{\alpha}_{21} \vec{z}_1 = \vec{0}$$

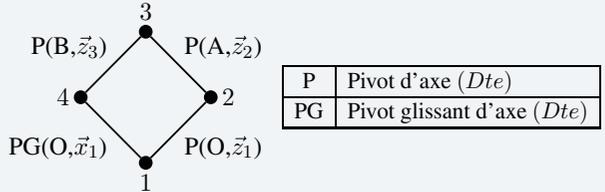
– concernant le champ des vecteurs vitesses,

$$\vec{V}(A,3/1) = R \dot{\alpha}_{21} \vec{y}_2$$

Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(3/1)$  est le vecteur nul, le mouvement (3/1) est donc un mouvement de translation. La trajectoire du point  $A$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  dans le mouvement (3/1), on en déduit que le mouvement (3/1) est un mouvement de translation circulaire.

## 4.4

Le graphe des liaisons comporte 4 sommets et 4 arcs



2. Le schéma cinématique se trace en dessinant dans l'ordre :
- le repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  ;
  - le repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$  et l'angle  $\theta$  ;
  - l'arc de cercle de rayon  $R$  issu du point  $O$ , trajectoire du point  $A$  dans le mouvement 2/1 ;
  - l'arc de cercle de rayon  $L$  issu du point  $A$ , pour définir la position du point  $B$  sur  $(O, \vec{x}_1)$  ;
  - les symboles des liaisons en couleur ;
  - les traits joignant les symboles ;
  - les écritures.

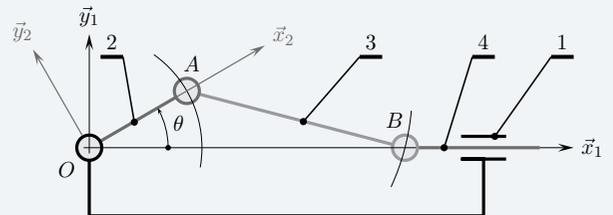


Schéma cinématique du système bielle-manivelle.

3. On compte cinq inconnues scalaires cinématiques

$$\mathcal{V}(2/1) = O \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2) = A \begin{Bmatrix} \omega_{32} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(4/1) = B \begin{Bmatrix} \omega_{41} \vec{x}_1 \\ \dot{\lambda} \vec{x}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(4/3) = B \begin{Bmatrix} \omega_{43} \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

4. La composition des mouvements sur la chaîne fermée 1-2-3-4-1 s'écrit par exemple

$$V(4/1) = V(4/3) + V(3/2) + V(2/1)$$

Les trois inconnues à éviter sont  $\omega_{32}$ ,  $\omega_{41}$  et  $\omega_{43}$ .

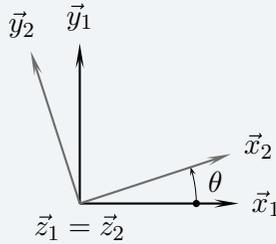
La composition des vecteurs vitesses au point  $B$  évite les deux inconnues  $\omega_{43}$  et  $\omega_{41}$ . Cette même équation scalaire  $\vec{AB}$  annule le produit vectoriel  $\omega_{32} \vec{z}_2 \wedge \vec{AB}$  et évite ainsi l'inconnue  $\omega_{32}$ . On obtient alors

$$\dot{\lambda} \vec{x}_1 \cdot \vec{AB} = (\dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = 0 \quad (2)$$

On décrit  $\vec{AB}$  par  $\vec{AO} + \vec{OB}$  et on utilise les propriétés du produit mixte pour transformer l'équation précédente

$$\dot{\lambda} \vec{x}_1 \cdot (\lambda \vec{x}_1 - R \vec{x}_2) = \dot{\theta} (\lambda \vec{x}_1 \wedge -R \vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1$$

Il reste à détailler le calcul vectoriel à partir de la figure de définition de l'angle  $\theta$



On obtient ainsi

$$\dot{\lambda} \lambda - \dot{\lambda} R \cos \theta + \lambda R \dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad (3)$$

5. Sur le champ des vecteurs vitesses (3/1), la relation d'équiprojectivité entre les points A et B s'écrit

$$\vec{V}(A,3/1) \cdot \vec{AB} = \vec{V}(B,3/1) \cdot \vec{AB}$$

– Le torseur cinématique  $\mathcal{V}(3/2)$  donne le vecteur  $\vec{V}(A,3/2)$  nul à chaque instant. On en déduit

$$\vec{V}(A,3/1) = \vec{V}(A,2/1) = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{OA}$$

– Le torseur cinématique  $\mathcal{V}(4/3)$  donne le vecteur  $\vec{V}(B,4/3)$  nul à chaque instant. On en déduit

$$\vec{V}(B,3/1) = \vec{V}(B,4/1) = \dot{\lambda} \vec{x}_1$$

On retrouve ainsi l'équation (2) de la question précédente.

6. L'équation (3) s'intègre en remarquant que  $\dot{\lambda} \lambda$  est la dérivée de  $\frac{1}{2} \lambda^2$  et que  $-\dot{\lambda} R \cos \theta + \lambda R \dot{\theta} \sin \theta$  est la dérivée de  $-\lambda R \cos \theta$ . On a donc

$$\lambda^2 - 2\lambda R \cos \theta = cste$$

La constante d'intégration se trouve le plus facilement en reconnaissant le développement de l'égalité géométrique écrite sur le triangle (OAB)

$$\vec{AB}^2 = (\vec{AO} + \vec{OB})^2$$

Après substitution et développement, on arrive à l'équation finale

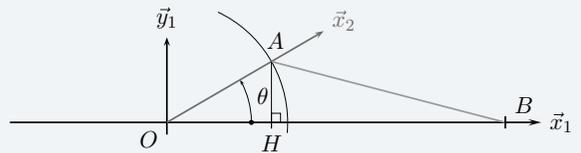
$$L^2 = R^2 + \lambda^2 - 2R\lambda \cos \theta$$

Pour une valeur de l'angle  $\theta$  donné, deux solutions sont possibles pour  $\lambda$  :

– la première correspond au point B d'abscisse positive

$$\lambda_1 = R \cos \theta + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}$$

Soit le point H projeté orthogonal du point A sur la droite  $(O, \vec{x}_1)$ . On constate que  $OH = R \cos \theta$  et  $AH = R \sin \theta$ . L'interprétation géométrique du résultat analytique est possible à partir de la somme  $\lambda = OB = OH + HB$ .



– la seconde correspond à un point  $B_2$  d'abscisse négative

$$\lambda_2 = R \cos \theta - \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}$$

Cette configuration est dans les faits la même que la précédente, obtenue en changeant  $\theta$  en  $\pi - \theta$  et  $\vec{x}_1$  en  $-\vec{x}_1$ .

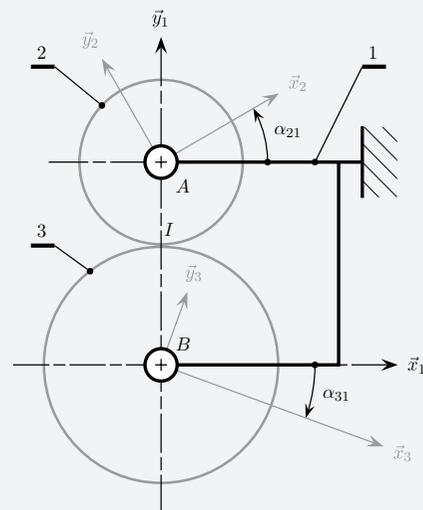
7. La lecture de la courbe fournie induit les remarques suivantes :

- les positions extrêmes sont obtenues pour  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 180^\circ$ , lorsque les points O, A et B sont alignés ;
- lorsque l'angle  $\theta$  va de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ , l'abscisse du point B diminue, du fait du signe constant de la vitesse sur cet intervalle ;
- la courbe grise correspond à la vitesse scalaire du point H sur l'axe  $(O, \vec{x}_1)$ , obtenue par le produit scalaire  $\vec{V}(A,2/1) \cdot \vec{x}_1$  ;
- la longueur HB diminue de  $\theta = 0^\circ$  jusqu'à  $\theta = 90 - \arctan \frac{R}{L}$ , valeur pour laquelle le triangle (OAB) est droit en A. Ceci explique pourquoi la vitesse scalaire du point B suivant  $-\vec{x}_1$  augmente plus vite que celle du point H sur cet intervalle ;
- les vitesses des points H et B sont égales pour  $\theta = \pm 90^\circ$ , ce qui se montre aisément en utilisant l'équiprojectivité du champ des vitesses (3/1).

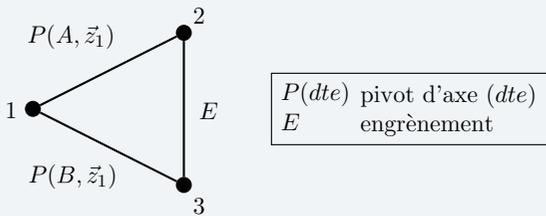
Pour mieux comprendre ces propositions, il n'est pas inutile de leurs associer le tracé des figures géométriques correspondantes. Il reste ensuite à valider par le calcul les points de vitesse maximale et à comprendre les points d'inflexion de part et d'autre de la position  $\theta = 180^\circ$ .

## 4.5

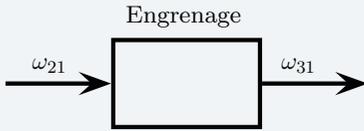
1. On complète l'épure fournie en ajoutant des bases vectorielles et en posant les angles associés aux liaisons pivot



2. Un tel mécanisme engrenage comporte une chaîne fermée de trois solides.



La loi entrée-sortie recherchée est la loi entre les fréquences de rotation des deux pignons par rapport au bâti.



3. On exprime l'absence de glissement au point  $I$  lors du mouvement 2/3

$$\vec{V}(I, 2/3) = \vec{0}$$

4. La composition des vitesses au point  $I$  permet d'écrire

$$\vec{V}(I, 2/1) = \vec{V}(I, 3/1) \quad (1)$$

• On change de point sur le mouvement 2/1

$$\vec{V}(I, 2/1) = \underbrace{\vec{V}(A, 2/1)}_{\vec{0}} + \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \vec{AI}, \text{ avec } \vec{AI} = -R_2 \vec{y}_1$$

comme le vecteur vitesse  $\vec{V}(A, 2/1)$  est nul, on en déduit

$$\vec{V}(I, 2/1) = R_2 \omega_{21} \vec{x}_1$$

• On change de point sur le mouvement 3/1, avec  $\vec{BI} = R_3 \vec{y}_1$ . Comme le vecteur vitesse  $\vec{V}(B, 3/1)$  est nul, on en déduit

$$\vec{V}(I, 3/1) = -R_3 \omega_{31} \vec{x}_1$$

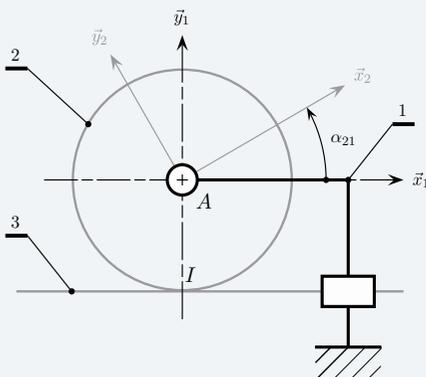
Par substitution des expressions dans l'équation 1, on en déduit

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{R_2}{R_3}$$

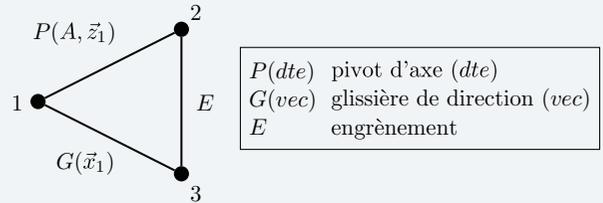
Comme les axes de rotation des liaisons pivot sont immobiles dans les mouvements 3/1 et 2/1, le rapport de transmission est le rapport inverse des rayons primitifs, avec dans ce cas un changement de signe.

#### 4.6

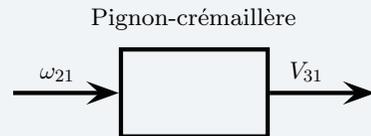
1. On complète l'épure fournie en ajoutant les bases vectorielles et en posant l'angle associé à la liaison pivot.



2. Un tel mécanisme comporte une chaîne fermée de trois solides.



La loi entrée-sortie recherchée est la loi entre la rotation du pignon 2 par rapport à 1 et la translation de la crémaillère 3 par rapport au bâti 1.



3. On exprime l'absence de glissement au point  $I$  lors du mouvement 2/3

$$\vec{V}(I, 2/3) = \vec{0}$$

4. La composition des vitesses au point  $I$  permet d'écrire

$$\vec{V}(I, 2/1) = \vec{V}(I, 3/1) \quad (1)$$

• On change de point sur le mouvement 2/1

$$\vec{V}(I, 2/1) = \underbrace{\vec{V}(A, 2/1)}_{\vec{0}} + \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \vec{AI}, \text{ avec } \vec{AI} = -R_2 \vec{y}_1$$

comme le vecteur vitesse  $\vec{V}(A, 2/1)$  est nul, on en déduit

$$\vec{V}(I, 2/1) = R_2 \omega_{21} \vec{x}_1$$

• Sur le mouvement 3/1, le champ des vecteurs vitesse est uniforme et on pose

$$\vec{V}(I, 3/1) = V_{31} \vec{x}_1$$

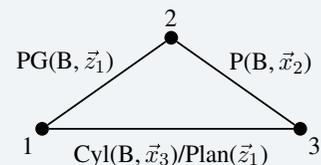
Après substitution des termes dans l'expression de l'équation 1, on peut écrire

$$V_{31} = R_2 \omega_{21}$$

Comme l'axe de rotation de la liaison pivot est immobile dans le mouvement 2/1, la vitesse de translation  $V_{31}$  est proportionnelle à la vitesse de rotation  $\omega_{21}$ .

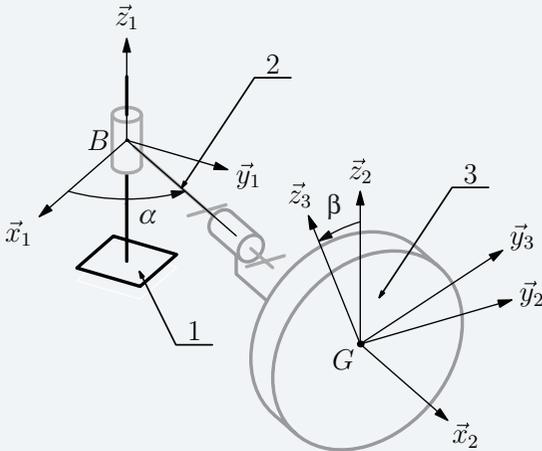
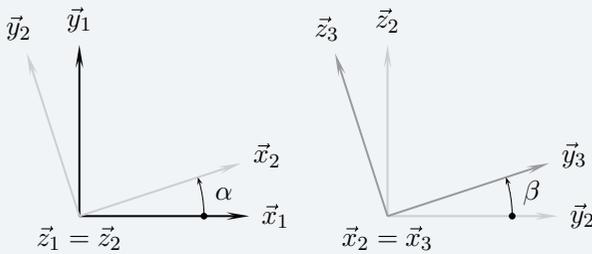
#### 4.7

1. Cette structure comporte une chaîne fermée de trois solides. La meule est cylindrique de révolution et est posée sur un plan : la liaison cylindre-plan est conçue pour modéliser ce contact.



Il est immédiat de poser les torseurs cinématiques associés aux liaisons pivot et pivot glissant, ainsi que les figures de définition des deux angles correspondants

$$\mathcal{V}(2/1) = B \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \dot{z} \vec{z}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2) = B \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{x}_2 \\ \dot{0} \end{Bmatrix}$$



Proposition de schéma cinématique.

La liaison cylindre-plan est une liaison à quatre degrés de liberté, cette structure comporte donc six inconnues cinématiques.

2. La figure ci-dessus est une proposition de schéma cinématique.

3. Par composition des vecteurs vitesses au point  $I$  sur la chaîne ouverte 1 – 2 – 3, on a

$$\vec{V}(I,3/1) = \vec{V}(I,3/2) + \vec{V}(I,2/1) \quad (4)$$

Sur le mouvement 3/2, on utilise la formule de changement de points

$$\vec{V}(I,3/2) = \dot{\beta} \vec{x}_2 \wedge \vec{BI} \quad (5)$$

Le point  $I$  est un des points de contact entre la meule et le bâti. Ce point est à chaque instant repéré dans 2 par le vecteur position  $\vec{BI} = \vec{OI} - \vec{OB} = \lambda \vec{x}_2 - z \vec{z}_2$ .

On trouve donc après calcul

$$\vec{V}(I,3/2) = z \dot{\beta} \vec{y}_2 \quad (6)$$

– On procède de même sur le mouvement 2/1 pour trouver

$$\vec{V}(I,2/1) = \lambda \dot{\alpha} \vec{y}_2 + \dot{z} \vec{z}_1 \quad (7)$$

La somme des équations (6) et (7) permet de proposer

$$\vec{V}(I,3/1) = (z \dot{\beta} + \lambda \dot{\alpha}) \vec{y}_2 + \dot{z} \vec{z}_1 \quad (8)$$

4. Le contact cylindre-plan impose  $\vec{V}(I,3/1) \cdot \vec{z}_1 = 0$ . On en déduit que le vecteur défini par l'équation (8) n'est pas com-

patible avec ce contact. Ce dernier impose  $\dot{z} = 0$ . La cote  $z$  du point  $B$  dans le mouvement de 2 par rapport à 1 est donc une constante que l'on détermine égale à  $R$ . Le vecteur vitesse  $\vec{V}(I,3/1)$  à retenir finalement est alors

$$\vec{V}(I,3/1) = (R \dot{\beta} + \lambda \dot{\alpha}) \vec{y}_2 \quad (9)$$

5. S'il y a roulement sans glissement de la meule par rapport au bâti au point  $I$ , alors le vecteur vitesse  $\vec{V}(I,3/1)$  est le vecteur nul, et l'équation (9) impose la relation scalaire

$$R \dot{\beta} + \lambda \dot{\alpha} = 0 \quad (10)$$

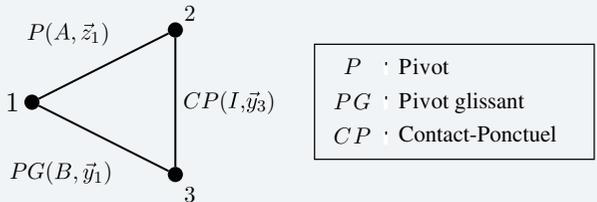
Le non-glissement est donc possible pour une valeur unique  $\lambda_0$  vérifiant la relation (10). Le non-glissement est impossible pour tous les autres points du segment de contact  $[J, K]$ .

6. Une roue d'un véhicule, qu'elle soit directrice ou non, se comporte de la même manière lors d'un virage, et cette étude montre qu'il ne peut y avoir roulement sans glissement qu'en un seul point. On en déduit que les virages accélèrent l'usure des pneumatiques.

## Exercices d'approfondissement

### 4.8

1. On commence par tracer le graphe des liaisons et contact

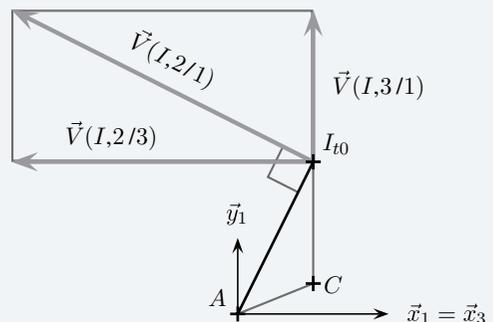


Cette structure comporte trois solides et on dénombre alors 6 mouvements de solides possibles :

$$2/1 \text{ et } 1/2 \quad 3/1 \text{ et } 1/3 \quad 2/3 \text{ et } 3/2$$

2. On écrit la loi de composition des vitesses au point  $I$

$$\vec{V}(I,2/1) = \vec{V}(I,2/3) + \vec{V}(I,3/1)$$

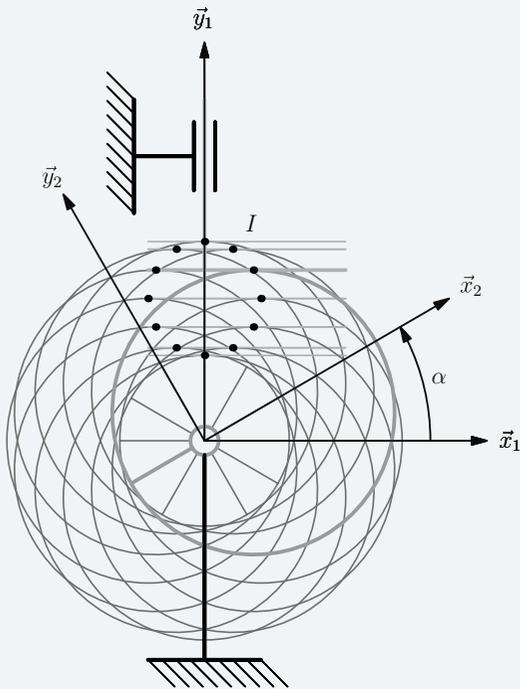


Reste à caractériser chacun des mouvements :

• l'excentrique 2 est en mouvement de rotation par rapport au bâti 1, et on pose en conséquence le vecteur vitesse  $\vec{V}(I,2/1)$  perpendiculaire au rayon  $AI$  ;

- le piston 3 est en translation rectiligne de direction  $\vec{y}_1$  par rapport au bâti ;
  - la vitesse de glissement  $\vec{V}(I,2/3)$  est dans le plan tangent, suivant  $\vec{x}_3$ .
3. Les différents points  $I$  à considérer sont coïncidents lors du contact, par exemple à une date  $t_0$ , et suivent leurs mouvements respectifs le reste du temps :
- concernant le mouvement 2/1, le point  $I$  a comme trajectoire le cercle de centre  $A$  et de rayon  $(AI_{t_0})$  ;
  - le point  $I$  se déplace sur la droite  $(I_{t_0}, \vec{y}_1)$  lors du mouvement 3/1 ;
  - le point  $I$  glisse sur la droite  $(I_{t_0}, \vec{x}_3)$  lors du mouvement 2/3.

4. Pour comprendre le problème, on trace différentes positions successives du mécanisme pour suivre le point de contact dans son mouvement par rapport au bâti. Le mouvement de ce point apparaît clairement différent des mouvements des points coïncidents précédents.

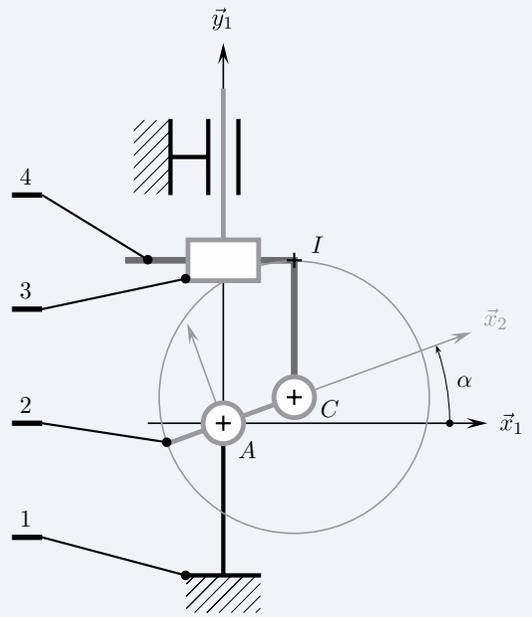


Identifier sans ambiguïté le vecteur vitesse que l'on appelle  $\vec{V}(I/1)$  nécessite d'introduire un solide virtuel 4 auquel on puisse associer ce point géométrique, afin de retrouver une description de mouvements de solides et d'avoir à déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}(I,4/1)$  :

- le point de contact suit le cercle de centre  $C$  sur l'excentrique : on imagine alors une liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_2)$  entre l'excentrique 2 et le solide 4 ;
- le point de contact glisse sur le piston 3 : on imagine alors une liaison glissière de direction  $\vec{x}_3$  entre le piston et ce solide 4.

Il est possible alors de montrer que le solide 4 est en translation circulaire par rapport au bâti 1 et on a

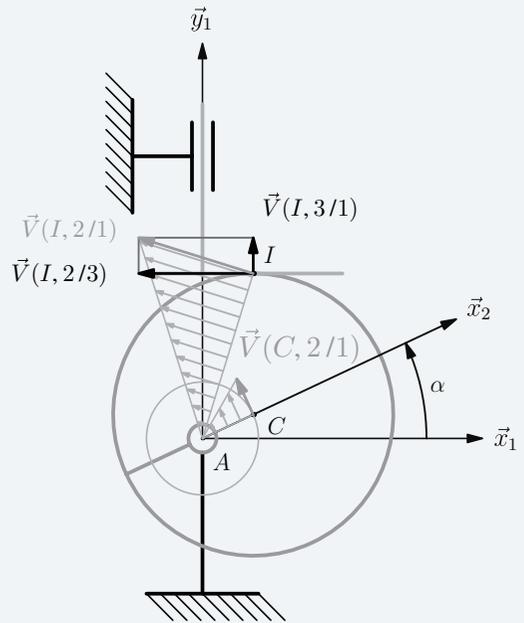
$$\vec{V}(I,4/1) = \vec{V}(C,4/1)$$



La composition des vitesses au point  $C$  permet d'ajouter

$$\vec{V}(C,4/1) = \vec{V}(C,2/1)$$

Le champ des vecteurs vitesse du mouvement 2/1 permet de conclure

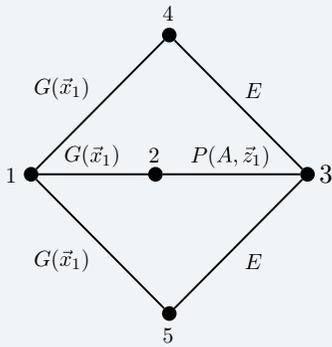


#### 4.9

1. Le mécanisme étudié comporte deux chaînes fermées de cinq solides.
2. On utilise les vitesses scalaires posées par l'énoncé pour caractériser les torseurs cinématiques des trois liaisons glissière

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{21}\vec{x}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(4/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{41}\vec{x}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(5/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{51}\vec{x}_1 \end{Bmatrix}$$

On exploite l'angle  $\alpha$  posé et les phénomènes de non glissement aux « points d'engrènement »  $I$  et  $K$  pour caractériser



$P(dte)$	pivot d'axe ( $dte$ )
$G(vec)$	glissière de direction ( $vec$ )
$E$	engrènement

les trois autres torseurs cinématiques

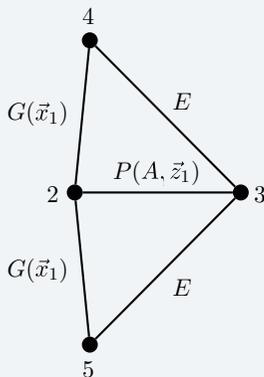
$$\mathcal{V}(3/2) = \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \quad \mathcal{V}(3/4) = \begin{matrix} \vec{\Omega}(3/4) \\ \vec{0} \end{matrix}$$

$$\mathcal{V}(5/4) = \begin{matrix} \vec{\Omega}(5/4) \\ \vec{0} \end{matrix}$$

3. Deux méthodes de résolution sont possibles :

- On cherche à identifier des chaînes fermées de trois solides avec comme liaisons pivot, glissière et engrènement.

Pour cela, on reconnaît sur les chaînes ouvertes 2-1-4 et 2-1-5 des liaisons équivalentes usuelles



L'axe de la liaison pivot est immobile dans le mouvement 3/2 et on peut alors écrire, en identifiant les signes au cas par cas

$$\begin{cases} V_{42} = -R_3 \omega_{32} \\ V_{52} = +R_3 \omega_{32} \end{cases}$$

La composition des mouvements sur les chaînes ouvertes invoquées précédemment permet de détailler l'équation recherchée

$$V_{41} - V_{21} = -(V_{51} - V_{21})$$

Après arrangement, on obtient finalement

$$V_{41} + V_{51} = 2V_{21} \quad (1)$$

- Il est également possible de repartir des expressions du non-glissement aux points de contact des primitifs.

$$\begin{cases} \vec{V}(I, 3/4) = \vec{0} \\ \vec{V}(K, 3/5) = \vec{0} \end{cases}$$

À partir de là :

– la composition des vitesses aux points  $I$  et  $K$  permet d'écrire

$$\begin{cases} \vec{V}(I, 3/2) = \vec{V}(I, 4/1) - \vec{V}(I, 2/1) \\ \vec{V}(K, 3/2) = \vec{V}(K, 5/1) - \vec{V}(I, 2/1) \end{cases}$$

– sur le mouvement 3/2, on montre que les deux vecteurs vitesse sont opposés

$$\vec{V}(I, 3/2) = -\vec{V}(K, 3/2)$$

– le résultat est alors immédiat, en remplaçant les vecteurs vitesse par leurs différentes expressions

$$V_{41} - V_{21} = -(V_{51} - V_{21})$$

On retrouve bien le résultat établi par la première méthode

$$V_{41} + V_{51} = 2V_{21} \quad (2)$$

4. On exploite l'équation 1 ou 2 pour aider au travail d'imagination.

- On bloque la translation 2/1 : dans ce cas, les crémaillères 4 et 5 se tradent de manière symétrique par rapport au bâti 1

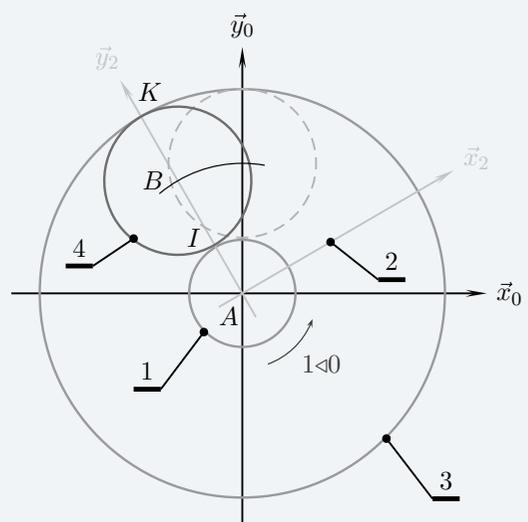
$$V_{21} = 0 \text{ et } V_{41} = -V_{51}$$

- On bloque la rotation 3/2 : les quatre pièces 2, 3, 4 et 5 sont immobiles les unes par rapport aux autres et cet ensemble solide se translate suivant  $\vec{x}_1$  par rapport au bâti

$$V_{21} = V_{41} = V_{51}$$

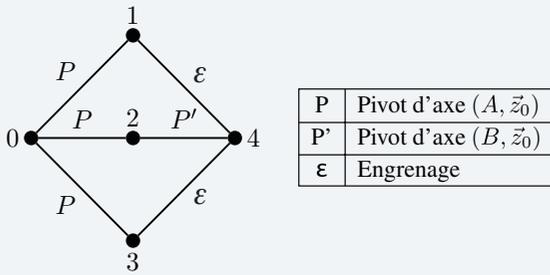
#### 4.10

1. On trace sur la figure ci-dessous le schéma demandé dans le plan  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ .



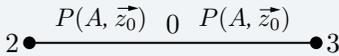
Le train épicycloïdal en vue de gauche.

2. Le mécanisme comporte 5 ensembles et 6 liaisons



Graphes des liaisons du train épicycloïdal.

3. Le texte de présentation présente une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  entre la couronne 3 et le bâti 0, alors que le schéma cinématique pose cette liaison entre la couronne 3 et le porte-satellite 2. Il est nécessaire de s'intéresser aux liaisons équivalentes pour lever cette contradiction apparente.

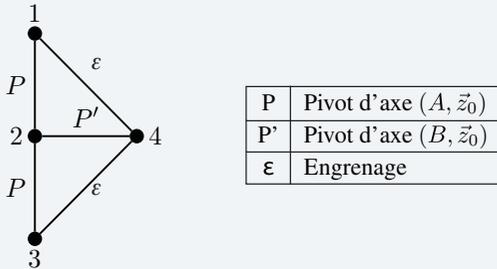


Par composition des mouvements sur la chaîne ouverte 2 - 0 - 3 :

- concernant le vecteur rotation,  $\vec{\Omega}(3/2) = \omega_{30}\vec{z}_0 - \omega_{20}\vec{z}_0$  et on pose  $\omega_{32} = \omega_{30} - \omega_{20}$  ;

- concernant le champ des vecteurs vitesse,  $\vec{V}(A, 3/2) = \vec{0}$ . La liaisons équivalente entre 3 et 2 est une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$ .

4. L'étude des liaisons équivalentes entre 3 et 2, ainsi qu'entre 1 et 2, montre que tous les axes de rotation sont immobiles dans le référentiel lié au porte satellite, et on peut considérer le graphe des liaisons équivalent suivant



Graphes des liaisons équivalentes du train épicycloïdal

5. Dans le référentiel lié au porte-satellite, les axes de rotation sont immobiles et on a

$$\frac{\omega_{32}}{\omega_{12}} = \frac{\omega_{32} \omega_{42}}{\omega_{42} \omega_{12}} = \frac{Z_4}{Z_3} \left( -\frac{Z_1}{Z_4} \right) = -\frac{Z_1}{Z_3}$$

On reprend la composition des vecteurs rotations pour écrire finalement

$$\frac{\omega_{30} - \omega_{20}}{\omega_{10} - \omega_{20}} = -\frac{Z_1}{Z_3}$$

Dans le cas particulier où la couronne est fixe par rapport au bâti, on trouve alors

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$$

6. La trajectoire d'un point du satellite par rapport au planétaire est une *épicycloïde*, la trajectoire de ce même point par rapport à la couronne est une *hypocycloïde*...

7. Si on appelle  $R_{p1}$ ,  $R_{p4}$  et  $R_{p3}$  les rayons primitifs respectivement du planétaire 1, du satellite 4 et de la couronne 3, on a la relation

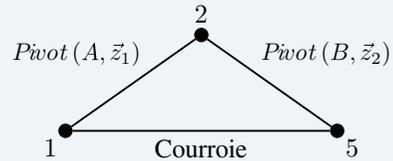
$$R_{p3} = 2R_{p4} + R_{p1}$$

Le module  $m$  caractérise un engrenage avec la relation  $\phi_{pi} = mZ_i$ , on en déduit la relation sur les nombres de dents

$$Z_3 = Z_1 + 2Z_4$$

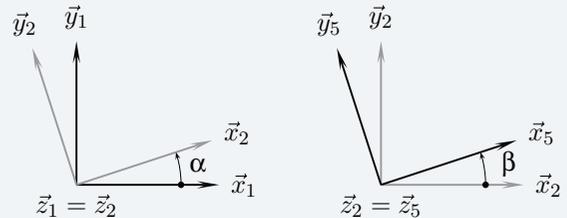
#### 4.11

1. Cette structure comporte une chaîne fermée composée de trois solides



2. Les torseurs cinématiques associés aux deux liaisons pivots sont

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \quad \mathcal{V}(5/2) = \begin{matrix} \dot{\beta} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{matrix}$$



3. Les axes des rotations des poulies sont immobiles dans le référentiel attaché au bras 2 et on a immédiatement

$$\frac{\omega_{52}}{\omega_{12}} = +\frac{R_1}{R_5}$$

On en déduit la relation recherchée

$$\dot{\beta} = -\frac{R_1}{R_5} \dot{\alpha}$$

Cette relation s'intègre immédiatement en

$$\beta - \beta_0 = -\frac{R_1}{R_5} (\alpha - \alpha_0)$$

4. Sur le mouvement (5/2), on utilise la formule de changement de points pour écrire

$$\vec{V}(K, 5/2) = \dot{\beta} \vec{z}_5 \wedge b \vec{x}_5 = \dot{\beta} b \vec{y}_5$$

La composition des vitesses sur la chaîne 5 - 2 - 1 permet de proposer

$$\vec{V}(K, 5/1) = \vec{V}(K, 5/2) + \vec{V}(K, 2/1)$$

Sur le mouvement (2/1), on utilise à nouveau la formule de changement de points pour écrire

$$\vec{V}(K, 2/1) = \dot{\alpha} \vec{z}_2 \wedge (a \vec{x}_2 + b \vec{x}_5) = \dot{\alpha} (a \vec{y}_2 + b \vec{y}_5)$$

En regroupant les termes et en substituant à  $\dot{\beta}$  sa valeur, on obtient

$$\vec{V}(K,5/1) = \dot{\alpha} \left( a\vec{y}_2 + b \left( 1 - \frac{R_1}{R_5} \right) \vec{y}_5 \right)$$

5. Il est nécessaire d'exprimer le vecteur vitesse  $\vec{V}(K,5/1)$  dans la base liée à 1 pour atteindre la trajectoire dans ce même référentiel. Soit alors  $\vec{V}(K,5/1) = V_x\vec{x}_1 + V_y\vec{y}_1$ . On pose de plus  $\rho = \left( 1 - \frac{R_1}{R_5} \right)$  et on obtient

$$\begin{cases} V_x = -\dot{\alpha} (a \sin \alpha + \rho b \sin(\rho\alpha + \beta_0)) \\ V_y = \dot{\alpha} (a \cos \alpha + \rho b \cos(\rho\alpha + \beta_0)) \end{cases}$$

On pose  $\vec{AK} = x\vec{x}_1 + y\vec{y}_1$  et on intègre les deux équations précédentes

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos \alpha + b \cos(\rho\alpha + \beta_0) \\ y = y_0 + a \sin \alpha + b \sin(\rho\alpha + \beta_0) \end{cases}$$

6. Il s'agit de calculer les valeurs des paramètres pour chacun des cas.

- Si  $R_1 = R_5$ , alors  $\rho = 0$  et comme  $\beta_0 = 0$ , on a

$$\begin{cases} x = 2a + a \cos \alpha \\ y = a \sin \alpha \end{cases}$$

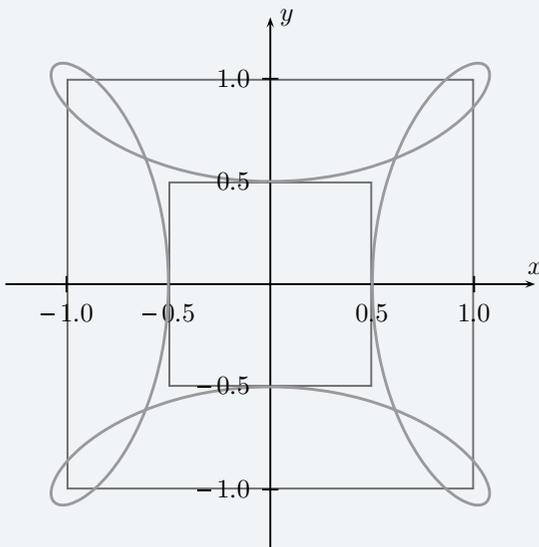
La trajectoire du point  $K$  est un cercle de rayon  $a$  et de centre le point de coordonnées  $(2a, 0)$ . Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(5/1)$  est le vecteur nul, le poignet 5 est en translation circulaire par rapport à 1.

- Si  $R_1 = 2R_5$ , alors  $\rho = -1$  et comme  $b = a$  et  $\beta_0 = 0$ , on a

$$\begin{cases} x = 2a \cos \alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

Le point  $K$  se déplace sur la droite  $(A, \vec{x}_1)$

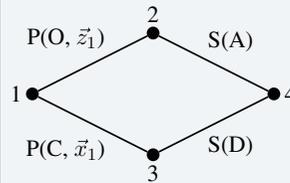
- Si  $R_1 = 4R_5$ , alors  $\rho = -3$  et en prenant  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$  et  $\beta_0 = 180^\circ$ , on trace la trajectoire du point  $K$  dans le repère lié au bâti



Trajectoire du point  $K$  pour un tour du bras 2.

## 4.12

1. Le mécanisme comporte une chaîne fermée de solides

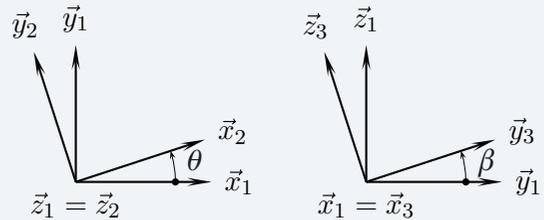


P	Pivot d'axe (Dte)
S	Sphérique de centre (Pt)

La composition des mouvements sur la chaîne fermée de solides 1 - 2 - 4 - 3 - 1 donne six équations scalaires pour huit inconnues scalaires dénombrées.

2. On pose quatre torseurs cinématiques et deux figures de définition des angles

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(2/1) &= \begin{matrix} \theta \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} & \mathcal{V}(3/1) &= \begin{matrix} \beta \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \\ \mathcal{V}(4/2) &= \begin{matrix} \vec{\Omega}(4/2) \\ \vec{0} \end{matrix} & \mathcal{V}(4/3) &= \begin{matrix} \vec{\Omega}(4/3) \\ \vec{0} \end{matrix} \end{aligned}$$



3. Les torseurs  $\mathcal{V}(4/2)$  et  $\mathcal{V}(4/3)$  concentrent les inconnues indésirables. La composition des vitesses au point  $A$  évite les trois inconnues scalaires du vecteur rotation  $\vec{\Omega}(4/2)$ . Cette même équation scalaire  $\vec{AD}$  élimine le terme  $\vec{\Omega}(4/3) \wedge \vec{DA}$ , donc évite également les trois inconnues scalaires du vecteur rotation  $\vec{\Omega}(4/3)$ .

4. La forme la plus condensée de la loi entrée-sortie recherchée est obtenue par l'égalité de deux produits mixtes

$$\left( \dot{\theta} \vec{z}_1, \vec{OA}, \vec{AD} \right) = \left( \dot{\beta} \vec{x}_1, \vec{CA}, \vec{AD} \right)$$

Les vecteurs sont à décrire de manière à ne faire intervenir que des angles connus lors du calcul.

- le premier terme s'explique en remplaçant  $\vec{AD}$  par  $\vec{AO} + \vec{OC} + \vec{CD}$

$$\left( \dot{\theta} \vec{z}_1, \vec{OA}, \vec{OC} + \vec{CD} \right) = a\dot{\theta} (\vec{z}_1, \vec{x}_2, a\vec{x}_1 + L\vec{y}_1 + b\vec{z}_3)$$

- $a(\vec{z}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_1) = -a\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = -a \sin \theta$
- $L(\vec{z}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1) = L\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = L \cos \theta$
- $b(\vec{z}_1, \vec{x}_2, \vec{z}_3) = b(\cos \theta \vec{y}_1 - \sin \theta \vec{x}_1) \cdot \vec{z}_3 = -b \sin \theta \cos \theta$

- le second terme s'explique en remplaçant  $\vec{AD}$  par  $\vec{AC} + \vec{CD}$  et en détaillant  $\vec{CA}$

$$\dot{\beta} (\vec{x}_1, \vec{CA}, \vec{CD}) = b\dot{\beta} (\vec{x}_1, -L\vec{y}_1 + b\vec{z}_1 + a\vec{x}_2, \vec{z}_3)$$

- $-L(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_3) = -L\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = -L \cos \beta$
- $b(\vec{x}_1, \vec{z}_1, \vec{z}_3) = -b\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_3 = b \sin \beta$
- $a(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{z}_3) = a \sin \theta \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = a \sin \theta \cos \beta$

On obtient finalement

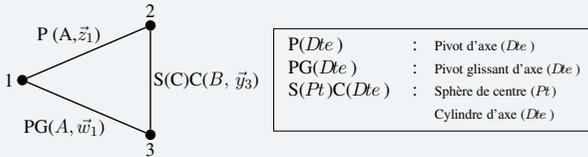
$$\frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} = \frac{a}{b} \frac{(L - b \sin \beta) \cos \theta - a \sin \theta}{(a \sin \theta - L) \cos \beta + b \sin \beta}$$

5. En supposant que les angles  $\theta$  et  $\beta$  restent petit devant 1, on pose les approximations courantes  $\sin u \approx u$  et  $\cos u \approx 1$  pour proposer

$$\frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}} \approx -\frac{a}{b}$$

#### 4.13

1. La lecture du schéma cinématique permet l'élaboration du graphe des liaisons correspondant



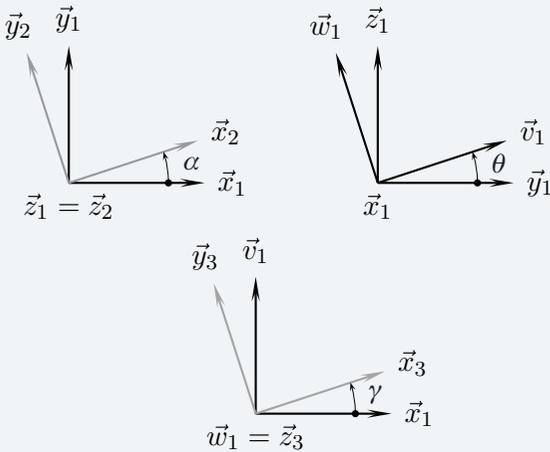
Ce graphe comporte une chaîne fermée de solides, et on compte sept inconnues cinématiques.

2. Toutes les liaisons sont des liaisons usuelles : Les torseurs cinématiques s'écrivent directement

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ 0 \end{matrix} \quad \mathcal{V}(3/1) = \begin{matrix} \dot{\gamma} \vec{w}_1 \\ \dot{\lambda} \vec{w}_1 \end{matrix}$$

$$\mathcal{V}(2/3) = \begin{matrix} \vec{\Omega}(2/3) \\ \dot{\mu} \vec{y}_3 \end{matrix}$$

3. En vue des calculs à faire à la question suivante, il est indispensable de tracer les figures de définition des trois angles donnés par l'énoncé



4. La loi entrée-sortie recherchée met en œuvre deux inconnues cinématiques sur les sept du mécanisme. Sur la chaîne fermée 1 - 2 - 3 - 1, la composition des vitesses au point C évite les trois inconnues du vecteur  $\vec{\Omega}(2/3)$ . Cette composition peut s'écrire par exemple  $\vec{V}(C,2/1) = \vec{V}(C,2/3) + \vec{V}(C,3/1)$ , que l'on détaille alors

$$\dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{AC} = \dot{\mu} \vec{y}_3 + \dot{\lambda} \vec{w}_1 + \dot{\gamma} \vec{w}_1 \wedge \vec{AC}$$

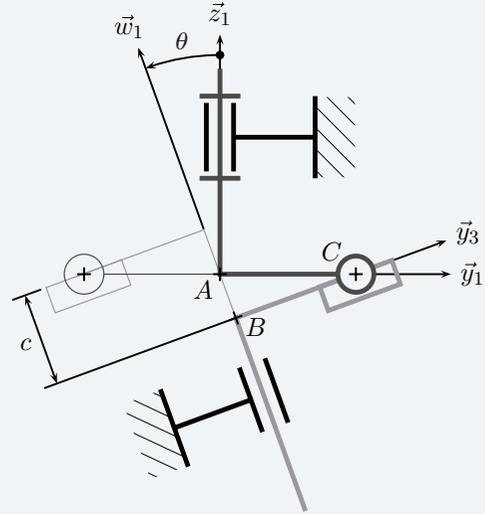
Le produit scalaire de cette équation avec un vecteur orthogonal à  $\vec{y}_3$  évite l'inconnue  $\dot{\mu}$ . Il se trouve que le vecteur  $\vec{w}_1$  convient et permet de plus d'éviter l'inconnue  $\dot{\gamma}$ . En exprimant alors le vecteur  $\vec{AC} = r \vec{y}_2$ , la loi entrée-sortie recherchée s'écrit très simplement par

$$\dot{\alpha} r (\vec{z}_1, \vec{y}_2, \vec{w}_1) = \dot{\lambda} \quad (16)$$

Le calcul du produit mixte se fait à partir des figures de définition des angles pour trouver finalement

$$\dot{\lambda} = r \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \theta \quad (17)$$

5. On superpose les deux positions demandées sur un même schéma réalisé ici à l'échelle 1 : 1



6. Sur le schéma précédent, on peut imaginer les mouvements et constater que les deux positions demandées correspondent aux positions extrêmes du piston 3 par rapport au bâti 1. Il suffit alors de mesurer directement la course  $c$  et on trouve  $c = 13,5$  mm.

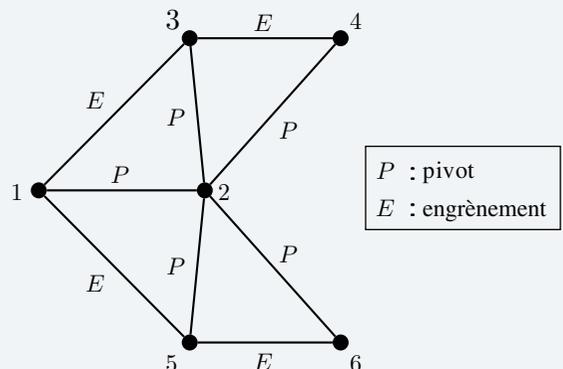
La relation (17) trouvée à la question (4) s'intègre en

$$\dot{\lambda} = -r \sin \theta \cos \alpha \quad (18)$$

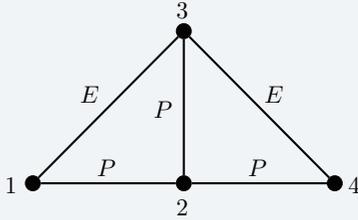
La course se calcule par  $c = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$  et on trouve  $c = 2r \sin \theta$ . Le résultat numérique donne  $c = 13,7$  mm.

#### 4.14

1. Le mécanisme étudié comporte quatre chaînes fermées de six solides.



Ce mécanisme présente une symétrie de structure, complétée d'une symétrie de propriétés géométriques. En conséquence, on peut se limiter à l'étude de l'ensemble {1,2,3,4}.



2. Montrer que le bac 4 est en mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 1 nécessite deux étapes :

- calculer le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(4/1)$  et montrer qu'il est à chaque instant nul ;
- identifier la trajectoire d'un point dans le mouvement 4/1 et vérifier qu'elle est circulaire.

On écrit les torseurs cinématiques associés aux trois liaisons pivot

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{21} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad \mathcal{V}(4/2) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{42} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{V}(3/2) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{32} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

La composition des vecteurs rotation sur la chaîne ouverte 1 – 2 – 4 permet d'écrire

$$\vec{\Omega}(4/1) = \omega_{41} \vec{z}_2, \text{ avec } \omega_{41} = \omega_{42} + \omega_{21} \quad (1)$$

On n'a pas besoin de caractériser les torseurs cinématiques associés aux engrenements, car on reconnaît à partir du graphe des liaisons deux mécanismes « engrenage », pour lesquels les trois axes de rotation des liaisons pivot sont immobiles dans un repère attaché au bras motorisé 2. Les rapports de transmission s'expriment alors simplement

$$\frac{\omega_{32}}{\omega_{12}} = -\frac{Z_1}{Z_3} \quad \frac{\omega_{42}}{\omega_{32}} = -\frac{Z_3}{Z_4}$$

On multiplie membre à membre ces deux dernières équations pour éliminer la vitesse de rotation  $\omega_{32}$

$$\frac{\omega_{42}}{\omega_{12}} = +\frac{Z_1}{Z_4}$$

Il suffit d'exploiter ensuite l'équation (1) pour écrire

$$\frac{\omega_{41} - \omega_{21}}{-\omega_{21}} = +\frac{Z_1}{Z_4}$$

Le résultat recherché est immédiat après arrangement des termes précédents

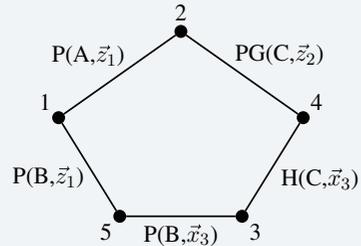
$$\frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = +\frac{Z_4 - Z_1}{Z_4}$$

Les nombres de dents de la roue 4 et du bâti 1 sont identiques, on en déduit qu'à chaque instant, le taux de rotation  $\omega_{41}$  est nul : les bacs b4 et b6 sont en mouvement de translation par rapport au bâti 1.

De plus, le point B est sur l'axe de rotation du mouvement 4/2 et le point B a une trajectoire circulaire dans le mouvement 2/1. On en déduit que le point B a également une trajectoire circulaire dans le mouvement 4/1 : les bacs b4 et b6 sont en conséquence en mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 1.

#### 4.15

Le graphe des liaisons comporte 5 sommets et 5 arcs



Graphe des liaisons du MAXPID.

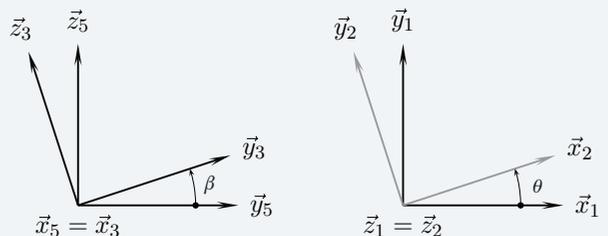
Ce mécanisme admet six inconnues cinématiques que l'on pose en écrivant les cinq torseurs cinématiques

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad \mathcal{V}(2/4) = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{24} \vec{z}_2 \\ V_{24} \vec{z}_2 \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{V}(4/3) = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{43} \vec{x}_3 \\ p \omega_{43} \vec{x}_3 \end{array} \right.} \quad \mathcal{V}(3/5) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

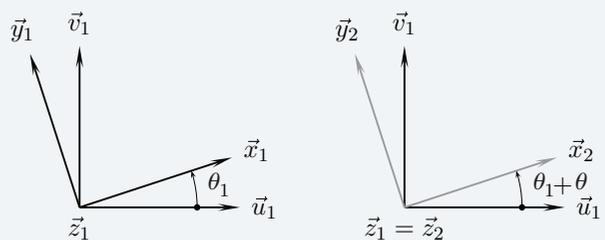
$$\mathcal{V}(5/1) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{51} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

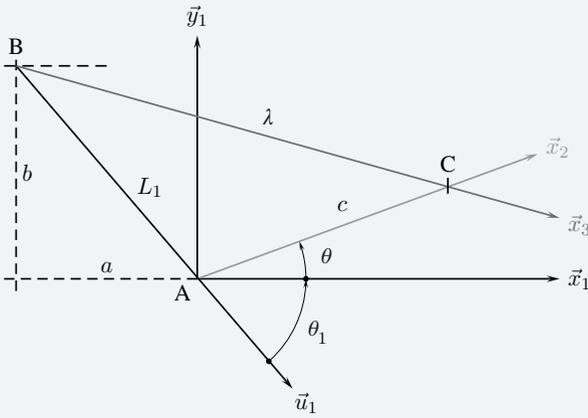
Les angles concernés par la loi entrée-sortie sont les angles  $\beta$  et  $\theta$



2. Le schéma cinématique se trace en trois étapes :

- choix du bras horizontal,  $\theta = 0$ , comme position de référence. Les bases vectorielles  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  sont confondues dans cette position, ainsi que les bases  $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ ,  $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  et  $(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ .





Épure du schéma cinématique du MAXPID.

– mise en place de la géométrie du mécanisme sur une épure, comme le propose la figure ci-dessus. On complète alors les figures de définition des angles avec la définition des angles  $\theta_1$  et  $\theta_1 + \theta$

– habillage de l'épure avec les symboles cinématiques.

3. Le vecteur  $\vec{BC} = \lambda \vec{x}_3$  est un des vecteurs positions pour le point C dans un repère lié à 3. On en déduit que

$$V_{43} = p\omega_{43} = \dot{\lambda}$$

Le mécanisme comporte une chaîne fermée de solides, sur laquelle l'équation de fermeture cinématique s'écrit par exemple

$$\mathcal{V}(2/1) = \mathcal{V}(2/4) + \mathcal{V}(4/3) + \mathcal{V}(3/5) + \mathcal{V}(5/1) \quad (19)$$

L'équation de résultante scalaire  $\vec{x}_3$  donne

$$\omega_{43} + \dot{\beta} = 0$$

soit, après substitution

$$\dot{\lambda} = -p\dot{\beta} \quad (20)$$

4. L'équation de fermeture cinématique (19) définit un système de six équations scalaires à six inconnues.

La loi de composition des vitesses en B évite  $\vec{\mathcal{D}}(5/1)$ . Cette même loi scalaire  $\vec{BC}$  évite de plus  $\vec{\mathcal{D}}(2/4)$ , et on obtient

$$\left( \vec{\mathcal{D}}(2/1) \wedge \vec{AB} \right) \cdot \vec{BC} = \vec{V}(B,4/3) \cdot \vec{BC}$$

Pour éviter les angles indésirables, le vecteur  $\vec{BC}$  est respectivement pris égal à  $\vec{BA} + \vec{AC}$  et  $\lambda \vec{x}_3$ . Ceci donne, après substitution

$$(\dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge -L_1 \vec{u}_1) \cdot c \vec{x}_2 = \dot{\lambda} \vec{x}_3 \cdot \lambda \vec{x}_3$$

Le résultat est immédiat avec la figure de définition de l'angle  $\theta_1 + \theta$

$$-\dot{\theta} c L_1 \sin(\theta_1 + \theta) = \dot{\lambda} \lambda \quad (21)$$

Cette équation différentielle (21) s'intègre pour donner

$$c L_1 \cos(\theta + \theta_1) = \frac{1}{2} \lambda^2 + cste$$

Pour déterminer la constante d'intégration, on reconnaît une partie du développement de l'égalité géométrique  $\vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2$  écrite sur le triangle (ABC) et on obtient finalement

$$\lambda^2 = L_1^2 + c^2 + 2cL_1 \cos(\theta_1 + \theta) \quad (22)$$

5. L'équation (20) s'intègre également rapidement

$$\lambda - \lambda_0 = -p(\beta - \beta_0)$$

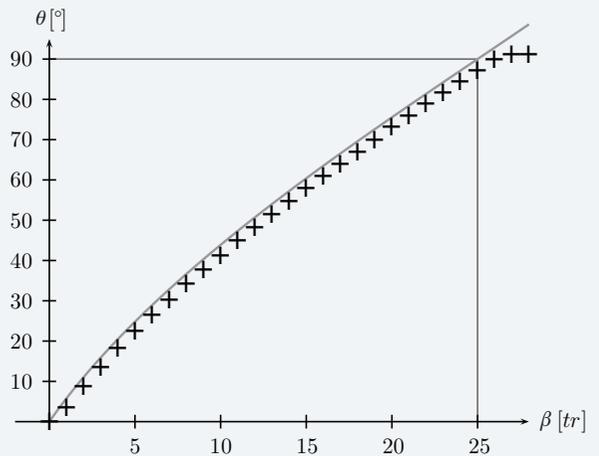
Pour déterminer la constante d'intégration, on choisit  $\beta_0 = 0$  pour  $\theta = 0$ , et dans cette configuration,  $\lambda_0 = \sqrt{b^2 + (a + c)^2}$ , soit  $\lambda_0 = 170 \text{ mm}$ . L'équation finale est ainsi

$$\theta = \arccos\left(\frac{(\lambda_0 - p\beta)^2 - L_1^2 - c^2}{2cL_1}\right) - \theta_1 \quad (23)$$

On trace la courbe correspondante et on lui superpose les points expérimentaux

La lecture de ces courbes permet de remarquer :

- une saturation du capteur après  $90^\circ$  ;
- une linéarisation possible pour les valeurs de  $\theta$  supérieures à  $\approx 40^\circ$  ;
- un décalage systématique entre les courbes réelles et théoriques, qui incite à vérifier sur le système réel les valeurs numériques données.



Superposition de la courbe théorique et des points expérimentaux.

## Plan

5.1	Concept d'action mécanique	118
5.2	Modèles d'actions mécaniques transmissibles	125
5.3	Les lois du frottement	132
	Exercices d'application	137
	Exercices d'approfondissement	140
	Solutions des exercices	143

## Introduction

Ce chapitre s'attaque au domaine apparemment le plus délicat de la mécanique, celui des actions mécaniques. En effet, la notion de force est connue depuis la nuit des temps, avec comme image associée une flèche. Cette force pousse, et peut créer du mouvement, voire déformer. Là où cela se complique, c'est qu'une même force peut suivant les cas provoquer une translation ou une rotation ! De telles situations surprenantes sont à modéliser.

Au cours de la longue histoire des sciences, la flèche est devenue un vecteur, mais ce dernier ne suffit pas pour expliquer. Il faut au moins un point, le point d'application du lycéen. L'alliance improbable d'un vecteur et d'un point a fait long feu et a rapidement laissé la place au torseur. Les actions mécaniques sont un des domaines qui ont le plus tracassé ingénieurs et chercheurs, au point qu'une grande partie de la terminologie employée encore aujourd'hui vient de cette préoccupation. Torseur, glisseur, couple sont des exemples immédiats de cet héritage.

Aujourd'hui, entre « réalité invisible » et « idée géniale » pour définir une action mécanique, les auteurs de cet ouvrage choisissent sans hésitation la deuxième proposition.

## Prérequis

- La cinématique du solide indéformable ;
- Les outils de calculs vectoriels ;
- Notion de milieu environnant ;
- Notion de puissance.

## Objectifs

- Appréhender une action mécanique ;
- Savoir distinguer l'approche locale de l'approche globale ;
- Savoir proposer des modèles dans les situations courantes ;
- Savoir modéliser le phénomène de frottement.

## 5.1 Concept d'action mécanique

Un concept est une représentation mentale abstraite .

### Définition

Une **action mécanique** est un concept construit par dualité avec la cinématique, pour simuler et expliquer déformations et mouvements, pour dimensionner les composants.

Cette définition veut clairement dire qu'il est illusoire

- de vouloir montrer une action mécanique ;
- de poser l'action mécanique comme cause de déplacements ou de déformations.

Bien au contraire, c'est parce que le mécanicien enregistre une modification de mouvement ou un maintien d'équilibre qu'il utilise des outils de description construits en corrélation avec ce qu'il voit pour essayer de simuler les constatations expérimentales.

### Exemple

Pour savoir si un bagage inconnu est lourd, le plus simple est de le prendre et de le soulever. Si cette opération est facile, on dira qu'il est léger. Dans le cas contraire, on dira qu'il est lourd.

Cette expérience entraîne plusieurs remarques :

- sans tentative de mise en mouvement, personne ne peut formuler d'avis ;
- la mise en mouvement est faite dans la direction de la pesanteur ;
- l'évaluation du poids se fait par corrélation entre le mouvement généré ou empêché et l'énergie mise en œuvre pour cela ;
- la mise en mouvement ou le maintien en position résulte donc d'une dépense d'énergie.

On peut en complément constater qu'il n'existe pas de capteur pour des mesures *directes* d'efforts. Les différentes technologies exploitent des déplacements induits par la déformation de ressorts, de jauges de déformation ou de cellules piézo-électriques.

### 5.1.1 Notation

En cinématique, un mouvement est noté  $i/k$ , ce qui se lit le mouvement de  $i$  par rapport à  $k$ .

L'indice  $i$  désignant l'objet étudié, l'action mécanique à considérer est l'action qui s'exerce sur cet objet  $i$ . Si son origine est désignée par  $j$ , l'action mécanique de  $j$  sur  $i$  se note très facilement  $j/i$ .

Néanmoins, la ressemblance de l'action mécanique  $j/i$  avec le mouvement  $j/i$  est grande et les confusions qui s'ensuivent sont nombreuses. Cette notation est donc à réserver à l'expert et le débutant adopte avec profit la notation construite autour d'une flèche  $j \rightarrow i$ .

### Exemple

- action de la pesanteur sur 3 :  $p \rightarrow 3$
- action de la pièce 4 sur 2 :  $4 \rightarrow 2$
- action d'un moteur  $m$  sur l'arbre  $k$  :  $m \rightarrow k$
- action d'un ressort  $r$  sur un solide  $s$  :  $r \rightarrow s$



Ce que l'on voit est raconté par la cinématique...



« De qui sur qui ? » est la question à laquelle il faut savoir à chaque instant répondre !

## 5.1.2 Théorème des actions réciproques

### Définition

Soit  $j \rightarrow i$  l'action mécanique d'un élément  $j$  sur un élément  $i$ . On appelle **action réciproque** de  $j \rightarrow i$  l'action mécanique  $i \rightarrow j$  de l'élément  $i$  sur l'élément  $j$ .

Dans l'attente du cours de dynamique, on pose pour cette année le théorème suivant :

### Théorème

Une force  $\vec{F}(i \rightarrow j)$  posée de  $i$  sur  $j$  est opposée à l'action réciproque  $\vec{F}(j \rightarrow i)$

$$\vec{F}(i \rightarrow j) = -\vec{F}(j \rightarrow i) \quad (1)$$

## 5.1.3 Point de vue local

Le point de vue local concerne le modèle proposé pour un point. Ainsi, soit  $P$  un point concerné par l'action mécanique d'un élément 1 sur un élément 2.

Le modèle d'action mécanique retenu est une force élémentaire notée  $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ , dont la forme varie en fonction du domaine  $D$  sur lequel est défini le point courant  $P$ , ce que résume le tableau ci-dessous

Nature du domaine	Élément géométrique différentiel	Nom	Unité	Force élémentaire $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$
Point	1	Force $\vec{F}$	[N]	$\vec{F}$
Ligne	dl	Force linéique $\vec{q}$	[Nm <sup>-1</sup> ]	$\vec{q}dl$
Surface	dS	Force surfacique $\vec{q}$	[Pa]	$\vec{q}dS$
Volume	dV	Force volumique $\vec{q}$	[Nm <sup>-3</sup> ]	$\vec{q}dV$

### Exemple 1 Force de rappel d'un ressort

Soit un ressort de longueur à vide  $a$  et de raideur  $k$  monté entre deux solides. Le physicien propose une loi de comportement formulée ainsi : « Un ressort exerce une force de rappel proportionnelle à son allongement. »

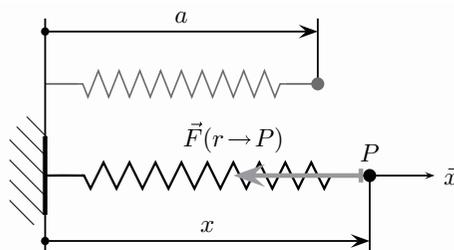


Figure 5.1 La force de rappel d'un ressort.



Le suffixe en « -ique » signifie par *unité de*.

Il est nécessaire de pouvoir s'adapter à toutes les situations. C'est pourquoi la méthode est plus importante que la formule!

Par exemple, la figure (5.1) propose une masse accrochée à un ressort au point  $P$ . Pour traduire la proposition du physicien en équation, il est nécessaire de procéder méthodiquement :

- l'allongement est orienté par le vecteur  $\vec{x}$  ;
- l'action mécanique évaluée est la force de rappel exercée par le ressort sur la masse en  $P$ , soit  $\vec{F}(r \rightarrow P)$  ;
- l'allongement est égale à la différence entre la longueur courante notée ici  $x$  et la longueur à vide  $a$ .

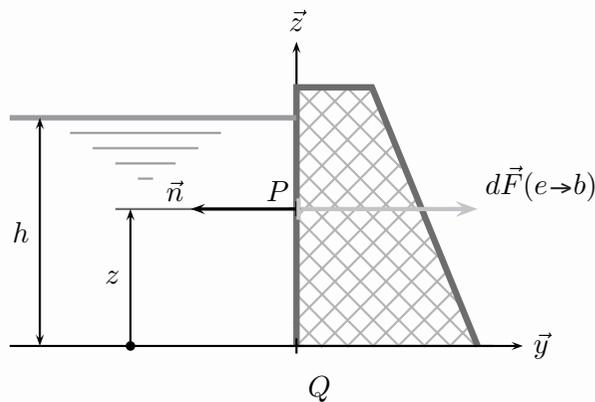
C'est ainsi que l'on peut écrire l'expression de la force de rappel

$$\vec{F}(r \rightarrow P) = -k(x - a)\vec{x} \quad (2)$$

**Exemple 2** Force de pression hydrostatique

Soit une retenue d'eau de hauteur  $h$  matérialisée par un barrage noté  $b$  de largeur  $L$  supposée constante :

- on s'intéresse au point courant  $P$  situé à la cote  $z$  et on pose  $dS$  la surface de barrage élémentaire prise autour de ce point ;
- les lois de l'hydrostatique propose une répartition linéaire de pression depuis la surface, soit  $p(z) = \rho_e g(h - z)$ , avec  $\rho_e$  la masse volumique du fluide considéré, ici de l'eau ;
- on pose  $\vec{n}$  la normale sortante à la paroi au point  $P$ , donc dirigée du barrage vers l'eau.



**Figure 5.2** Force de pression hydrostatique sur une paroi.

On modélise l'action mécanique ( $e \rightarrow b$ ) de l'eau sur le barrage par une force élémentaire  $d\vec{F}(e \rightarrow b)$  au point courant  $P$  de la paroi dont on peut écrire l'expression à partir des différentes données

$$d\vec{F}(e \rightarrow b) = -p(z) dS \vec{n} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p(z) = \rho_e g(h - z) \\ dS = L dz \end{cases} \quad (3)$$

**Exemple 3** Force de pesanteur

Soit un corps pesant noté 2, homogène, de masse volumique  $\rho$ , soumis à un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$  orienté par le vecteur  $-\vec{z}$  : le point courant  $P$  de volume élémentaire  $dV$  est soumis à l'action élémentaire suivante

$$d\vec{F}(p \rightarrow 2) = -\rho g dV \vec{z} \quad (4)$$

## 5.1.4

## Point de vue global

En mécanique du solide indéformable, le modèle retenu pour décrire les mouvements possibles est le torseur. Par dualité, c'est donc ce même modèle, un torseur, qui est posé pour les actions mécaniques transmissibles.

## Notation

Le champ des vecteurs vitesses étant nommé  $\mathcal{V}$ , en lettre cursive majuscule, il est donc judicieux de noter  $\mathcal{F}$  le torseur des actions mécaniques, également en lettre cursive majuscule.

## Définition

On appelle **torseur des actions mécaniques** exercées par un objet  $i$  sur un objet  $k$  le torseur construit par dualité avec la cinématique pour exprimer la puissance développée lors d'un mouvement  $k/j$ .

$$\mathcal{F}(i \rightarrow k) = \begin{cases} \vec{R}(i \rightarrow k) \\ \vec{M}(Q, i \rightarrow k) \end{cases} \quad (5)$$

Le vecteur résultante  $\vec{R}(i \rightarrow k)$  et le vecteur moment  $\vec{M}(Q, i \rightarrow k)$  sont les éléments de réduction de ce torseur au point  $Q$ .

Le paragraphe suivant explicite cette définition en montrant le lien entre le point de vue local et le point de vue global.

## 5.1.5

## Du point de vue local au point de vue global

Soit une action mécanique de 1 sur 2 décrite du point de vue local sur un domaine  $D$  par la force élémentaire  $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$ .

Soient  $P$  le point courant et  $Q$  un point quelconque, mais constant une fois choisi. Le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 se détermine à partir de la force élémentaire posée au point  $P$  par les relations

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = \int_D d\vec{F}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(Q, 1 \rightarrow 2) = \int_D \vec{QP} \wedge d\vec{F}(1 \rightarrow 2) \end{cases} \quad (6)$$

L'expression ainsi construite prend tout son sens lorsque l'on réalise que l'action mécanique élémentaire posée avec une force ne comporte pas de composante associée à une rotation.

Appelons  $1_P \rightarrow 2$  l'action mécanique en se limitant au domaine du seul point  $P$ . On pose ainsi de manière implicite :

- une résultante  $d\vec{F}(1_P \rightarrow 2) = d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$  ;
- un moment  $\vec{M}(P, 1_P \rightarrow 2) = \vec{0}$ .

La formule de changement de points donne à partir de ces deux vecteurs la forme recherchée.

$$\vec{M}(Q, 1_P \rightarrow 2) = \vec{M}(P, 1_P \rightarrow 2) + d\vec{F}(1_P \rightarrow 2) \wedge \vec{PQ}$$

Il suffit alors de sommer toutes les actions mécaniques ( $1_P \rightarrow 2$ ) pour trouver l'ac-

La puissance comme comoment de deux torseurs  $\mathcal{F}(i \rightarrow k) \otimes \mathcal{V}(k/j)$  est une notion développée lors du cours de dynamique en deuxième année.

Le domaine  $D$  est soit un point, une ligne, une surface ou un volume...



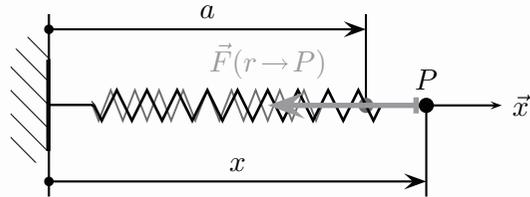
C'est le principe même de la somme de torseurs !

tion mécanique globale de  $(1 \rightarrow 2)$ . Autrement dit, l'action mécanique globale  $(1 \rightarrow 2)$  est la somme de toutes les contributions en prenant soin de prendre un point d'observation  $Q$  quelconque, mais unique !

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \sum_P \mathcal{F}(1_P \rightarrow 2)$$

**Exemple 1** Force de rappel d'un ressort

Soit le ressort présenté précédemment sur la figure (5.1).



**Figure 5.3** La force de rappel d'un ressort.

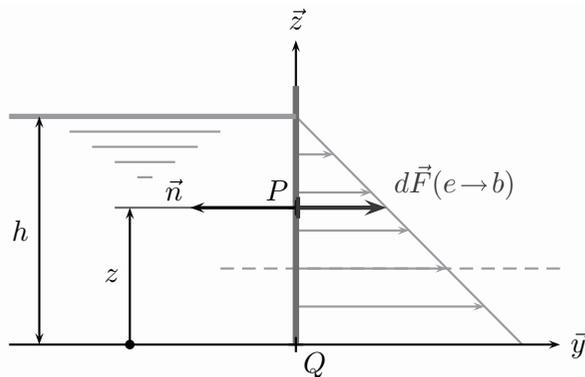
Le domaine n'est constitué que du seul point  $P$  et la force de rappel  $\vec{F}(r \rightarrow P)$  y est posée par  $\vec{F}(r \rightarrow P) = -k(x - a)\vec{x}$

L'expression du torseur des actions mécaniques est alors immédiate : c'est un glisseur d'axe central passant par le point  $P$

$$\mathcal{F}(r \rightarrow P) = P \left\{ \begin{array}{l} -k(x - a)\vec{x} \\ 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

**Exemple 2** Force de pression hydrostatique

Soit le barrage défini précédemment sur la figure (5.3).



**Figure 5.4** Force de pression hydrostatique sur une paroi.

Le domaine est constitué de la surface de contact entre l'eau et le barrage, et la force élémentaire au point courant  $P$  de la paroi a été posée égale à  $d\vec{F}(e \rightarrow b) = -p(z) dS \vec{n}$ , avec  $p(z) = \rho_e g(h - z)$  et  $dS = Ldz$

– pour la résultante :

$$\vec{R}(e \rightarrow b) = - \int_0^h \rho_e g(h - z) L dz \vec{n}$$

– pour le moment au point  $Q$  :

$$\vec{M}(Q, e \rightarrow b) = \int_0^h z \vec{z} \wedge -\rho_e g (h - z) \vec{n} L dz$$

On en déduit l'expression du torseur  $\mathcal{F}(e \rightarrow b)$  au point  $Q$

$$\mathcal{F}(e \rightarrow b) = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho_e g L h^2 \vec{y} \\ -\frac{1}{6} \rho_e g L h^3 \vec{x} \end{cases} \quad (8)$$

### Exemple 3 Force de pesanteur

Soit le corps pesant 2 du troisième exemple. On le suppose de masse totale  $m$ .

La masse volumique  $\rho$  et l'accélération de la pesanteur  $g$  sont supposées constantes : l'intégrale  $\int_V -\rho g dV$  se calcule immédiatement en  $-\rho g V$ , soit encore  $-mg$ . Par définition du centre de masse  $G$ , l'intégrale  $\int_V \vec{r} \wedge d\vec{F}(p \rightarrow 2)$  est nulle. L'action de la pesanteur est modélisée par un glisseur dont l'axe central passe par  $G$ .

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = \begin{cases} -mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} \quad (9)$$

Il n'y a pas équivalence entre le point de vue local et le point de vue global :

- les trois exemples de descriptions locales proposés donnent dans les cas envisagés des glisseurs ;
- ces trois descriptions locales sont différentes.

Plusieurs exercices en fin de chapitre proposent des configurations moins triviales.

## 5.1.6 Dessiner une action mécanique

Soit un torseur d'action mécanique  $\mathcal{F}(i \rightarrow k)$  dont on connaît les éléments de réduction en un point  $P$ . Il est toujours possible de décomposer ce torseur en somme d'un torseur-glisseur et d'un torseur-couple.

$$\begin{cases} \vec{R}(i \rightarrow k) \\ \vec{M}(P, i \rightarrow k) \end{cases} = \begin{cases} \vec{R}(i \rightarrow k) \\ \vec{0} \end{cases} + \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{M}(P, i \rightarrow k) \end{cases} \quad (10)$$

Le glisseur est le modèle global d'actions mécaniques associé à une force, et comme cela se fait sans hésiter avec la pesanteur pour dessiner le vecteur-poids issu du centre de masse, il est intéressant de pouvoir dessiner le vecteur-résultante  $\vec{R}(i \rightarrow k)$  de ce glisseur sur son axe central, voire ses composantes lors d'une recherche systématique d'actions mécaniques.

De la même manière, il peut être intéressant de dessiner le vecteur-couple  $\vec{M}(P, i \rightarrow k)$  par une flèche habituellement dessinée sur l'axe de rotation.

### Exemple

Soit par exemple un arbre de transmission monté entre un moteur et un récepteur. Le mécanisme est schématisé sur la figure (5.5) et comprend :

- un bâti 1, auquel on associe un repère  $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On pose  $\vec{CA} = L_1 \vec{z}_1$ .
- un arbre 2, guidé en rotation par deux roulements à billes dont le montage induit comme modèle de comportement cinématique deux liaisons en parallèle :



La résultante n'est pas nulle, l'automoment est nul, le torseur  $\mathcal{F}(e \rightarrow b)$  est un glisseur :

Vérifiez que l'axe central est une droite horizontale située au tiers de la hauteur !

On déduit le torseur des actions mécaniques à partir de la description locale. La réciproque est fautive !

Une image vaut mille mots, dit-on, et ces représentations sont effectivement commodes, mais un torseur ne peut pas être assimilé à ces images !



Cet exemple, pour être significatif, anticipe des propositions exposées dans la section suivante pour les liaisons et l'engrenage et dans le chapitre suivant pour le couple moteur...

- une liaison sphérique de centre  $A$  ;
- une liaison sphère cylindre, de centre  $B$  et d'axe  $(A, \vec{z}_1)$ , avec  $\|\vec{AB}\| = L_2$ .

Cet arbre comporte un pignon à denture hélicoïdale qui engrène avec un pignon récepteur  $r$  au point  $E$ . Enfin, il est entraîné en rotation par un moteur  $m$ .

D'un point de vue cinématique, les trois points  $A$ ,  $B$  et  $E$  sont immobiles à chaque instant dans le mouvement de 2 par rapport à 1.

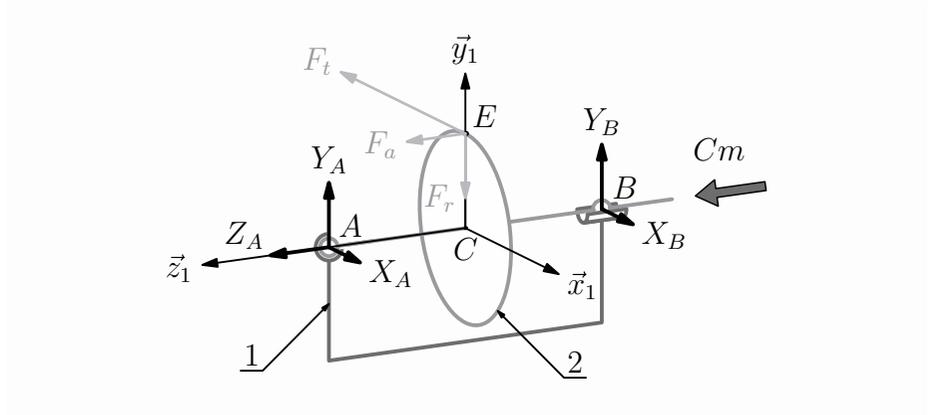


Figure 5.5 Dessiner des actions mécaniques ?

Concernant les actions mécaniques, on suppose connue la seule action mécanique  $r \rightarrow 2$  :

- le pignon récepteur  $r$  engrène au point  $E$  et le glisseur  $\mathcal{F}(r \rightarrow 2)$  est supposé connu. Comme le point  $E$  est immobile dans le mouvement de 2 par rapport à 1, les trois composantes de la résultante sont données dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et sont respectivement :
  - une composante tangentielle  $F_t$ , supposée négative, suivant  $\vec{x}_1$  ;
  - une composante radiale  $F_r$ , toujours négative, suivant  $\vec{y}_1$  ;
  - une composante axiale  $F_a$ , supposée positive, suivant  $\vec{z}_1$ .

$$\mathcal{F}(r \rightarrow 2) = \underset{E}{\vec{0}} \begin{cases} -F_t \vec{x}_1 - F_r \vec{y}_1 + F_a \vec{z}_1 \end{cases}$$

- l'action du moteur sur 2 est un couple de moment  $Cm \vec{z}_1$ , où  $Cm$  est l'inconnue scalaire appelé couple moteur que l'on pose alors positive.

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{0} \\ Cm \vec{z}_1 \end{cases}$$

- les actions mécaniques transmissibles par les deux liaisons sphériques et sphère-cylindre sont des glisseurs dont les actions centraux passent respectivement par les centres  $A$  et  $B$ . Les cinq inconnues scalaires correspondantes sont posées positives.

$$\mathcal{F}(1_A \rightarrow 2) = \underset{A}{\vec{0}} \begin{cases} X_A \vec{x}_1 + Y_A \vec{y}_1 + Z_A \vec{z}_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(1_B \rightarrow 2) = \underset{B}{\vec{0}} \begin{cases} X_B \vec{x}_1 + Y_B \vec{y}_1 \end{cases}$$

## 5.2 Modèles d'actions mécaniques transmissibles

### 5.2.1

Le frottement est abordé à la section 5.3.1 à la page 130.

Cette expression sera justifiée lors du cours sur la dynamique.

Le symbole  $\mathcal{F}$  est à lire « torseur des actions mécaniques transmissibles » dans le cas des liaisons et des contacts.

Pour une liaison à centre, le symbole cinématique se dessine au centre de la liaison et la forme du torseur cinématique est donnée pour ce point. Il en est de même pour le torseur des actions mécaniques transmissibles.

De la même manière que l'on s'intéresse aux mouvements *possibles* en cinématique, et que l'on définit la forme possible des torseurs cinématiques, on s'intéresse aux particularités des torseurs des actions mécaniques *transmissibles* par les liaisons usuelles d'une part, et lors de contacts particuliers d'autre part.

### Liaisons usuelles

La forme du torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison usuelle est *a priori* connue dans le cas où l'on ne tient pas compte du phénomène de frottement. En effet, en l'absence de frottement, la puissance dissipée par échauffement au niveau de la liaison est supposée nulle. On admet dans ce chapitre l'expression de la puissance développée au niveau de la liaison entre deux solides 1 et 2, qui s'écrit simplement

$$P(1 \leftrightarrow 2) = \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2/1) \quad (11)$$

Le comoment défini ci-dessus se détaille à partir des éléments de réduction des deux torseurs. On obtient ainsi la somme nulle de deux produits scalaires indépendants.

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2/1) = \vec{R}(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{V}(Q, 2/1) + \vec{M}(Q, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{\Omega}(2/1) = 0 \quad (12)$$

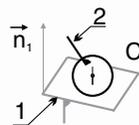
Le détail de ces deux produits scalaires conduit à la somme de six termes scalaires indépendants. Ils sont de plus tous de même signe. On en déduit la forme duale des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées sans frottement :

- pour chaque degré de liberté supprimé, on pose une inconnue scalaire d'actions mécaniques transmissibles ;
- réciproquement, aucune composante d'action mécanique n'est transmissible là où une composante de mouvement est possible.

#### Les liaisons à centre

- **Sphère Plan** de centre  $C_2$  de normale  $\vec{n}_1$ .

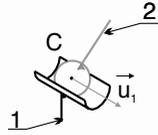
Cette liaison admet 5 degrés de liberté, empêche une seule translation. La résultante du torseur d'actions mécaniques transmissibles par la liaison *parfaite* ne comporte qu'une seule composante scalaire non nulle suivant la normale  $\vec{n}_1$  et le moment calculé au centre de la liaison est nul.



$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = C_2 \begin{Bmatrix} F_{12} \vec{n}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- **Sphère Cylindre** de centre  $C_2$  et d'axe  $(C_1, \vec{u}_1)$

Cette liaison admet quatre degrés de liberté. Seule la résultante comporte deux composantes indépendantes et le moment est nul au centre de la liaison. Le vecteur vitesse  $\vec{V}(C, 2/1)$  est suivant  $\vec{u}_1$ , donc la résultante  $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$  est orthogonale à  $\vec{u}_1$ .



$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = {}_{C_2} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2), \text{ avec } \vec{R}(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

- **Sphérique** de centre  $C$

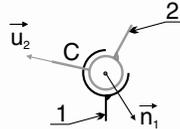
Cette liaison admet trois degrés de liberté en rotation : le moment est nul au centre de la liaison et la résultante est quelconque.



$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = {}_C \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(k \rightarrow i) \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

- **Sphérique à doigt** de centre  $C$ , d'axe  $(C, \vec{u}_2)$  et de normale  $\vec{n}_1$

Cette liaison admet deux degrés de liberté en rotation, à savoir la rotation d'axe  $(C, \vec{u}_2)$  et autour de la droite  $(C, \vec{n}_1)$ . La résultante est ainsi quelconque et le moment au centre de la liaison n'a qu'une composante suivant  $\vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2$ .

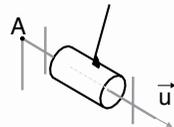


$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = {}_C \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(k \rightarrow i) \\ M_{ki} \vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2 \end{array} \right.$$

### Les liaisons à axe

- **Pivot** d'axe  $(A, \vec{u})$

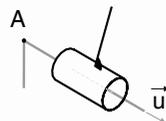
Cette liaison n'admet qu'un seul degré de liberté en rotation. Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  est suivant  $\vec{u}$ , donc le moment en un point  $A$  de l'axe  $\vec{M}(A, k \rightarrow i)$  est orthogonale à  $\vec{u}$ .



$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(k \rightarrow i) \\ \vec{M}(A, k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{M}(A, k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0 \end{array} \right.$$

- **Pivot glissant** d'axe  $(A, \vec{u})$

Cette liaison admet deux degrés de liberté, la translation suivant  $\vec{u}$  et la rotation d'axe  $(A, \vec{u})$ . Résultante et moment en un point de l'axe sont donc orthogonaux à  $\vec{u}$ .



$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{R}(k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{M}(A, k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{M}(A, k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0 \end{array} \right.$$

- **Hélicoïdale** d'axe  $(A, \vec{u})$

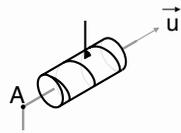
Cette liaison n'admet qu'un seul degré de liberté, la translation suivant  $\vec{u}$  étant lié à la rotation d'axe  $(A, \vec{u})$ . Le calcul mérite alors d'être détaillé : On cherche la forme de  $\mathcal{F}(k \rightarrow i)$ , sachant que

$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) \otimes \mathcal{V}(i/k) = 0, \text{ avec } \mathcal{V}(i/k) = {}_A \left\{ \begin{array}{l} \omega_{ik} \vec{u} \\ p \omega_{ik} \vec{u} \end{array} \right.$$



Pour une liaison à axe, la forme du torseur cinématique est la même en tout point de l'axe !

Le détail du comoment donne  $\vec{R}(k \rightarrow i) \cdot p\omega_{ik}\vec{u} + \vec{M}(A, k \rightarrow i) \cdot \omega_{ik}\vec{u} = 0$ , et on peut simplifier cette expression en factorisant  $\omega_{ik}$  qui n'a aucune raison d'être nul.

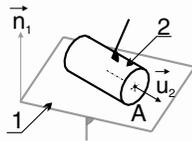


$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \begin{cases} \vec{R}(k \rightarrow i) \\ \vec{M}(A, k \rightarrow i) \end{cases}$$

avec  $p\vec{R}(k \rightarrow i) \cdot \vec{u} + \vec{M}(A, k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0$

- **Cylindre** d'axe  $(A, \vec{u}_2)$  **Plan** de normale  $\vec{n}_1$

Cette liaison admet quatre degrés de liberté. La translation annulée est suivant  $\vec{n}_1$  et la rotation impossible est orientée par  $\vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2$ . En conséquence, la résultante et le moment en un point de l'axe sont respectivement suivant  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2$ .

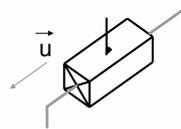


$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = A \begin{cases} F_{ki}\vec{n}_1 \\ M_{ki}\vec{n}_1 \wedge \vec{u}_2 \end{cases}$$

### Les liaisons à direction

- **Glissière** de direction  $\vec{u}$

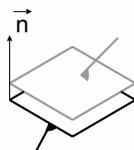
Cette liaison n'admet qu'un seul degré de liberté en translation. Le vecteur vitesse  $\vec{V}(Q, i/k)$  est suivant  $\vec{u}$ , donc la résultante est orthogonale à  $\vec{u}$ .



$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \begin{cases} \vec{R}(k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{R}(k \rightarrow i) \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{M}(Q, k \rightarrow i) \end{cases}$$

- **Appui plan** de normale  $\vec{n}$

Cette liaison admet trois degrés de liberté. Le vecteur vitesse  $\vec{V}(Q, i/k)$  est orthogonal à  $\vec{n}$ , donc la résultante est suivant  $\vec{n}$ . Le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  est suivant  $\vec{n}$ , donc le moment en un point  $Q$  quelconque  $\vec{M}(Q, k \rightarrow i)$  est orthogonale à  $\vec{n}$ .



$$\mathcal{F}(k \rightarrow i) = \begin{cases} F_{ki}\vec{n} \\ \vec{M}(Q, k \rightarrow i), \text{ avec } \vec{M}(Q, k \rightarrow i) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

## 5.2.2 Contact ponctuel

Comme on l'a vu lors de l'exposé du point de vue local à la page 117, le modèle d'actions mécaniques le plus élémentaire posé est une force associée à un point, dont le modèle global correspondant est un glisseur.

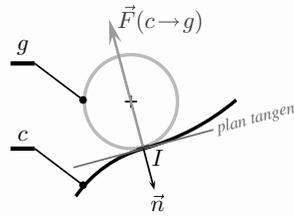
À chaque fois que l'on assimile un contact réel à un point, le modèle d'action mécanique transmissible peut être immédiatement posé en tant que glisseur, avec néanmoins une précaution à prendre : la force  $\vec{F}(i \rightarrow k)$  posée au point de contact réel ne peut être dirigée que de l'objet  $i$  vers l'objet  $k$ .



Pour une liaison à direction, la forme du torseur cinématique est la même en tout point de l'espace !

**Exemple**

Soit un galet  $g$  au contact d'une came  $c$  en un point  $I$ . On cherche à modéliser l'action mécanique de  $c$  sur  $g$ .



**Figure 5.6** L'action mécanique à poser lors d'un contact ponctuel.

Une fois définie la normale sortante  $\vec{n}$  du galet au point  $I$ , on pose

$$\mathcal{F}(c \rightarrow g)_I \begin{cases} -F_{cg}\vec{n}, & \text{avec } F_{cg} \geq 0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

- Le signe négatif traduit le sens *a priori* connu pour l'action de  $c$  sur  $g$  suivant  $-\vec{n}$ .
- La composante  $F_{cg}$  positive ou nulle traduit la conservation du contact au cours du temps.

En définitive, il convient de rester rigoureux et méthodique en toute circonstance. En effet, il est toujours possible de définir par exemple la normale  $\vec{n}_{cg} = -\vec{n}$ , orientée de  $c$  vers  $g$ . Dans ce cas, le torseur à poser est alors

$$\mathcal{F}(c \rightarrow g) = I \begin{cases} F_{cg}\vec{n}_{cg}, & \text{avec } F_{cg} \geq 0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

- Le signe positif traduit le sens *a priori* connu pour l'action de  $c$  sur  $g$  suivant  $\vec{n}_{cg}$ .
- La composante  $F_{cg}$  positive ou nulle traduit la conservation du contact au cours du temps.

### 5.2.3 Câbles

La traction consiste à tirer sur les extrémités du câble. Pousser ou tordre ne permettent pas d'entraîner une charge...

Un câble supposé sans masse, inextensible et infiniment flexible ne peut-être sollicité qu'en traction.

Dès lors, le brin tendu du câble est assimilable à une droite et l'action mécanique transmissible est modélisable par un glisseur d'axe central le brin tendu. On appelle *tension* le module de la résultante du glisseur ainsi posé.

**Exemple**

Soient deux solides 1 et 2 reliés par un câble tendu, comme schématisé sur la figure (5.7).



**Figure 5.7** Un câble tendu entre deux solides 1 et 2.

Les deux solides 1 et 2 sont en liaison et on pose alors comme torseur des actions mécaniques transmissibles par 1 sur 2 un glisseur d'axe central la droite  $(AB)$ .

$$1 \xrightarrow{\text{câble}} 2 \quad \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} k\vec{BA}, \text{ avec } k \geq 0 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

- L'action mécanique posée est celle de 1 sur 2, donc la résultante est orientée de  $B$  vers  $A$ , donc par le vecteur  $\vec{BA}$ .
- Le coefficient  $k$  est l'inconnue scalaire, en Newton par mètre  $[N/m^{-1}]$ , nécessairement positive.
- La tension dans le câble est donnée par le produit  $k\|\vec{AB}\|$ .

#### Remarque

Poser  $k\vec{BA}$  comme résultante dispense de définir un vecteur unitaire orientant le segment  $[BA]$ . Cette écriture rend la résolution ultérieure plus économe en écriture, donc plus efficace. Dans le cas néanmoins où un vecteur unitaire convenable  $\vec{u}$  serait défini par ailleurs, il peut être bien évidemment utilisé avec profit.

Poser  $\vec{u} = \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|}$  comme vecteur unitaire est possible, mais très fortement déconseillé, car ce choix conduit à des expressions très lourdes !

## 5.2.4

## Courroies

Une transmission par courroie comporte au moins une poulie menante et une poulie mené, donc un brin tendu et un brin dit « mou », parfois néanmoins tendu au repos. Le modèle défini au paragraphe précédent pour les câbles est à utiliser pour chaque brin tendu.

#### Exemple

Soient deux poulies 2 et 3 reliées par une courroie lisse mise en tension par un galet tendeur 4. Cette configuration est schématisée sur la figure (5.8) :

- La poulie 2, de rayon  $R_2$ , est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec un bâti 1. On la suppose motrice et tournant dans le sens positif par rapport au bâti.
- La poulie 3, de rayon  $R_3$ , est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti. On la suppose réceptrice.
- Le galet tendeur 4, de rayon  $R_4$ , est en liaison pivot avec un dispositif non représenté. La mise en tension de la courroie est obtenue par la translation suivant  $\vec{y}_1$  de ce dernier par rapport au bâti.
- On nomme  $H_{ik}$  le point d'enroulement sur la poulie  $i$  de la courroie vers la poulie ou le galet  $k$ .

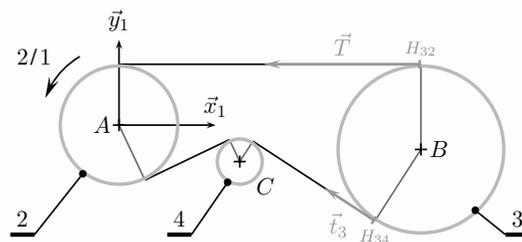


Figure 5.8 Une transmission par courroie.

D'un point de vue cinématique, on pose les inconnues cinématiques pour les deux liaisons pivot et la résolution de la chaîne fermée 1 – 2 – 3 – 1 est immédiate

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{V}(3/1) = \underset{B}{\begin{Bmatrix} \omega_{31} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \text{avec} \quad \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = + \frac{R_2}{R_3}$$

Concernant les actions mécaniques de la courroie  $c$  sur la poulie réceptrice 3, les deux brins sont tendus. En appelant  $c2$  et  $c4$  les brins dirigés respectivement vers la poulie 2 et le galet 4, on pose alors  $\mathcal{F}(c \rightarrow 3) = \mathcal{F}(c2 \rightarrow 3) + \mathcal{F}(c4 \rightarrow 3)$ , avec

$$\mathcal{F}(c2 \rightarrow 3) = \underset{H_{32}}{\begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{F}(c4 \rightarrow 3) = \underset{H_{34}}{\begin{Bmatrix} \vec{t}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

On choisit assez naturellement le point  $B$  de l'axe de rotation du mouvement 3/1 pour calculer les moments :

– action  $c2 \rightarrow 3$  :  $\vec{M}(B, c2 \rightarrow 3) = \overrightarrow{BH}_{32} \wedge \vec{T} = TR_3 \vec{z}_1$ , avec  $T \geq 0$ .

– action  $c4 \rightarrow 3$  :  $\vec{M}(B, c4 \rightarrow 3) = \overrightarrow{BH}_{34} \wedge \vec{t}_3 = -t_3 R_3 \vec{z}_1$ , avec  $t_3 \geq 0$ .

On obtient ainsi finalement

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 3) = \underset{B}{\begin{Bmatrix} \vec{T} + \vec{t}_3 \\ (T - t_3)R_3 \vec{z}_1 \end{Bmatrix}}, \quad \text{avec} \quad T \geq 0 \quad \text{et} \quad t_3 \geq 0$$

Le calcul de la résultante  $\vec{T} + \vec{t}_3$  est à mener ensuite au cas par cas, suivant les paramètres disponibles.

## 5.2.5 Engrenages

### Cas des dentures droites

Le modèle cinématique ayant permis la génération des dentures en développante de cercle est à reprendre.

#### Exemple

Soit un engrenage composé de deux pignons 2 et 3 à denture droite et profil en développante de cercle. Il est schématisé sur la figure (5.9) :

– on associe à un bâti 1 le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on pose  $\overrightarrow{AB} = e\vec{x}_1$  ;

– le pignon 2 supposé moteur, de rayon de base  $Rb_2$  comporte  $Z_2$  dents et est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1 ;

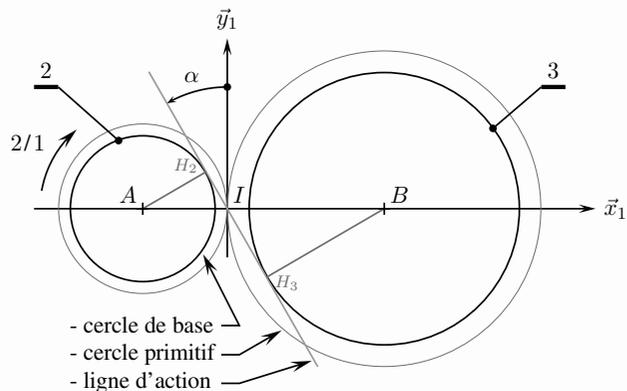


Figure 5.9 Transmission par engrenage.

– le pignon 3 supposé récepteur, de rayon de base  $Rb_3$  comporte  $Z_3$  dents et est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1.

D'un point de vue cinématique, on pose les inconnues cinématiques pour les deux liaisons pivot et la résolution de la chaîne fermée  $1 - 2 - 3 - 1$  a été étudiée au chapitre précédent, en partant du fait que l'engrenage est conçu pour que son comportement cinématique soit le roulement sans glissement des deux cercles primitifs au point de contact  $I$ .

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/1) = B \begin{Bmatrix} \omega_{31} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{Z_2}{Z_3}$$

De plus, on a constaté qu'au cours de l'engrènement, les points de contact successifs se déplaçaient sur le segment  $[H_2 H_3]$  tangent aux deux cercles de base, avec une normale au contact à chaque instant dirigé par le vecteur  $\overrightarrow{H_2 H_3}$ . On pose alors comme action mécanique transmissible un glisseur d'axe central la droite définie par le segment  $[H_2 H_3]$ . Cette droite est habituellement nommée *ligne d'action*.

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = I \begin{Bmatrix} F \cos \alpha \vec{y}_1 - F \sin \alpha \vec{x}_1, \text{ avec } F \geq 0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- Comme une dent de 2 ne peut que « pousser » une dent de 3,  $F$  est le module de la résultante, nécessairement positif.
- La composante  $F_t = F \cos \alpha$  est appelée composante tangentielle.
- La composante  $F_r = F \sin \alpha$  est appelée composante radiale.
- En cas d'inversion du sens de rotation, la ligne d'action change et devient la droite symétrique par rapport à l'axe  $(I, \vec{y}_1)$ .

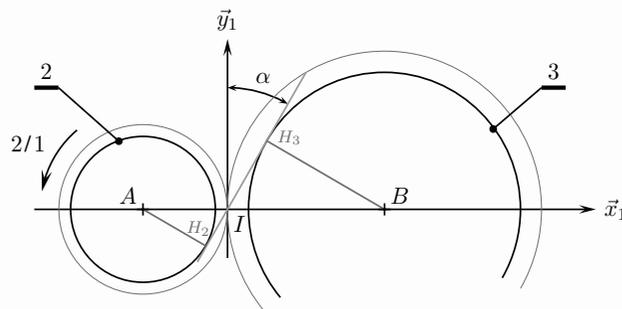


Figure 5.10 En cas d'inversion du sens de rotation.

Le torseur d'actions mécaniques à poser devient alors

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = I \begin{Bmatrix} -F \cos \alpha \vec{y}_1 - F \sin \alpha \vec{x}_1, \text{ avec } F \geq 0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

### Autres cas

Le cas des dentures hélicoïdales et toutes les configurations particulières dépassent le cadre de cet ouvrage. Il est raisonnable qu'un énoncé propose au cas par cas le modèle d'actions mécaniques à utiliser.

## 5.3 Les lois du frottement

### 5.3.1

### Le frottement

Le phénomène de frottement est omniprésent dans la vie de tous les jours. Ce phénomène est utile lorsqu'il s'agit d'accélérer ou de freiner, exploité lorsqu'il s'agit par exemple de laver, de poncer, de peindre. Ses conséquences peuvent être également coûteuses lorsqu'il s'agit d'usure ou d'échauffement.

On peut en donner une définition assez générale, valable pour des corps solides ou non.

#### Définition

Le **frottement** est un phénomène dissipateur d'énergie observé au niveau du mouvement relatif entre deux éléments.

Le frottement transforme de l'énergie mécanique en chaleur, et est donc cause d'irréversibilité.

La modélisation des phénomènes élémentaires mis en jeu est très difficile, car ces phénomènes font intervenir :

- la résistance des matériaux, pour les lois de déformation locale ;
- le génie des matériaux, pour leurs propriétés physicochimiques et leurs traitements, à cœur ou en surface ;
- la mécanique des fluides, dans les cas d'une lubrification des contacts ;
- la thermochimie, pour les éventuelles réactions aux interfaces dues à l'élévation de la température ;
- ...

Cette dernière liste n'est pas exhaustive : L'étude des frottements est depuis une quarantaine d'année une science à part entière appelée **tribologie**.

Cette section est modeste et n'a comme ambition que de mettre en place un modèle macroscopique en se restreignant aux frottements constatés au niveau des surfaces de contact de solides.

### 5.3.2

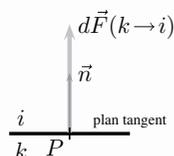
### Le frottement entre solides

Concernant les solides, le mouvement relatif est à observer au niveau du contact entre ces éléments, et il est donc nécessaire de se placer au niveau local, au niveau d'un point de contact pour modéliser ce que l'on relève.

Soit alors un point de contact  $P$  entre deux solides  $i$  et  $k$ . On suppose s'intéresser à l'action de  $k \rightarrow i$  et on définit la normale au plan tangent  $\vec{n}$  dirigée de  $k$  vers  $i$ .



La composante  $N_{ki}$  est la composante normale de la force élémentaire  $d\vec{F}(k \rightarrow i)$ , dirigée de  $k$  vers  $i$ .



En l'absence de frottement, l'action mécanique est modélisée par une force élémentaire  $d\vec{F}(k \rightarrow i)$  portée par la normale  $\vec{n}$  au contact. On pose ainsi

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki} \vec{n}, \text{ avec } N_{ki} \geq 0$$

## 5.3.3

## Cas du glissement

Lorsqu'il y a glissement au point  $P$  de  $i$  par rapport à  $k$ , la conséquence du phénomène de frottement est modélisée par une composante tangentielle d'action mécanique qui s'oppose au point d'étude à la vitesse de glissement constatée. On pose donc

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki} \vec{n} + \vec{T}(k \rightarrow i) \quad (13)$$

avec comme conditions pour la composante tangentielle  $\vec{T}(k \rightarrow i)$

$$\begin{cases} \vec{T}(k \rightarrow i) \wedge \vec{V}(P, i/k) = \vec{0} \\ \vec{T}(k \rightarrow i) \cdot \vec{V}(P, i/k) \leq 0 \end{cases} \quad (14)$$

- le produit vectoriel  $\vec{T}(k \rightarrow i) \wedge \vec{V}(P, i/k)$  nul exprime la colinéarité de la composante tangentielle  $\vec{T}(k \rightarrow i)$  et du vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(P, i/k)$  ;
- le produit scalaire  $\vec{T}(k \rightarrow i) \cdot \vec{V}(P, i/k)$  négatif ou nul exprime la dissipation d'énergie au niveau du contact.

Soit de plus  $\vec{t}$  le vecteur unitaire du plan tangent tel que  $\vec{T}(k \rightarrow i) = T_{ki} \vec{t}$ . Dans le cas du glissement, la composante tangentielle est proportionnelle à la composante normale et on pose

$$\left| \frac{T_{ki}}{N_{ki}} \right| = f_g \quad (15)$$

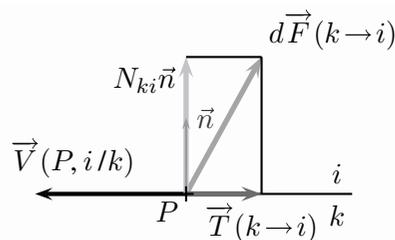


Figure 5.11 La force élémentaire transmissible dans le cas du glissement.

Le coefficient de proportionnalité  $f_g$  est appelé **coefficient de frottement de glissement**. La valeur de ce coefficient dépend, par ordre d'importance décroissant :

- du couple de matériaux en contact ;
- de la lubrification ;
- de l'état de surface des matériaux ;
- de la température...

La valeur d'un coefficient de frottement ne dépend pas :

- de la nature géométrique et de l'aire de la surface de contact ;
- de l'intensité de l'effort normal.



Bien repérer l'ordre des indices : on s'intéresse à l'action de  $k$  sur  $i$  lors de l'étude du mouvement de  $i$  par rapport à  $k$  !



Le modèle développé est souvent appelé **modèle de Coulomb**.

Pour que la composante tangentielle soit non nulle, il faut un effort normal non nul. Autrement dit, la composante tangentielle est nulle si la composante normale est nulle !

Il est indispensable d'avoir bien compris le cas du glissement avant d'aborder celui de l'adhérence !

### 5.3.4

Couples de matériaux	Coefficient de frottement	Exemples
acier/acier	0,15	Variateurs à friction
acier/téflon (PTFE)	0,05	Paliers lisses
acier/caoutchouc	0,25 à 0,45	Courroies
acier/garnitures	0,20 à 0,50	Freins, embrayage

Figure 5.12 Quelques valeurs approximatives de coefficient de frottement de glissement.

## Cas de l'adhérence

Dans le cas de l'adhérence, il n'y a pas de mouvement relatif au niveau du point de contact  $P$  considéré.

La première question à se poser est : « En l'absence de frottement, y aurait-il mouvement ? » Les trois cas suivants sont donc envisageables :

### Il n'y a pas de glissement en l'absence de frottement

Dans ce cas, une composante tangentielle n'a pas lieu d'être posée, car elle serait calculée nulle !

Un exemple est donné lors de l'exercice (5.6) à la page 137.

### Il y a glissement en l'absence de frottement

Dans ce cas, les propositions énoncées lors du glissement sont valables en considérant le vecteur vitesse qui apparaîtrait en l'absence de frottement.

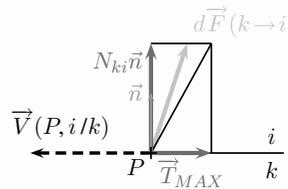


Figure 5.13 La force élémentaire transmissible dans le cas de l'adhérence.

On part de la force élémentaire transmissible dans le cas du contact sans frottement et on pose une composante tangentielle opposée au vecteur vitesse de glissement qui apparaîtrait en l'absence de frottement.

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki} \vec{n} + \vec{T}(k \rightarrow i) \tag{16}$$

Soit de plus  $\vec{t}$  le vecteur unitaire du plan tangent tel que  $\vec{T}(k \rightarrow i) = T_{ki} \vec{t}$ . Dans le cas de l'adhérence, la composante tangentielle est inconnue, mais majorée par une composante tangentielle maximale  $T_{MAX}$  proportionnelle à la composante normale. On pose alors

$$\left| \frac{T_{ki}}{N_{ki}} \right| \leq f_a \tag{17}$$

Le coefficient  $f_a$  est appelé **coefficient de frottement d'adhérence**. La valeur de ce coefficient est généralement constatée légèrement supérieure à la valeur du coefficient de frottement de glissement  $f_g$ .

**Remarques**

– L'inégalité (17) peut être prolongée par les expressions écrites avec la composante tangentielle  $T_{MAX}$

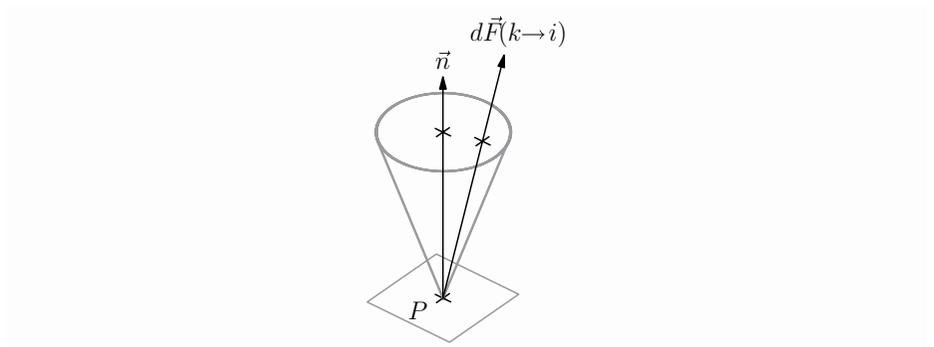
$$\left| \frac{T_{MAX}}{N_{ki}} \right| = f_a \quad \left| \frac{T_{ki}}{T_{MAX}} \right| \leq 1 \quad (18)$$

– Vue l'incertitude autour des valeurs numériques à prendre pour les coefficients de frottement de glissement et d'adhérence, il n'est pas rare de les confondre en première approche, donc de constater  $f_g \approx f_a$  et de poser un coefficient de frottement  $f$  unique, sans distinguer les deux cas.

– Le fait de poser une composante tangentielle ajoute une inconnue au total obtenu avec les liaisons parfaites, et cela sans ajouter d'équation supplémentaire. Un problème n'admet ainsi rapidement plus de solution unique. C'est pourquoi il est fréquent de s'intéresser au cas où on suppose être à la **limite du glissement**, pour lequel la composante tangentielle est supposée à sa valeur maximale.

**On ne sait pas s'il y a glissement en l'absence de frottement**

C'est le cas le plus délicat à traiter. Néanmoins, ce que l'on met en œuvre est la synthèse de tout ce qui a été dit précédemment :



**Figure 5.14** Le cône de frottement.

- on prend comme référence le contact supposé sans frottement

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki}\vec{n}$$

- on pose une composante tangentielle  $\vec{T}$  a priori quelconque, ce qui ajoute deux inconnues scalaires, et l'inégalité majorant son module

$$d\vec{F}(k \rightarrow i) = N_{ki}\vec{n} + \vec{T}_{ki}, \text{ avec } \frac{\|\vec{T}_{ki}\|}{|N_{ki}|} \leq f_a$$

La résolution peut se poursuivre en gardant à l'esprit les propositions suivantes :

- il est nécessaire d'avoir une composante normale non nulle pour avoir une composante tangentielle non nulle ;
- la composante tangentielle n'est pas nécessairement non nulle ;
- il faut supposer être à la limite du glissement pour faire baisser le nombre d'inconnues, mais ce n'est pas toujours possible ;
- une fois la composante tangentielle  $\vec{T}_{ki}$  trouvée non nulle, elle vérifie les expressions vectorielles posées avec le vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(P, i/k)$  qui apparaîtrait en l'absence de frottement.

$$\begin{cases} \vec{T}_{ki} \wedge \vec{V}(P, i/k) = \vec{0} \\ \vec{T}_{ki} \cdot \vec{V}(P, i/k) \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$



L'inéquation donnée  $\left| \frac{T_{ki}}{N_{ki}} \right| \leq f_a$  majore la composante tangentielle  $T_{ki}$  qui reste inconnue.

À la limite du glissement,  $T_{ki} = T_{MAX} = f_a N_{ki}$  !



La force élémentaire  $d\vec{F}(k \rightarrow i)$ , dessinée issue du point  $P$ , est à l'intérieur d'un cône de demi angle au sommet  $\alpha = \arctan(f_a)$  souvent appelé **cône de frottement**.

### 5.3.5 Modélisation globale

La résolution des problèmes concernant les solides est efficace avec l'utilisation des torseurs, mais la modélisation du phénomène de frottement se fait nécessairement au point de vue local.

De fait, la modélisation des actions mécaniques lors de la prise en compte du phénomène de frottement se fait systématiquement en quatre étapes :

- modélisation géométrique de la surface de contact par des points, des lignes ou des surfaces ;
- paramétrage de la position du point courant ;
- écriture de la force élémentaire au point courant ;
- détermination du torseur des actions mécaniques transmissibles.

Pour une zone de contact assimilée à un contact ponctuel, aucune somme n'est à faire et c'est le seul cas où l'on peut proposer directement un modèle global.

#### Exemple

Soient deux solides 1 et 2 en contact, ce contact étant assimilé à un point  $P$  avec une normale  $\vec{n}$  que l'on dirige de 1 vers 2. En l'absence de frottement est posé le glisseur suivant

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} N_{12} \vec{n}, \text{ avec } N_{12} \geq 0 \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad (20)$$

#### Cas du glissement

On suppose connu le vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(P, 2/1)$  et on pose alors une composante tangentielle  $T_{12} \vec{t}$  opposée à ce vecteur vitesse. Le torseur des actions mécaniques transmissibles de 1 vers 2 s'écrit alors

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} N_{12} \vec{n} + T_{12} \vec{t}, \text{ avec } \left| \frac{T_{12}}{N_{12}} \right| = f_g \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad (21)$$

Comme à chaque instant  $|T_{12}| = f_g |N_{12}|$ , il n'y a pas d'inconnue supplémentaire au problème.

#### Cas de l'adhérence

Dans le cas le plus défavorable, on ne sait rien du comportement cinématique au niveau du contact et on se contente de poser

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \underset{P}{\left\{ \begin{array}{l} N_{12} \vec{n} + \vec{T}_{12}, \text{ avec } \frac{\|\vec{T}_{12}\|}{|N_{12}|} \leq f_a \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad (22)$$

Deux inconnues scalaires supplémentaires sont posées, les deux composantes de  $\vec{T}_{12}$  dans le plan tangent.

Il est nécessaire d'essayer de se placer à *la limite du glissement* pour réduire le nombre d'inconnues.

## Synthèse

### Connaissances

Je sais définir les mots ou expressions :

- action mécanique ;
- action réciproque ;
- force, force élémentaire ;
- torseur des actions mécaniques ;
- torseur des actions mécaniques transmissibles ;
- glisseur, couple ;
- frottement ;

- glissement, adhérence ;
- cône de frottement ;
- coefficient de frottement de glissement ;
- coefficient de frottement d'adhérence.

Je connais :

- les quatre éléments géométriques différentiels ;
- le théorème des actions réciproques ;
- les lois de Coulomb.

### Savoir-faire

Je sais

- définir une action mécanique élémentaire ;
- calculer le torseur des actions mécaniques transmissibles à partir d'une description locale ;
- proposer une action mécanique élémentaire compatible avec une action globale donnée ;
- dessiner une action mécanique élémentaire ;
- proposer une image associée à un glisseur, à un couple ;
- poser l'action mécanique élémentaire pour un ressort ;
- donner la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles par les liaisons usuelles ;
- proposer le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison par câble, par une transmission par engrenage ;
- poser l'action mécanique élémentaire pour un contact ponctuel, avec ou sans frottement.

## Exercices d'application

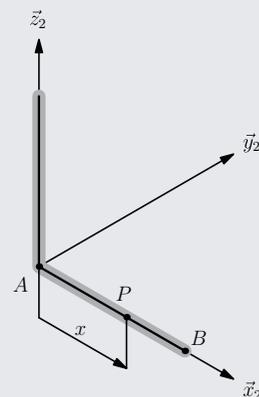
### 5.1 Frottement fluide sur un malaxeur

On considère une pale filaire repérée 2 plongée dans un liquide visqueux. Elle tourne autour de l'axe  $(A, \vec{z}_2)$  par rapport à un bâti repéré 1, et cette rotation est caractérisée par le vecteur  $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_{21} \vec{z}_2$ .

On note  $\vec{AB} = L \vec{x}_2$  et on pose  $\vec{AP} = x \vec{x}_2$ .

On suppose l'action mécanique élémentaire du fluide sur la pale modélisable par une force linéique proportionnelle à la vitesse relative  $\vec{q}(P) = -\mu \vec{V}(P, 2/1)$ .

1. Caractériser le mouvement 2/1 et exprimer le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/1)$ .
2. Exprimer la force élémentaire  $d\vec{F}(f \rightarrow 2)$  appliquée à un élément de longueur  $dx$  centré au point courant  $P$ .



L'axe tournant d'un malaxeur

3. Déterminer le torseur modélisant l'action du fluide sur l'arbre 2, et préciser sa nature.

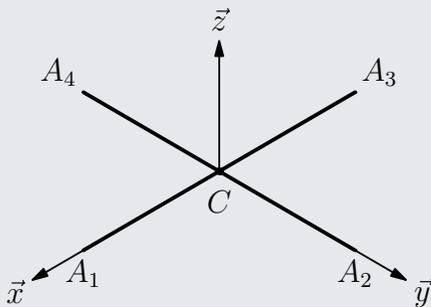
### 5.2 Pales d'hélicoptère

On s'intéresse à un hélicoptère en vol stationnaire, donc lors d'une phase de vol où il est immobile par rapport au sol :

- La verticale ascendante du lieu géographique est orientée par le vecteur  $\vec{z}$ .
- Lors du mouvement étudié, le rotor  $R$  tourne par rapport à un repère sol noté  $S$  autour d'un axe  $(C, \vec{z})$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .
- Le rotor  $R$  est composé de quatre pales  $p_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ , modélisées par quatre segments de même longueur  $L$ , à savoir  $CA_1, CA_2, CA_3$  et  $CA_4$ .

On modélise l'action mécanique exercée par l'air sur la pale  $p_1$  par une force linéique  $\vec{q}$  proportionnelle au carré de la fréquence de rotation et au carré du rayon  $x$  :

$$\vec{q} = (\omega x)^2 (k_y \vec{y} + k_z \vec{z})$$



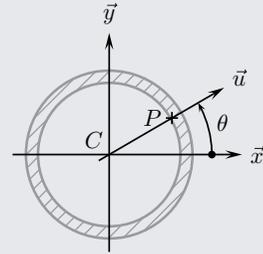
Les quatre pales simplifiées d'un hélicoptère

1. Les coefficients  $k_y$  et  $k_z$  sont des constantes positives. Donner leur unité.
2. Déterminer le torseur modélisant l'action mécanique de l'air sur la pale  $p_1$  noté  $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$ .
3. Montrer que  $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$  est un glisseur et trouver  $B_1$  le point de la pale par lequel passe l'axe central.
4. Proposer une représentation graphique de ce glisseur en décomposant la résultante en une composante de portance notée  $F_p$  suivant  $\vec{z}$  et une composante de traînée notée  $F_T$  suivant  $\vec{y}$ . Généraliser cette représentation pour chacune des trois autres pales en utilisant les symétries du rotor.
5. Déterminer le torseur des actions mécaniques exercées par l'air sur le rotor  $\mathcal{F}(a \rightarrow R)$  et détailler les effets de la portance et de la traînée.
6. Quel est à votre avis le sens de rotation du rotor par rapport à la cabine ?

### 5.3 Pression dans un tube

Soit un tube  $t$  de rayon intérieur  $R$ , dans lequel circule un fluide  $f$  à la pression uniforme  $p$ . On s'intéresse à l'action mécanique ( $f \rightarrow t$ ) du fluide sur le tube pour un morceau rectiligne d'épaisseur  $dL$ .

**Lexique :** Une *section droite* du tube est l'intersection de ce tube avec un plan perpendiculaire à l'axe de révolution.



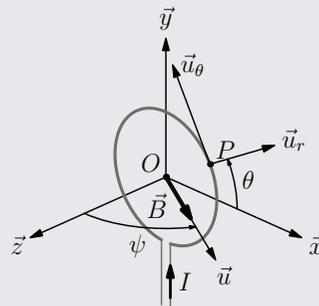
Section droite du tube.

1. Quel élément géométrique différentiel prendre au niveau du point courant  $P$  ?
2. Déterminer au point courant  $P$  la force élémentaire  $d\vec{F}(f \rightarrow t)$ .
3. Déterminer le torseur des actions mécaniques du fluide sur la portion rectiligne de tube  $\mathcal{F}(f \rightarrow t)$ .
4. Ce résultat signifie-t-il que le tube peut supporter n'importe quelle valeur de pression ?
5. Quand on met un tuyau d'arrosage sous pression, un brin courbé a tendance à se redresser. Sans calcul supplémentaire, est-il possible d'expliquer qualitativement ce phénomène ?

### 5.4 Action mécanique d'origine électro-magnétique

On considère une spire circulaire de centre  $O$  et de rayon  $R$ , située dans un plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  :

- cette spire est parcourue par un courant  $I$  ;
- elle est placée dans un champ magnétique supposé uniforme et défini par  $\vec{B} = B\vec{u}$  où le vecteur  $\vec{u}$  est dans le plan  $(\vec{z}, \vec{x})$  et orienté par l'angle  $\psi = (\vec{z}, \vec{u})$  ;
- on pose  $\vec{OP} = R\vec{u}_r$ , avec  $\theta = (\vec{x}, \vec{u}_r)$ .



Effet d'un champ magnétique sur une spire parcourue par du courant.

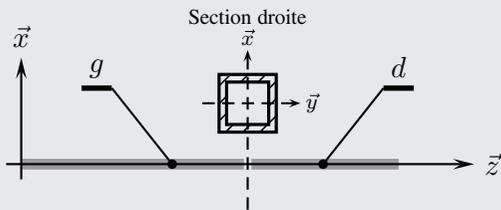
La force élémentaire d'origine électromagnétique, appelée force de Laplace, s'exerce sur l'élément de circuit  $d\vec{l}$  au point courant  $P$  et s'exprime par  $d\vec{F}(b \rightarrow s) = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ .

1. Exprimer la force élémentaire  $d\vec{F}(b \rightarrow s)$  en fonction de  $B, R, I, \theta$  et  $\psi$

2. Déterminer le torseur des actions mécaniques d'origine électro-magnétique sur l'ensemble de la spire dont on néglige l'ouverture.

### 5.5 Poutre sollicitée en flexion

On considère une poutre creuse à section carrée sollicitée en flexion, que l'on scinde mentalement en deux au niveau d'une section droite. On s'intéresse à l'action mécanique de la partie droite  $d$  sur la partie gauche  $g$ .

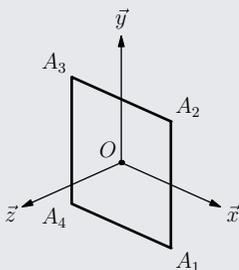


La poutre scindée mentalement en deux parties :  $d$  et  $g$ .

#### Lexique

- Une **poutre** est un solide dont une des dimensions, ici suivant  $\vec{z}$ , est très grande devant les deux autres.
- On appelle **section droite** l'intersection de la poutre avec un plan perpendiculaire à sa longueur.
- La **flexion** est une des quatre sollicitations envisagées en résistance des matériaux, celle pour laquelle la partie droite  $d$  tend à tourner autour d'un axe transversal par rapport à la partie gauche  $g$ .

La section droite de la poutre est modélisée par le milieu curviligne décrit sur la figure ci-dessous : un cadre carré de centre  $O$  et d'arête de longueur  $2a$  dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ . L'action mécanique ( $d \rightarrow g$ ) est modélisée par une force linéique  $\vec{q} = -kx \vec{z}$ , avec  $k$  une constante.



La section droite de la poutre.

1. Représenter graphiquement cette force linéique le long du cadre de la section droite.
2. Donner l'unité de la constante  $k$ .
3. Définir la force élémentaire  $d\vec{F}(d \rightarrow g)$  à associer au point courant  $P$  de coordonnées  $(x, y, 0)$  dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .
4. Déterminer les torseurs associés aux actions mécaniques exercées par  $d$  sur  $g$  pour chacune des quatre arêtes du cadre.
5. Déterminer le torseur des actions mécaniques transmissibles  $\mathcal{F}(d \rightarrow g)$ .

### 5.6 Frein de bicyclette

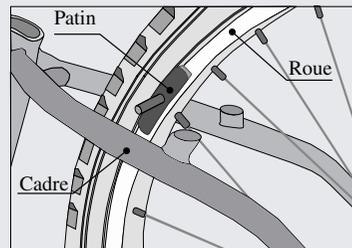
On s'intéresse au contact entre un patin de frein et la jante d'une roue arrière d'une bicyclette lors de la phase de freinage. La figure ci-après localise le patin de frein par rapport au cadre et à la roue de la bicyclette.

1. La roue arrière est repérée 2. Elle est assimilée à un disque de centre  $C$ . On lui associe un repère  $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , avec  $(C, \vec{x}_2)$  l'axe de révolution du disque.

2. Le cadre de la bicyclette est repéré 3. Il est en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_2)$  avec la roue 2.

3. Le patin de frein 4 est supposé à chaque instant immobile par rapport au cadre 3 et en contact avec la jante de roue 2. Ses dimensions sont suffisamment petites pour que le contact avec la jante soit assimilable à un point  $P$ . Le coefficient de frottement correspondant est noté  $f$ .

On souhaite modéliser l'action mécanique du patin 4 sur la roue 2 lors de la phase de freinage.



Un des deux patins de frein.

1. Tracer sur une même figure le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/4)$  et les composantes normale et tangentielle de la force  $\vec{F}(4 \rightarrow 2)$ .

2. En l'absence d'effort normal de freinage, que vaut la composante tangentielle ?

3. Un dispositif de freinage comporte deux patins pour une roue, un patin droit  $4d$  et un patin gauche  $4g$ . Que peut-on appeler le couple de freinage ?

### 5.7 Tapis roulant

On s'intéresse à un tapis roulant lisse déplaçant des colis au sein d'une entreprise :

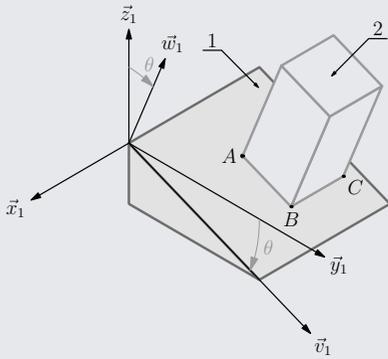
– La verticale ascendante du lieu est orientée par un vecteur  $\vec{z}_1$ , et on pose un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

– Le tapis est assimilable à un plan :

- horizontal lors des déplacements usuels ;
- incliné par rapport à l'horizontale lors d'un changement d'étage par exemple. On lui associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$  et on pose l'angle  $\theta = (\vec{z}_1, \vec{w}_1)$ .

Le déplacement du tapis roulant par rapport au sol est assimilable, au niveau d'un colis transporté, à une translation rectiligne suivant  $\vec{v}_1$ .

– Un colis est assimilé à un parallélépipède rectangle homogène de centre de masse  $G$  le centre géométrique de la forme. Il est supposé de base carrée  $(ABCD)$  de



Un colis sur un tapis roulant lisse incliné.

longueur d'arête  $2b$  et de hauteur  $2h$ . Le colis est positionné sur le tapis roulant de telle sorte que l'arête  $\overrightarrow{AB}$  restent colinéaire à  $\vec{v}_1$  au cours du temps.

– Les colis restent immobiles par rapport au tapis, et le contact est caractérisé par un coefficient de frottement noté  $f$ .

D'un point de vue cinématique, le tapis se déplace par rapport au sol à une vitesse uniforme.

Du point de vue des actions mécaniques, le colis est soumis à l'action de la pesanteur  $\mathcal{F}(p \rightarrow 2)$  et à l'action du tapis  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$ . On admet pour cet exercice les deux propositions issues des lois de l'équilibre exposées au chapitre suivant :

– si le colis est constaté immobile par rapport au tapis, alors  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(p \rightarrow 2)$  ;

– si  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) + \mathcal{F}(p \rightarrow 2) \neq \mathcal{O}$ , alors le colis se met en mouvement par rapport au tapis.

Par ailleurs et pour simplifier les représentations, on suppose que la distribution des actions mécaniques est la même dans tous les plans de normale  $\vec{x}_1$ .

**1.** Modéliser le contact entre un des colis et le tapis roulant, puis proposer la forme du torseur  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2sf)$  des actions mécaniques transmissibles par le contact supposé sans frottement.

**2.** On suppose le tapis dans le plan horizontal, donc l'angle  $\theta$  nul. Proposer et dessiner deux répartitions de pression possibles au contact de 2 sur 1, en faisant apparaître les composantes normales et tangentielles dues au frottement.

On suppose pour les questions suivantes le tapis incliné.

**3.** L'équilibre est-il possible en négligeant le phénomène de frottement ?

**4.** On constate le colis immobile par rapport au tapis. Représenter un colis sur un tapis incliné dans le plan  $(\vec{y}_1, \vec{z}_1)$  en choisissant un angle  $\theta$  positif et représenter l'action du tapis sur le colis.

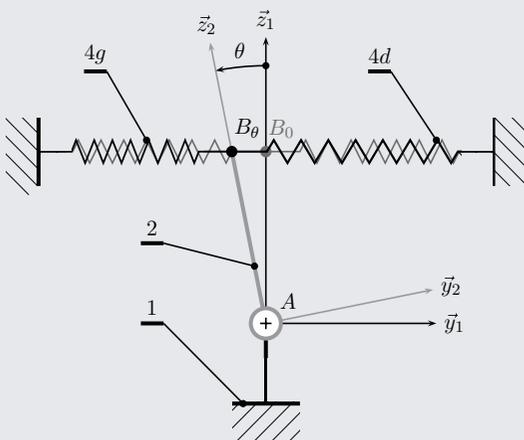
**5.** Y a-t-il un angle d'inclinaison du tapis au-delà duquel le colis glisse ? Expliquer de manière qualitative pourquoi on peut raisonner sur la résultante.

**6.** En chaque point de contact, la composante normale de l'action du tapis sur le colis est nécessairement suivant  $+\vec{w}_1$ . En étudiant le signe de  $\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_1$ , déterminer les conditions sur les dimensions  $b$  et  $h$  pour qu'il n'y ait pas basculement du colis.

## Exercices d'approfondissement

### 5.8 Dispositif de rappel à deux ressorts

On considère le dispositif de rappel à deux ressorts proposé sur la figure (ci-dessous). Il est constitué :



Dispositif de rappel à deux ressorts.

– d'un bâti 1 auquel on associe le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;  
 – d'un balancier 2 en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti. On lui associe le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en prenant soin de conserver  $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$  et on pose  $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ . On définit également le point  $B$  par  $\overrightarrow{AB} = h\vec{z}_2$  ;

– de deux ressorts identiques  $4g$  et  $4d$ , de longueur à vide  $L_0$  et de raideur  $k$ , accrochés de part et d'autre du point  $B$  suivant  $\vec{y}_1$ . Au repos, les ressorts sont en extension à la même longueur  $L$ .

Pour tout cet exercice, on fait l'hypothèse que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du temps.

**1.** En utilisant une approximation à justifier, exprimer le déplacement du point  $B$  lors d'une toute petite rotation de 2 par rapport à 1.

**2.** Définir les forces élémentaires  $\vec{F}(4g \rightarrow 2)$  et  $\vec{F}(4d \rightarrow 2)$ .

**3.** Définir la force de rappel due aux deux ressorts  $\vec{F}(4 \rightarrow 2)$ .

4. En déduire alors l'expression du torseur  $\mathcal{F}(4 \rightarrow 2)$ .
5. Calculer la composante scalaire du moment au point  $A$   $\vec{x}_2 \cdot \vec{M}(A, 4 \rightarrow 2)$ .

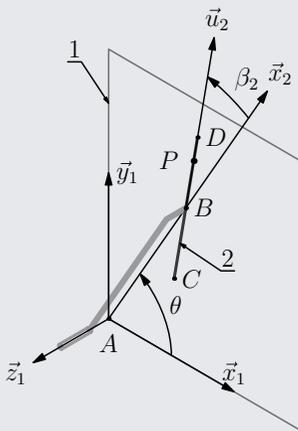
### 5.9 Essuie-glace

On s'intéresse au contact d'un balai d'essuie-glace sur un pare-brise :

- le pare-brise repéré 1 est modélisé par un plan de normale nommée  $\vec{z}_1$  et on lui associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- l'essuie-glace repéré 2 se décrit en deux parties :
  - le bras est assimilé à un segment  $[AB]$  en rotation par rapport au pare-brise autour de l'axe  $(A, \vec{z}_1)$  caractérisée par la vitesse  $\omega_{21} > 0$ . On lui associe le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\vec{AB} = R\vec{x}_2$  et  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ .
  - le balai est assimilé au segment  $[CD]$  en contact avec le pare-brise. On lui associe le repère  $(B, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{z}_2)$  et on pose  $\vec{CB} = \vec{BD} = L\vec{u}_2$  et  $\beta_2 = (\vec{x}_2, \vec{u}_2)$ .

On considère le point courant  $P$  du balai caractérisé par  $\vec{BP} = x\vec{u}_2$ .

Le contact pare-brise balai est caractérisé par un coefficient de frottement  $f$ .



L'essuie-glace en situation.

On souhaite déterminer partiellement l'action du pare-brise sur l'essuie-glace.

1. Déterminer l'expression de la vitesse de glissement de l'essuie-glace par rapport au pare-brise au point  $P$ .
2. On suppose que la répartition linéique d'effort normal de 1 sur 2 est constante sur le segment  $[CD]$  et notée  $q$ . Représenter sur un même schéma la vitesse de glissement  $\vec{V}(P, 2/1)$  et les composantes  $d\vec{N}_{12}$  et  $d\vec{T}_{12}$  de la force élémentaire  $d\vec{F}(1 \rightarrow 2)$  au point  $P$ .

3. Déterminer une forme intégrale de l'expression  $\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1$ , quantité scalaire que l'on pourrait appeler couple de freinage de l'essuie-glace par le pare-brise.

### 5.10 Couple transmissible par un embrayage

On considère le mécanisme d'embrayage schématisé sur la figure suivante.

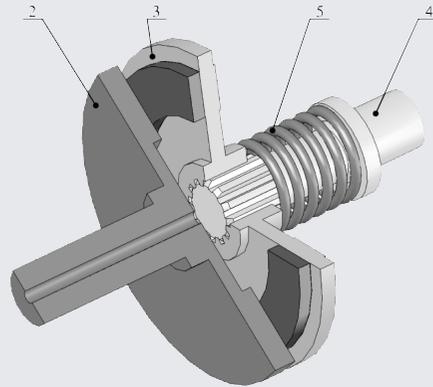
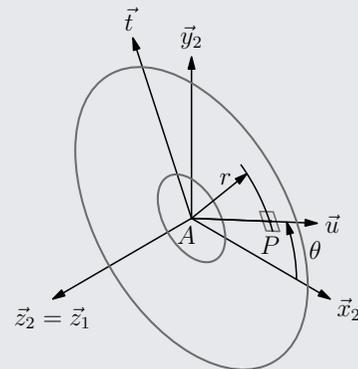


Schéma de principe d'un embrayage.



Paramétrage.

Il est constitué de cinq ensembles distincts :

- un bâti 1 non représenté auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un arbre 4, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1, dont la rotation possible  $(4/1)$  est générée dans le sens positif par un moteur ;
- le disque d'embrayage 3, de rayon intérieur  $R_i$ , de rayon extérieur  $R_e$ , et en liaison glissière de direction  $\vec{z}_1$  avec l'arbre 4 ;
- un plateau récepteur 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec 1, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  ;
- un ressort 5 prend appui sur l'arbre 4 pour plaquer le disque d'embrayage 3 sur le plateau 2.
  - Le coefficient de frottement du couple de matériaux en contact est noté  $f$  ;

- Le point courant  $P$  de la surface de contact du plateau 2 est repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta, 0)$  dans le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

1. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme, et proposer un modèle de liaison pour le contact entre le disque 3 et l'arbre récepteur 2.

2. En l'absence de frottement, le disque 3 peut-il entraîner en rotation le plateau 2 par rapport au bâti 1 ? Déterminer dans ce cas la direction éventuelle du vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/3)$ .

3. En tenant compte du phénomène de frottement, proposer un modèle pour l'action mécanique élémentaire  $d\vec{F}(3 \rightarrow 2)$  au point courant  $P$ .

4. En supposant la pression de contact normale  $p$  uniforme au contact entre le disque 2 et la plateau 3, déterminer le torseur des actions mécaniques  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)$ .

5. Soit  $F$  l'effort de poussée du disque 3 sur le plateau 2. Exprimer le couple maximale  $C_{MAX}$  transmissible par l'embrayage en fonction de cet effort  $F$ .

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 5.1

1. Le mouvement 2/1 est caractérisé par le torseur cinématique d'une liaison pivot

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \omega_{21} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

Par changement de point sur ce mouvement, on écrit pour le point courant  $P$

$$\vec{V}(P, 2/1) = \omega_{21} \vec{z}_2 \wedge x \vec{x}_2$$

On obtient ainsi

$$\vec{V}(P, 2/1) = x \omega_{21} \vec{y}_2$$

2. On exploite le résultat précédent pour l'expression de la force élémentaire au point  $P$

$$d\vec{F}(f \rightarrow 2) = -\mu x \omega_{21} dx \vec{y}_2$$

3. On caractérise le torseur  $\mathcal{F}(f \rightarrow 2)$  par ses éléments de réduction au point  $A$ .

• Concernant la résultante

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = \int_0^L d\vec{F}(f \rightarrow 2)$$

Après substitution et arrangement, l'expression se détaille ainsi

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = -\mu \omega_{21} \int_0^L x dx \vec{y}_2$$

On obtient finalement

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = -\frac{1}{2} \mu L^2 \omega_{21} \vec{y}_2$$

• Concernant le vecteur moment au point  $A$

$$\vec{M}(A, f \rightarrow 2) = \int_0^L \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}(f \rightarrow 2)$$

Après substitution et arrangement, l'expression se détaille alors

$$\vec{M}(A, f \rightarrow 2) = -\mu \omega_{21} \int_0^L x^2 dx \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_2$$

Et on obtient après calculs

$$\vec{M}(A, f \rightarrow 2) = -\frac{1}{3} \mu L^3 \omega_{21} \vec{z}_2$$

On constate que le produit scalaire  $\vec{R}(f \rightarrow 2) \cdot \vec{M}(A, f \rightarrow 2)$  est nul. Cela signifie que le torseur  $\mathcal{F}(f \rightarrow 2)$  est un glisseur.

Soit  $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ , on peut alors proposer

$$\mathcal{F}(f \rightarrow 2) = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \mu L^2 \omega_{21} \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

### 5.2 Pales d'hélicoptère

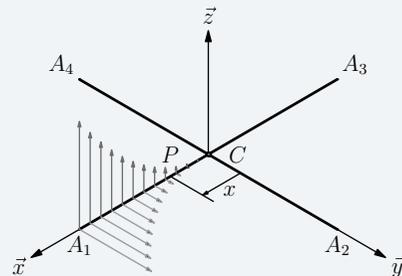
1. Une force linéique est une force par unité de longueur, donc en Newton par mètre  $[Nm^{-1}]$ . Le terme  $(\omega x)^2$  s'exprime en mètre carré par seconde carré  $[m^2s^{-2}]$ . Un Newton est égal à un kilogramme mètre par seconde carré. On en déduit l'unité des coefficients  $k_y$  et  $k_z$  en kilogramme par mètre carré.

$$k_y \text{ et } k_z \text{ en } [kg m^{-2}]$$

2. Soit  $P$  le point courant d'abscisse  $x$  sur la pale  $p_1$  et  $dx$  l'élément différentiel de longueur.

La force élémentaire au point  $P$  s'exprime par

$$d\vec{F}(a \rightarrow p_1) = (\omega x)^2 (k_y \vec{y} + k_z \vec{z}) dx$$



Répartition de la force linéique sur la pale  $CA_1$ .

On choisit de calculer les éléments de réduction du torseur  $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$  au point  $C$  :

– pour la résultante

$$\begin{aligned} \vec{R}(a \rightarrow p_1) &= \int_0^L d\vec{F}(a \rightarrow p_1) \\ &= \int_0^L x^2 dx \omega^2 k_y \vec{y} + \int_0^L x^2 dx \omega^2 k_z \vec{z} \\ &= \omega^2 \frac{L^3}{3} (k_y \vec{y} + k_z \vec{z}) \end{aligned}$$

– pour le moment au point  $C$

$$\begin{aligned} \vec{M}(C, a \rightarrow p_1) &= \int_0^L \overrightarrow{CP} \wedge d\vec{F}(a \rightarrow p_1) \\ &= \int_0^L x^3 dx \omega^2 k_y (\vec{x} \wedge \vec{y}) \\ &\quad + \int_0^L x^3 dx \omega^2 k_z (\vec{x} \wedge \vec{z}) \\ &= \omega^2 \frac{L^4}{4} (k_y \vec{z} - k_z \vec{y}) \end{aligned}$$

En définitive, le torseur de l'action de l'air sur la pale  $p_1$  est

$$\mathcal{F}(a \rightarrow p_1) = C \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}\omega^2 L^3 (k_y \vec{y} + k_z \vec{z}) \\ \frac{1}{4}\omega^2 L^4 (k_y \vec{z} - k_z \vec{y}) \end{array} \right.$$

3. On calcule l'automoment de ce torseur  $\vec{R}(a \rightarrow p_1)$   $\cdot \vec{M}(C, a \rightarrow p_1)$  et on le trouve nul. Comme la résultante n'est pas nulle, ce torseur est un glisseur.

Soit  $B_1$  un point de la pale. On pose  $\vec{CB}_1 = x\vec{x}$ . Ce point  $B_1$  appartient à l'axe central si le moment  $\vec{M}(B_1, a \rightarrow p_1)$  est nul : le calcul débute en utilisant la formule de changement de points

$$\vec{M}(B_1, a \rightarrow p_1) = \vec{M}(C, a \rightarrow p_1) + \vec{R}(a \rightarrow p_1) \wedge \vec{CB}_1$$

Après substitution, on recherche l'existence d'une solution en  $x$  pour l'équation

$$\frac{x}{3}\vec{x} \wedge (k_y \vec{y} + k_z \vec{z}) = \frac{L}{4} (k_y \vec{z} - k_z \vec{y})$$

Une solution apparaît, le point  $B_1$  existe et se situe au trois quart de la pale

$$\vec{CB}_1 = \frac{3L}{4}\vec{x}$$

4. On pose comme composantes :

– pour la portance  $F_P = \frac{1}{3}\omega^2 L^3 k_z$

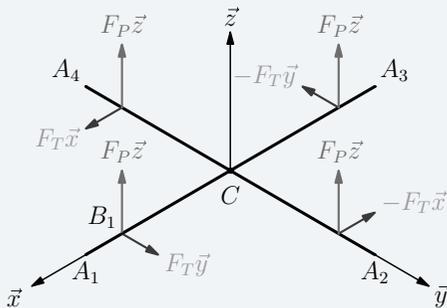
– pour la traînée  $F_T = \frac{1}{3}\omega^2 L^3 k_y$ .

Le glisseur  $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$  s'écrit alors simplement

$$\mathcal{F}(a \rightarrow p_1) =_{B_1} \left\{ \begin{array}{l} F_T \vec{y} + F_P \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

Un glisseur se représente de manière commode en dessinant le vecteur résultante en un point de l'axe central.

La figure suivante propose les composantes de portance et de traînée pour chacune des pales.



Les composantes de portance et de traînée.

5. Le torseur  $\mathcal{F}(a \rightarrow R)$  se détermine en faisant la somme des actions mécaniques sur chacune des quatre pales

$$\mathcal{F}(a \rightarrow R) = \sum_{i=0}^4 \mathcal{F}(a \rightarrow p_i)$$

On calcule les éléments de réduction au point  $C$  :

– pour la résultante, les composantes de traînée s'annulent deux à deux et il vient alors

$$\vec{R}(a \rightarrow R) = 4F_P \vec{z}$$

– pour le moment au point  $C$ , les produits vectorielles contenant les termes de portance s'annulent deux à deux et on obtient

$$\vec{M}(C, a \rightarrow R) = 4F_T \frac{3L}{4}\vec{z}$$

On peut donc décrire l'action de l'air sur le rotor comme somme de deux termes

$$\mathcal{F}(a \rightarrow R) = C \left\{ \begin{array}{l} 4F_P \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ 3F_T L \vec{z} \end{array} \right.$$

Ces deux termes correspondent aux deux phénomènes constatés :

– la portance se modélise par un glisseur de résultante

$$4F_P \vec{z} = \frac{4}{3}\omega^2 L^3 k_z \vec{z} \text{ et d'axe central passant par } C ;$$

– la traînée se modélise par un couple de moment

$$3F_T L \vec{z} = \omega^2 L^4 k_x \vec{z}.$$

Le couple de traînée induit la présence sur les hélicoptères d'un rotor secondaire d'axe horizontal généralement placé à l'arrière ou de deux rotors identiques tournant en sens contraire.

6. La traînée d'un fluide sur un objet s'oppose au déplacement de cet objet par rapport au fluide. Le couple de traînée de l'air sur le rotor est positif, on en déduit que le rotor tourne par rapport à la cabine dans le sens négatif.

### 5.3

1. On considère autour du point courant  $P$  la surface élémentaire  $dS$

$$dS = R d\theta dL$$

2. Au point courant  $P$  de position  $\theta$ , la normale sortante au tube est dirigée suivant  $-\vec{u}$ . On en déduit l'expression de la force élémentaire

$$d\vec{F}(f \rightarrow t) = p R d\theta dL \vec{u}$$

Cette force élémentaire est bien homogène à des newtons  $[N]$ .

3. Déterminons les éléments de réduction du torseur au centre  $C$  de la section droite.

– pour la résultante, on constate que les forces élémentaires pour deux points diamétralement opposés  $P_\theta$  et  $P_{\theta+\pi}$  sont opposées. On en déduit que la résultante  $\vec{R}(f \rightarrow p)$  est nulle.

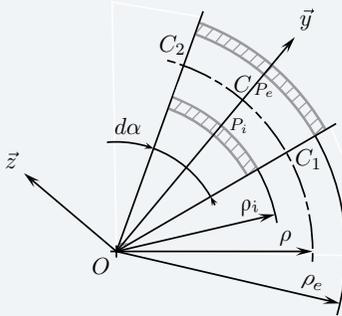
– pour le moment calculé au point  $C$ , on constate la nullité de tous les produits vectoriels  $\vec{CP} \wedge d\vec{F}(f \rightarrow t)$ , donc du moment  $\vec{M}(C, f \rightarrow p)$ .

Le torseur des actions mécaniques du fluide sur le tube est le torseur nul

$$\mathcal{F}(f \rightarrow t) = \mathcal{O}$$

4. Le résultat précédent semble surprenant, mais il correspond bien au point de vue global, ce dernier ne décrivant pas les particularités locales. Il est nécessaire d'étudier l'équilibre d'un petit arc de tube pour se rendre compte que le tube ne résisterait pas à une pression infinie.

5. Lorsque le tuyau se courbe, l'épaisseur  $dL$  d'une portion de tube n'est plus la même sur toute la section. La figure ci-dessous schématise une portion de tuyau courbé entre deux sections droites de centres  $C_1$  et  $C_2$ .



Forces élémentaires au niveau d'un brin courbé.

Les points  $P_i$  et  $P_e$  sont diamétralement opposés et les forces élémentaires ne s'annulent plus :

– au point  $P_i$  :  $d\vec{F}(f_i \rightarrow t) = -p\rho_i d\alpha R d\theta \vec{y}$

– au point  $P_e$  :  $d\vec{F}(f_e \rightarrow t) = +p\rho_e d\alpha R d\theta \vec{y}$

La somme de ces deux forces élémentaires donne

$$d\vec{F}(\{f_i, f_e\} \rightarrow t) = p(\rho_e - \rho_i) R d\theta d\alpha \vec{y}$$

Le fluide pousse sur le tuyau suivant  $\vec{y}$ , ce qui tend à redresser le tuyau.

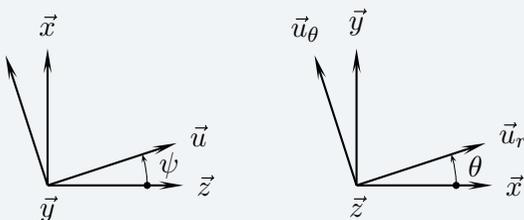
## 5.4

1. En substituant aux vecteurs  $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  leurs expressions respectives  $B\vec{u}$  et  $Rd\theta \vec{u}_\theta$ , on obtient

$$d\vec{F}(b \rightarrow s) = IB R d\theta \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}$$

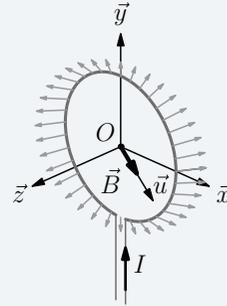
Le produit vectoriel  $\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}$  s'évalue à partir des figures suivantes de définitions des angles  $\psi$  et  $\theta$ . Les deux vecteurs n'apparaissent pas sur une même figure : on choisit alors d'exprimer  $\vec{u} = \cos\psi \vec{z} + \sin\psi \vec{x}$  pour en déduire

$$d\vec{F}(b \rightarrow s) = IB R d\theta (\cos\psi \vec{u}_r - \sin\psi \cos\theta \vec{z})$$



Figures de définitions des angles  $\psi$  et  $\theta$ .

La figure ci-dessous représente la distribution de la force élémentaire  $d\vec{F}(b \rightarrow s)$  le long de la spire.



Représentation de la distribution de la force élémentaire  $d\vec{F}(b \rightarrow s)$ .

2. Le torseur d'actions mécaniques exercée par le champ magnétique sur la spire s'évalue par intégration :

– pour la résultante :

$$\vec{R}(b \rightarrow s) = \int_{-\pi}^{\pi} IB R (\cos\psi \vec{u}_r - \sin\psi \cos\theta \vec{z}) d\theta$$

Le vecteur  $\vec{u}_r$  dépend de l'angle  $\theta$ . Il est alors nécessaire de le décomposer en  $\vec{u}_r = \cos\theta \vec{x} + \sin\theta \vec{y}$  pour pouvoir calculer l'intégrale. C'est ainsi que l'on trouve

$$\vec{R}(b \rightarrow s) = \vec{0}$$

– pour le moment calculé au point  $O$ , on commence par évaluer le produit vectoriel  $\vec{OP} \wedge d\vec{F}(b \rightarrow s)$

$$\begin{aligned} R\vec{u}_r \wedge IB R (\cos\psi \vec{u}_r - \sin\psi \cos\theta \vec{z}) d\theta \\ = IB R^2 \sin\psi \cos\theta \vec{u}_\theta d\theta \end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{u}_\theta$  dépend de l'angle  $\theta$ . Il est alors nécessaire de le décomposer en  $\vec{u}_\theta = \cos\theta \vec{y} - \sin\theta \vec{x}$  pour pouvoir calculer l'intégrale

$$\begin{aligned} \vec{M}(O, b \rightarrow s) = \int_{-\pi}^{\pi} IB R^2 \\ \sin\psi (\cos^2\theta \vec{y} - \cos\theta \sin\theta \vec{x}) d\theta \end{aligned}$$

On obtient ainsi tout calcul fait

$$\mathcal{F}(b \rightarrow s) = O \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ B I \pi R^2 \sin\psi \vec{y} \end{array} \right.$$

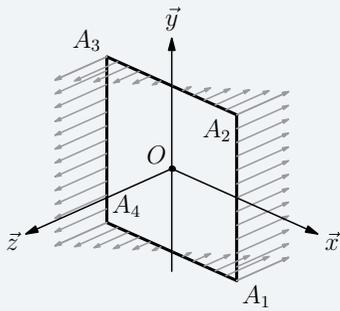
### Remarque

On définit le moment dipolaire magnétique  $\vec{M}$  d'une spire par l'expression  $\vec{M} = IS\vec{z}$ , avec  $S$  l'aire de la surface de la spire. Le résultat trouvé s'exploite alors pour retrouver l'expression vue en cours de physique.

$$\begin{aligned} \vec{M}(O, b \rightarrow s) &= \pi R^2 IB \sin\psi \vec{y} \\ &= \pi R^2 I \vec{z} \wedge B\vec{u} \\ &= \vec{M} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

## 5.5

1. Représentation de la distribution de force linéique sur le cadre.



2. Une force linéique s'exprime en Newton par mètre [ $Nm^{-1}$ ], la constante  $k$  est donc homogène à une pression et son unité est le Pascal [ $Pa$ ].

3. On parcourt les quatre segments pour décrire les forces élémentaires correspondantes

– segment  $[A_1A_2]$  :

La force élémentaire est constante et a pour valeur

$$d\vec{F}(d_{[12]} \rightarrow g) = -ka \, dy \, \vec{z}$$

– segment  $[A_2A_3]$  :

La force élémentaire dépend de l'abscisse  $x$  et a pour valeur

$$d\vec{F}(d_{[23]} \rightarrow g) = -kx \, dx \, \vec{z}$$

– segment  $[A_3A_4]$  :

La force élémentaire est constante et a pour valeur

$$d\vec{F}(d_{[34]} \rightarrow g) = ka \, dy \, \vec{z}$$

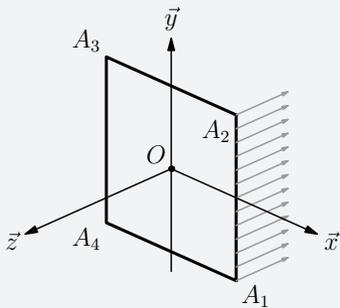
– segment  $[A_4A_1]$  :

La force élémentaire dépend de l'abscisse  $x$  et a pour valeur

$$d\vec{F}(d_{[41]} \rightarrow g) = kx \, dx \, \vec{z}$$

4. En regardant la symétrie de la distribution des actions mécaniques élémentaires, seuls deux calculs sont à mener :

– segment  $[A_1A_2]$  :



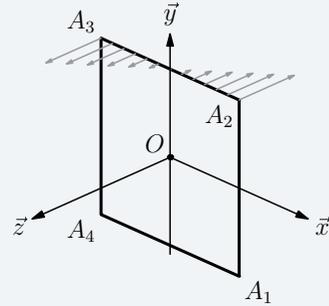
– pour la résultante

$$\vec{F}(d_{[12]} \rightarrow g) = \int_{-a}^a -ka \, dy \, \vec{z} = -2ka^2 \vec{z}$$

– pour le moment au point  $O$

$$\begin{aligned} \vec{M}(O, d_{[12]} \rightarrow g) &= \int_{-a}^a (a\vec{x} + y\vec{y}) \wedge -ka \, dy \, \vec{z} \\ &= ka^2 \int_{-a}^a dy \, \vec{y} - ka \int_{-a}^a y \, dy \, \vec{x} \\ &= 2ka^3 \vec{y} \end{aligned}$$

– segment  $[A_2A_3]$  :



– pour la résultante

$$\vec{F}(d_{[23]} \rightarrow g) = \int_{-a}^a -kx \, dx \, \vec{z} = \vec{0}$$

– pour le moment au point  $O$

$$\begin{aligned} \vec{M}(O, d_{[23]} \rightarrow g) &= \int_{-a}^a (a\vec{y} + x\vec{x}) \wedge -kx \, dx \, \vec{z} \\ &= -ka \int_{-a}^a x \, dx \, \vec{x} + k \int_{-a}^a x^2 \, dx \, \vec{y} \\ &= \frac{2}{3}ka^3 \vec{y} \end{aligned}$$

– Le torseur des actions transmissibles  $\mathcal{F}(d \rightarrow g)$  s'obtient par somme des quatre torseurs trouvés

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(d \rightarrow g) &= \mathcal{F}(d_{[12]} \rightarrow g) + \mathcal{F}(d_{[23]} \rightarrow g) \\ &\quad + \mathcal{F}(d_{[34]} \rightarrow g) + \mathcal{F}(d_{[41]} \rightarrow g) \end{aligned}$$

Ce qui donne, tous calculs faits :

$$\mathcal{F}(d \rightarrow g) = \mathcal{O} \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{16}{3}ka^3 \vec{y} \end{array} \right.$$

## 5.6

1. La normale au contact au point  $P$  est dirigée par le vecteur  $\vec{x}_2$  que l'on suppose orienté de la roue 2 vers le patin 4.

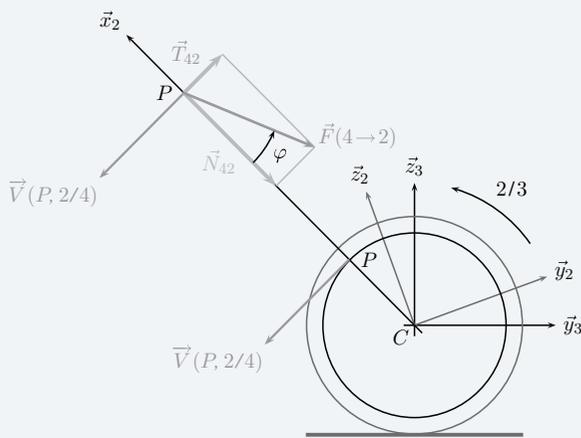
Le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/4)$  est dans le plan  $(\vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et orthogonal au rayon  $\vec{CP}$ . En effet :

– Le patin 4 est supposé immobile par rapport au cadre 3 : on en déduit l'égalité

$$\vec{V}(P, 2/4) = \vec{V}(P, 3/4)$$

– La roue 2 tourne par rapport au cadre 3 et on a

$$\vec{V}(P, 3/4) = \omega_{34} \vec{x}_2 \wedge \vec{CP}$$



Le plan contenant  $\vec{x}_2$  et  $\vec{V}(P, 2/4)$ .

On pose ainsi

$$\vec{F}(4 \rightarrow 2) = -N_{42} \vec{x}_2 + \vec{T}_{42}, \quad \text{avec} \quad \frac{\|\vec{T}_{42}\|}{|N_{42}|} = f = \tan \varphi$$

2. En l'absence de composante normale, la composante tangentielle est nulle. La bicyclette n'est pas freinée, malgré le contact du patin sur la jante !

3. L'action du frein sur la roue est la somme des actions au niveau des deux patins

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 2) = \mathcal{F}(4g \rightarrow 2) + \mathcal{F}(4d \rightarrow 2)$$

On souhaite ralentir la rotation autorisée par la liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_2)$  entre la roue 2 et le cadre 3. On peut alors appeler couple de freinage la composante scalaire d'action mécanique du frein sur la roue suivant cette rotation, donc  $\vec{M}(C, 4 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2$

## 5.7

1. Le contact entre un colis et le tapis est modélisable par une liaison plane de normale  $\vec{w}_1$ , et en l'absence de frottement, le torseur des actions mécaniques transmissibles par le contact parfait est de la forme

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2sf) = \begin{cases} Z\vec{w}_1, \text{ avec } Z \geq 0 \\ \vec{M}(G, 1 \rightarrow 2sf), \\ \text{tel que } \vec{M}(G, 1 \rightarrow 2sf) \cdot \vec{w}_1 = 0 \end{cases}$$

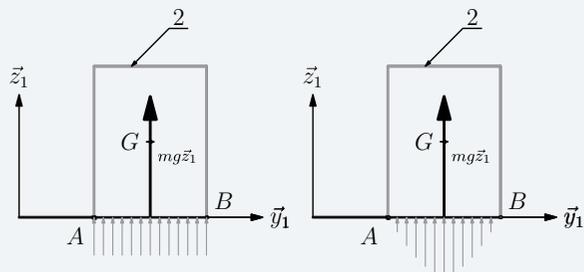
La résultante suivant  $+\vec{w}_1$  traduit la conservation du contact.

2. Le colis est immobile par rapport au tapis, on utilise alors l'égalité proposée par l'énoncé  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(p \rightarrow 2)$  et on en déduit

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} mg\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

Le tapis est horizontal, donc l'angle  $\theta$  est nul et  $\vec{w}_1 = \vec{z}_1$ . Le torseur  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$  trouvé est compatible avec la forme possible donnée par  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2sf)$ . Cette constatation est à mettre en corrélation avec le non glissement du colis en l'absence de frottement. Il n'y a pas de composante tangentielle d'action mécanique à poser.

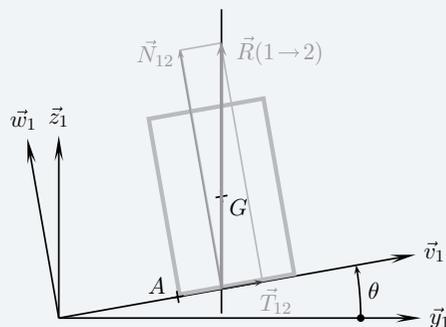
La figure ci-dessous propose deux parmi une infinité de répartitions de pression possibles.



Le tapis roulant est horizontal.

3. On considère le tapis incliné et le contact sans frottement. La somme des résultantes  $Z\vec{w}_1 - mg\vec{z}_1$  ne peut pas être nulle, le colis se met à glisser...

4. On considère le tapis incliné et on constate l'immobilité du colis par rapport au tapis. L'action mécanique  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$  est un glisseur dont l'axe central passe par le point G. On décompose sur la figure ci-dessous, la résultante suivant la normale et dans le plan tangent.



Un colis sur un tapis incliné.

5. Si le colis glisse par rapport au tapis, la composante tangentielle est en chaque point de contact proportionnelle à la composante normale, quelle que soit sa valeur. En sommant toutes les composantes normales et toutes les composantes tangentielles, cette proportionnalité se retrouve sur les composantes de la résultante. En généralisant ce raisonnement à la limite du glissement, on applique alors le modèle local à la résultante du glisseur. On pose

$$\begin{aligned} \vec{R}(1 \rightarrow 2) &= mg\vec{z}_1 \\ &= mg \cos \theta \vec{w}_1 + mg \sin \theta \vec{v}_1 \\ &= N_{12} \vec{w}_1 + T_{12} \vec{v}_1 \\ &= \vec{N}_{12} + \vec{T}_{12} \end{aligned}$$

La condition de non glissement est alors

$$|\tan \theta| \leq f$$

Il est à remarquer que le raisonnement ne peut pas être mené à partir du cas général de l'adhérence, car on n'a aucune idée de la distribution des actions mécaniques locales.

6. Le moment en A des actions mécaniques de 1 sur 2 suivant  $\vec{x}_1$  s'écrit simplement

$$\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_1 = (\vec{R}(1 \rightarrow 2) \wedge \vec{GA}) \cdot \vec{x}_1$$

Cette composante scalaire s'annule si  $A$  est sur l'axe central du glisseur  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$ .

Cette condition est obtenue lorsque le rapport  $b/h$  est égal à la tangente de l'angle  $\theta$ . La condition de non-bascullement s'exprime alors

$$|\tan \theta| \leq \frac{b}{h}$$

Comment raisonner finalement ? On compare tout d'abord les valeurs du rapport  $\frac{b}{h}$  et du coefficient de frottement  $f$  :

- si  $\frac{b}{h} < f$ , le premier phénomène à intervenir est le basculement lorsque l'angle  $\theta$  augmente ;
- si  $f < \frac{b}{h}$ , le premier phénomène qui se manifeste est le glissement.

### 5.8

1. En supposant l'angle  $\theta$  toujours petit au cours du temps, on considère que le point  $B_\theta$  se déplace sur la droite  $(B_0, \vec{y}_1)$  d'une longueur  $h\theta$ , approximation de  $h \tan \theta$ .

2. Pour un ressort, la force de rappel est proportionnelle à la différence entre la longueur courante et la longueur à vide.

- pour le ressort  $4g$ , l'allongement est orienté par  $+\vec{y}_1$  et la longueur courante vaut  $L - h\theta$  ;
- pour le ressort  $4d$ , l'allongement est orienté par  $-\vec{y}_1$  et la longueur courante vaut  $L + h\theta$ .

Ces réflexions préliminaires permettent de poser les deux expressions des forces de rappel

$$\begin{aligned} \vec{F}(4g \rightarrow 2) &= -k((L - h\theta) - L_0) \vec{y}_1 \\ \vec{F}(4d \rightarrow 2) &= -k((L + h\theta) - L_0) (-\vec{y}_1) \end{aligned}$$

3. On en déduit l'expression de la force de rappel due aux deux ressorts

$$\vec{F}(4 \rightarrow 2) = \vec{F}(4g \rightarrow 2) + \vec{F}(4d \rightarrow 2) = 2kh\theta \vec{y}_1$$

4. Le torseur des actions mécaniques de 4 sur 2 est alors un glisseur d'expression

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} 2kh\theta \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

5. Par changement de point sur le champ des vecteurs moments, on trouve la valeur de la composante recherchée

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{M}(A, 4 \rightarrow 2) = -2kh^2\theta$$

### 5.9

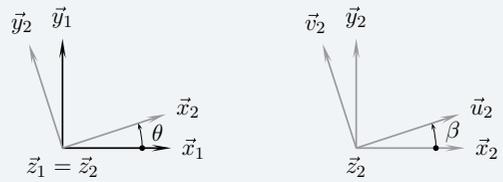
1. La vitesse de glissement au point  $P$  se détermine par changement de points sur le mouvement  $(2/1)$

$$\begin{aligned} \vec{V}(P, 2/1) &= \omega_{21} \vec{z}_1 \wedge \vec{AP}, \\ \text{avec } \vec{AP} &= R\vec{x}_2 + x\vec{u}_2 \end{aligned}$$

Les deux produits vectoriels sont immédiats avec les figures de définition des angles et on obtient

$$\vec{V}(P, 2/1) = \omega_{21} (R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2)$$

Le vecteur  $R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2$  est bien sûr orthogonal au rayon  $\vec{AP}$ .



2. Par application du cours, on pose comme expression pour la force élémentaire au point  $P$

$$d\vec{F}(1 \rightarrow 2) = dN_{12} \vec{z}_1 + d\vec{T}_{12},$$

$$\text{avec } \begin{cases} d\vec{T}_{12} \wedge \vec{V}(P, 2/1) = \vec{0} \\ d\vec{T}_{12} \cdot \vec{V}(P, 2/1) \leq 0 \\ \frac{\|d\vec{T}_{12}\|}{|dN_{12}|} = f \end{cases}$$

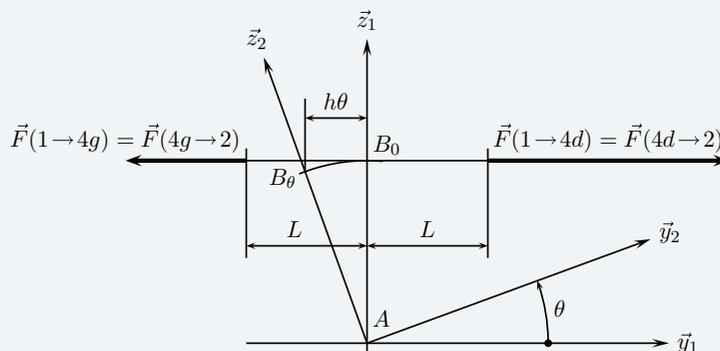
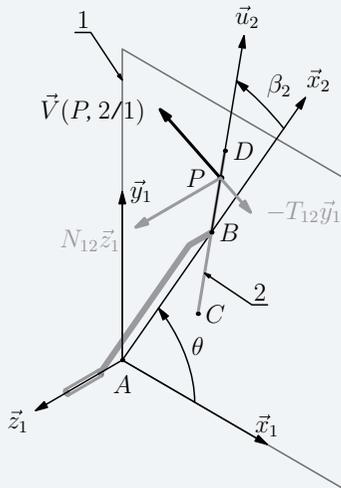


Schéma de mise en situation.

La figure ci-dessous présente les différents vecteurs.



Composantes d'actions mécaniques au point P.

3. On exploite la connaissance du vecteur  $\vec{V}(P, 2/1)$  orienté par le vecteur  $R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2$  et on pose

$$d\vec{F}(1 \rightarrow 2) = qdx\vec{z}_1 - k(R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2), \text{ avec } k \geq 0$$

Le coefficient  $k$  vérifie  $k\|R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2\| = fqdx$ .

Pour le calcul du couple de freinage, il est judicieux de commencer par le produit scalaire pour constater

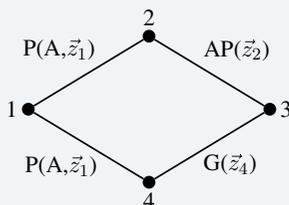
$$\begin{aligned} d\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 &= ((R\vec{x}_2 + x\vec{u}_2) \wedge -k(R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2)) \cdot \vec{z}_1 \\ &= -k(R^2 + 2Rx \cos \beta + x^2) \\ &= -k(R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2)^2 \\ &= -k\|R\vec{y}_2 + x\vec{v}_2\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit une forme intégrale de la composante suivant  $\vec{z}_1$  du moment en A de l'action mécanique du pare-brise sur l'essuie-glace

$$\vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 = -qf \int_{-L}^L \sqrt{R^2 + 2Rx \cos \beta + x^2} dx$$

## 5.10

1. Le ressort n'est pas un solide indéformable et n'apparaît donc pas sur le graphe des liaisons



P(Dte)	: Pivot d'axe (Dte)
AP(Vec)	: Appui Plan de normale (Vec)
G(Vec)	: Glissière de direction (Vec)

Graphe des liaisons de l'embrayage.

La surface de contact entre le disque d'embrayage 3 est le plateau 2 est un plan de normale  $\vec{z}_2$ . On propose alors comme modèle de comportement cinématique une liaison plane de même normale.

2. Une étude cinématique rapide est nécessaire. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de solides et six inconnues cinématiques que l'on pose en écrivant les quatre torseurs cinématiques.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(4/1) &= \begin{Bmatrix} \omega_{41}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} & \mathcal{V}(3/4) &= \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{34}\vec{z}_4 \end{Bmatrix} \\ \mathcal{V}(2/1) &= \begin{Bmatrix} \omega_{21}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \\ \mathcal{V}(2/3) &= \begin{Bmatrix} \omega_{23}\vec{z}_2 \\ \vec{V}(P, 2/3) \end{Bmatrix}, \text{ avec } \vec{V}(P, 2/3) \cdot \vec{z}_2 = 0 \end{aligned}$$

On s'intéresse à la composition des mouvements sur la chaîne fermée 1 - 2 - 3 - 4 - 1 :

- l'équation de composition des vitesses au point A scalaire  $\vec{z}_1$  donne immédiatement  $V_{34} = 0$  ;
- cette même composition des vitesses en A donne alors  $\vec{V}(A, 2/3) = \vec{0}$  ;
- la composition des rotations scalaire  $\vec{z}_1$  donne immédiatement  $\omega_{21} = \omega_{23} + \omega_{41}$  ;
- les deux autres équations scalaires de la composition des rotations donnent des équations  $0 = 0$ .

Sur les six équations scalaires issues de la fermeture cinématique, seules quatre sont utiles pour trouver trois inconnues scalaires nulles et une quatrième en fonction de deux paramètres, par exemple  $\omega_{21} = \omega_{23} + \omega_{41}$ . La solution  $\omega_{21} = 0$  est donc possible, le plateau 2 n'est pas entraîné par l'arbre moteur 4.

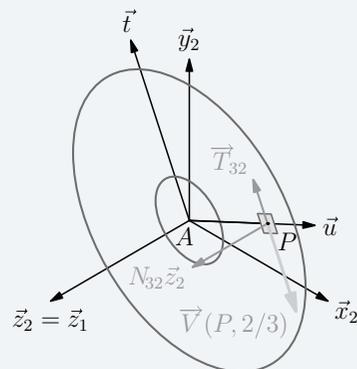
La formule de changement de point sur le mouvement (2/3) donne

$$\vec{V}(P, 2/3) = \omega_{23}\vec{z}_2 \wedge \vec{AP}, \text{ avec } \vec{AP} = r\vec{u}$$

On en déduit  $\vec{V}(P, 2/3) = r\omega_{23}\vec{t}$ , et si on suppose le plateau 2 immobile par rapport au bâti 1, on obtient

$$\vec{V}(P, 2/3) = -r\omega_{41}\vec{t}, \text{ avec } \omega_{41} \geq 0$$

3. Le vecteur  $\vec{z}_2$  correspond à une normale dirigée de 3 vers 2. On pose ainsi une composante normale  $N_{32}$  suivant  $\vec{z}_2$ , une composante tangentielle  $\vec{T}_{32}$  opposée à la vitesse de glissement  $\vec{V}(P, 2/3)$  qui apparaîtrait en l'absence de frottement



Les composantes de la force élémentaire au point courant P.

On connaît ici la direction de la composante tangentielle et on pose alors

$$d\vec{F}(3 \rightarrow 2) = N_{32}\vec{z}_2 + T_{32}\vec{t}, \text{ avec } \left| \frac{T_{32}}{N_{32}} \right| \leq f$$

On suppose la pression de contact normale  $p$  uniforme sur tout le disque. En conséquence, on suppose les deux composantes  $N_{32}$  et  $T_{32}$  uniformes et on pose :

$$\begin{cases} N_{32} = pdS, \text{ avec } dS = rd\theta dr \\ T_{32} = qdS, \text{ avec } |q| \leq f|p| \end{cases}$$

On choisit de calculer les éléments de réduction du torseur  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)$  au point  $A$  :

– pour la résultante, on constate que les forces élémentaires pour deux points diamétralement opposés  $P_\theta$  et  $P_{\theta+\pi}$  ont leurs composantes tangentielles qui s'annulent et il reste donc

$$\begin{aligned} \vec{R}(3 \rightarrow 2) &= \int_S d\vec{F}(3 \rightarrow 2) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} pr dr d\theta \vec{z}_2 \\ &= p\pi(R_e^2 - R_i^2) \vec{z}_2 \end{aligned}$$

– pour le moment calculé au point  $A$ , on pose  $\vec{A}\vec{P} = r\vec{u}$  et on constate que les produits vectoriels  $\vec{u} \wedge \vec{z}_2$  pour deux points diamétralement opposés  $P_\theta$  et  $P_{\theta+\pi}$  s'annulent, que le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{t} = \vec{z}_2$  est valable pour tous les points et il reste alors

$$\begin{aligned} \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) &= \int_S \vec{A}\vec{P} \wedge d\vec{F}(3 \rightarrow 2) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} qr^2 dr d\theta \vec{z}_2 \\ &= \frac{2}{3} q\pi(R_e^3 - R_i^3) \vec{z}_2 \end{aligned}$$

Le torseur d'actions mécaniques transmissibles du disque 3 sur le plateau 2 est finalement

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \begin{cases} p\pi(R_e^2 - R_i^2) \vec{z}_2 \\ \frac{2}{3} q\pi(R_e^3 - R_i^3) \vec{z}_2, \text{ avec } \left| \frac{q}{p} \right| \leq f \end{cases}$$

5. Il est utile de comparer le torseur  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)$  trouvé à la question précédente avec le torseur  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2sf)$  des actions mécaniques transmissibles par le même contact plan sans frottement :

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2sf) = \begin{cases} F \vec{z}_2, \text{ avec } F \geq 0 \\ \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2sf), \end{cases}$$

$$\text{avec } \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2sf) \cdot \vec{z}_2 = 0$$

– les deux résultantes sont compatibles, et on pose ainsi

$$F = p\pi(R_e^2 - R_i^2)$$

– concernant le moment au point  $A$ , les deux composantes scalaires transmissibles par le contact parfait sont ici nulles et apparaît la composante scalaire supplémentaire suivant  $\vec{z}_2$  due au phénomène de frottement. On pose  $C$  le couple transmissible par l'embrayage et on l'exprime en fonction de l'effort de poussée  $F$

$$C = \frac{2}{3} \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} F \frac{q}{p}, \text{ avec } \left| \frac{q}{p} \right| \leq f$$

Le couple maximale transmissible par l'embrayage pour un effort de poussée  $F$  donné est celui obtenu à la limite du glissement, lorsque  $q = fp$  :

$$C_{MAX} = fF \frac{2}{3} \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$$

## Plan

6.1 Théorèmes de l'équilibre	151
6.2 Méthodologie de résolution	154
6.3 Équilibres particuliers	159
Exercices d'application	166
Exercices d'approfondissement	169
Solutions des exercices	174

## Introduction

Évaluer la puissance transmise par un mécanisme, dimensionner et choisir un composant, calculer les déformations induites par un chargement... Autant d'activités de bureau d'étude qui nécessitent la détermination d'actions mécaniques.

Ce chapitre expose les théorèmes utilisables en *statique*, lorsque l'on constate des situations d'équilibres, et pose bases, principes et méthodes pour une résolution efficace des problèmes de mécanique à partir d'un exemple très détaillé.

## Prérequis

- Cinématique des solides indéformables ;
- Concept d'actions mécaniques, exposé au chapitre précédent ;
- Notion de résolution des systèmes d'équations linéaires.

## Objectifs

- Comprendre un équilibre comme un mouvement particulier ;
- Différencier actions mécaniques extérieures et actions mécaniques intérieures ;
- Acquérir une méthode efficace de résolution des problèmes.

## 6.1 Théorèmes de l'équilibre

### Notation

Pour tout ce chapitre :

- $S$  est un solide indéformable ;
- $\Sigma$  est un système matériel quelconque ;
- $R_g$  représente un référentiel galiléen.

## 6.1.1

## Équilibre – Statique

## Définition

On appelle **équilibre** un mouvement nul.

Dans le cas d'un système matériel quelconque, un mouvement nul se traduit par un champ de vecteurs vitesses nul.

Dans le cas d'un solide indéformable, ce mouvement particulier est caractérisé par un torseur cinématique nul.

## Définition

On appelle **statique** la branche de la mécanique qui s'intéresse aux états d'équilibre.

Le terme « statique des solides » est souvent employé, mais le lecteur est alors détourné de ce qui doit être sa seule préoccupation du moment, à savoir l'identification de mouvements. Ce n'est qu'en abordant ultérieurement la résistance des matériaux ou la fabrication d'une pièce qu'un solide est abordé avec profit hors de son contexte cinématique.

## 6.1.2

## Repère galiléen

Un **repère galiléen** est le repère de référence en mécanique newtonienne. Il est supposé exister lors de l'énoncé du principe fondamental de la dynamique, mais on n'en connaît que des approximations plus ou moins fines. Ce sont les repères :

- héliocentrique, d'origine le centre du soleil et comportant trois directions d'étoiles ;
- géocentrique, d'origine le centre de la terre et comportant trois directions d'étoiles ;
- terrestre.

## 6.1.3

## Système matériel

## Définition

On appelle **système matériel** un ensemble d'objets réels.

Le plus petit objet du mécanicien est le point matériel, c'est-à-dire un volume solide suffisamment petit pour être modélisable par un point.

Un élément d'un système matériel est caractérisé par sa nature – liquide, solide, gazeuse, ... , – et par des grandeurs attachées à sa géométrie et à sa masse.

Le mécanicien a comme objet de référence le solide indéformable, avec en tout premier lieu celui qui sert de repère ! La distinction entre le solide  $S$  et un système  $\Sigma$  quelconque est faite pour distinguer les lois générales des expressions propres au solide indéformable.

## 6.1.4

## Action mécanique extérieure – intérieure

Soit  $\Sigma$  un système matériel quelconque. On appelle  $\bar{\Sigma}$ , ce qui se lit «  $\Sigma$  barre », l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à ce système :

- décrire un système  $\Sigma$  revient à détailler les éléments de ce système ;
- décrire  $\bar{\Sigma}$  revient à lister les éléments extérieurs à ce système.



Pour le spécialiste des mécanismes, un repère lié à la terre convient souvent comme repère galiléen.



Un objet réel, par opposition à un objet imaginaire.

**Remarque**

Comme le reste de l'univers est grand, on reprend la notion de milieu environnant vue au chapitre I pour ne lister pour  $\bar{\Sigma}$  que les éléments retenus comme ayant une influence sur le comportement de  $\Sigma$ .

**Définitions**

On appelle **action mécanique extérieure** à un système  $\Sigma$  une action mécanique posée d'un élément de  $\bar{\Sigma}$  sur un des éléments de  $\Sigma$ .

On appelle **action mécanique intérieure** à un système  $\Sigma$  une action mécanique posée entre deux éléments de  $\Sigma$ .

**Notation**

Le tenseur des actions mécaniques extérieures à un système quelconque  $\Sigma$  est noté  $\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$ .

**Exemple**

Soit un système  $\Sigma = \{i, k, m\}$  composé de trois objets. On retient comme milieu environnant  $\bar{\Sigma} = \{1, 2, 3, 4\}$  quatre objets ou phénomènes :

- $(i \rightarrow k), (i \rightarrow m)$  sont des actions mécaniques intérieures à  $\Sigma$  ;
- $(2 \rightarrow i), (3 \rightarrow m)$  sont des actions mécaniques extérieures à  $\Sigma$  ;
- $(2 \rightarrow 3), (3 \rightarrow 4)$  ne rentrent dans aucune des deux catégories, ce sont des actions mécaniques qui ne concernent pas ce système  $\Sigma$ .

Le tenseur des actions mécaniques extérieures à  $\Sigma$  s'évalue par

$$\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \sum_{j=1}^4 \mathcal{F}(j \rightarrow \Sigma)$$

## 6.1.5 Équilibre d'un système matériel quelconque

Soit un système matériel  $\Sigma$  dont on constate ou on souhaite l'équilibre par rapport à un référentiel galiléen  $Rg$ .

**Théorème**

S'il existe un référentiel galiléen  $Rg$  dans lequel on constate ou on souhaite l'équilibre d'un système matériel  $\Sigma$ , alors le tenseur des actions mécaniques extérieures au système  $\Sigma$  est à chaque instant le tenseur nul.

$$\forall t, \forall P \quad \vec{V}(P, \Sigma/Rg) = \vec{0} \implies \forall t, \quad \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O} \quad (1)$$

La compréhension du sens de l'implication est fondamentale... C'est parce qu'il y a équilibre que le tenseur des actions mécaniques extérieures est nul !

## 6.1.6 Solide indéformable

Soit un solide indéformable  $S$  dont on constate ou on souhaite l'équilibre dans un référentiel galiléen.

**Théorème**

S'il existe un référentiel galiléen  $Rg$  dans lequel on constate ou on souhaite l'équilibre d'un solide indéformable  $S$ , alors le tenseur des actions mécaniques extérieures au solide  $S$  est à chaque instant le tenseur nul.

$$\forall t, \quad \mathcal{V}(S/Rg) = \mathcal{O} \implies \forall t, \quad \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) = \mathcal{O} \quad (2)$$



C'est la même implication !

### 6.1.7

L'équilibrage d'un solide en rotation est étudié en seconde année. On admet ici qu'il tourne sans générer de vibration.

## Réciproque

La réciproque des théorèmes de l'équilibre est fausse. Un solide  $S$  parfaitement équilibré, entretenu par un moteur en rotation uniforme dans un repère galiléen  $R_g$ , admet un torseur des actions mécaniques extérieures nul alors que le torseur cinématique  $\mathcal{V}(S/R_g)$  n'est pas le torseur nul.

Une seule proposition peut être énoncée : elle concerne tous les systèmes matériels, solides ou quelconques.

#### Proposition

Si, à chaque instant, le torseur des actions mécaniques extérieures de toute partie d'un système matériel  $\Sigma$  est le torseur nul, alors il existe un référentiel galiléen dans lequel ce système matériel  $\Sigma$  est en équilibre.

$$\forall t, \forall \Sigma_i \subset \Sigma, \mathcal{F}(\vec{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma_i) = \mathcal{O} \implies \exists R_g \mid \forall t, \forall P, \vec{V}(P, \Sigma/R_g) = \vec{0} \quad (3)$$

Cette proposition est dans les faits peu exploitable, car la nullité du torseur des actions mécaniques extérieures doit être vérifiée quelle que soit la partie incluse...

## 6.2 Méthodologie de résolution

### 6.2.1

#### Les différentes étapes

Résoudre un problème de statique se fait en plusieurs étapes :

- lecture et décodage.

Les auteurs constatent que l'étudiant moderne a tendance à *zapper* cette étape. Il n'est pas besoin d'être expert pour constater rétrospectivement que les principales difficultés rencontrées sont issues de défaillances lors de cette première étape.

- inventaire du milieu environnant.

En complément de la compréhension du mécanisme étudié, il s'agit à cette étape de faire la recherche exhaustive de tous les éléments extérieurs au système qui sont en relation avec lui. Le résultat de cette recherche est la liste des objets et des phénomènes dont il faut tenir compte lors de l'étude, sans chercher à ce stade à modéliser de manière systématique les actions mécaniques induites !

- décompte du nombre d'inconnues d'action mécanique et du nombre d'équations que l'on a à disposition.

Ces dénombrements ont pour objectifs :

- de se faire une opinion sur la faisabilité de la résolution ;
- de localiser les inconnues recherchées, bien sûr, mais surtout de dénombrer les inconnues que l'on souhaite éviter pour accélérer la résolution.

- mise en place d'une stratégie de résolution ;

Cette étape est complexe, au sens du premier chapitre où la *solution* n'est pas unique !

- modélisation des actions mécaniques utiles à la résolution ;
- résolution effective.



Les compétences acquises en cinématique donnent les clés de l'efficacité...



En fonction de son niveau de difficulté, un énoncé de problème donne plus ou moins de coups de pouce lors de l'une ou l'autre des étapes.

## 6.2.2

Une condition apparaît indispensable avant de commencer : il est nécessaire de connaître suffisamment les liaisons usuelles pour pouvoir imaginer immédiatement la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles !

## Anticiper un résultat

Pour arriver à mettre en place une stratégie de résolution de manière efficace, il est nécessaire d'arriver à anticiper le résultat d'un calcul vectoriel, notamment de prévoir si une composante va apparaître ou non lors de telle ou telle équation scalaire issue d'un équilibre.

Le travail d'imagination à mener est exposé sur un exemple. On suppose étudier l'équilibre d'un solide 2 par rapport à 1 et on s'intéresse à la contribution des actions mécaniques transmissibles par une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_2)$  entre deux solides 2 et 3.

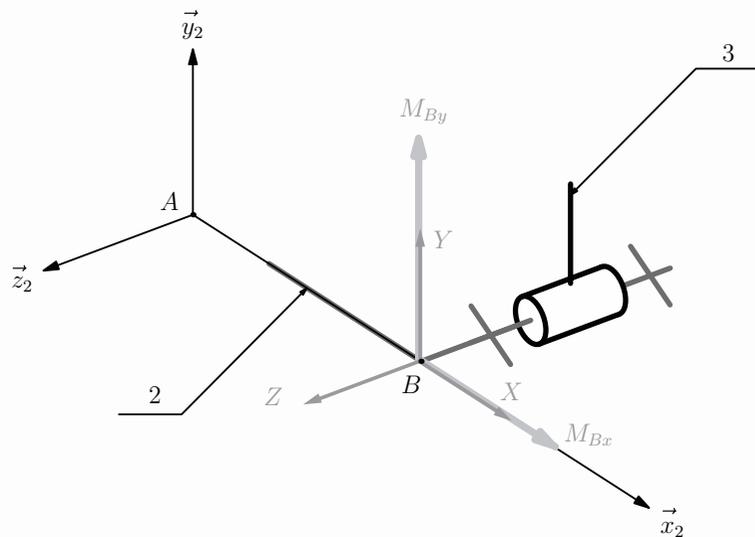


Figure 6.1 Les composantes dessinées au point B.

La résultante transmissible  $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$  est quelconque, le moment  $\vec{M}(B, 3 \rightarrow 2)$  n'a pas de composante suivant  $\vec{z}_2$  et on pose

$$\begin{aligned} \vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2 &= X & \vec{M}(B, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2 &= M_{Bx} \\ \vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 &= Y & \vec{M}(B, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 &= M_{By} \\ \vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_2 &= Z \end{aligned}$$

Ces composantes sont dessinées issues du point B sur la figure ci-dessus. On ajoute un point A défini par  $\vec{AB} = L\vec{x}_2$ .

On rappelle la formule de changement de points pour calculer le moment de l'action mécanique  $(3 \rightarrow 2)$  au point A

$$\vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) = \vec{M}(B, 3 \rightarrow 2) + \vec{R}(3 \rightarrow 2) \wedge \vec{BA}$$

Si ce calcul est mené avec les composantes posées, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_2 &= M_{Bx} \\ \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 &= M_{By} - LZ \\ \vec{M}(A, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_2 &= +LY \end{aligned}$$

On oublie provisoirement ce résultat et on regarde la figure. Trois propositions peuvent être formulées :

- la composante Z tend à faire tourner 2 autour de la droite  $(A, \vec{y}_2)$  dans le sens négatif, ce qui est confirmé par le calcul.

$$L\vec{x}_2 \wedge Z\vec{z}_2 = -LZ\vec{y}_2$$



Anticiper un calcul vectoriel revient à remplacer le calcul par un travail d'imagination de mouvements !

- la composante  $Y$  tend à faire tourner 2 autour de la droite  $(A, \vec{z}_2)$  dans le sens positif

$$L\vec{x}_2 \wedge Y\vec{y}_2 = +LY\vec{z}_2$$

- la droite  $(B, \vec{x}_2)$  passe par le point  $A$ . La composante  $X$  ne provoque aucune rotation autour du point  $A$

$$L\vec{x}_2 \wedge X\vec{x}_2 = \vec{0}$$

Ce travail d'imagination est utile pour savoir quelles inconnues scalaires fait intervenir telle ou telle équation. On termine ainsi l'exemple précédent avec les six propositions concernant l'influence des composantes transmissibles par la liaison pivot entre 2 et 3 sur l'équilibre de 2/1

- l'équation de résultante scalaire  $\vec{x}_2$  fait intervenir  $X$ , et uniquement  $X$  ;
- l'équation de résultante scalaire  $\vec{y}_2$  contient  $Y$  ;
- l'équation de résultante scalaire  $\vec{z}_2$  contient  $Z$  ;
- l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{x}_2$  contient  $M_{Bx}$  ;
- l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{y}_2$  fait intervenir  $M_{By}$  et  $Z$  ;
- l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_2$  ne fait intervenir que  $Y$  ;

Ces six propositions sont bien évidemment complétées par une septième

- l'équation de moment au point  $B$  scalaire  $\vec{z}_2$  évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot.

### 6.2.3 Mise en œuvre sur un exemple détaillé

On se propose d'illustrer une stratégie de résolution à partir d'un exemple représentatif.

On considère l'élévateur présenté sur la figure ci-dessous. Son architecture s'appuie sur un parallélogramme déformable. Il comprend :

- un bâti noté 1 auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on pose  $\vec{OC} = L\vec{x}_1$  ;
- un bras motorisé 2, en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un

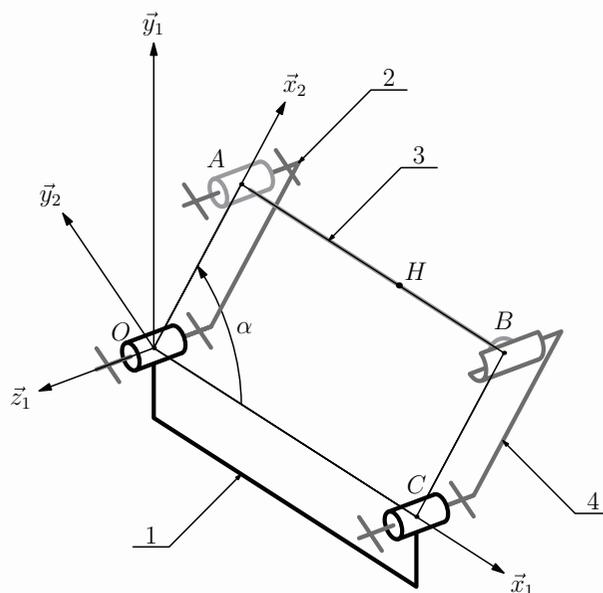


Figure 6.2 Schéma cinématique de l'élévateur.

repère  $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en prenant soin de confondre les vecteurs  $\vec{z}_2$  et  $\vec{z}_1$  et on pose d'une part  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , d'autre part  $\vec{OA} = R\vec{x}_2$  ;

- une plateforme 3 sur laquelle est posée la charge. Cette plateforme est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec le bras motorisé 1. On pose  $\vec{AB} = L\vec{x}_1$  et  $\vec{AH} = \lambda\vec{x}_1$ .
- une jambe 4 de même longueur que le bras 2, en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_1)$  avec le bâti et en liaison sphère-cylindre de centre  $B_3$  et d'axe  $(B_4, \vec{z}_4)$  avec la plateforme 3.

Concernant la modélisation des actions mécaniques, on considère les hypothèses suivantes :

- l'action de la charge sur la plateforme est modélisée par un glisseur d'axe central la droite  $(H, \vec{y}_1)$  ;

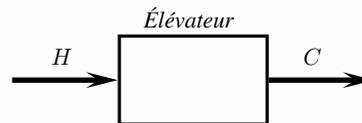
$$\mathcal{F}(c \rightarrow 3) = H \begin{Bmatrix} -H\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- l'action du moteur sur le bras motorisé est modélisée par un couple ;

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

- les poids des différentes pièces sont négligés devant l'intensité de la charge supportée ;
- les liaisons sont toutes supposées sans frottement.

En vue de dimensionner l'actionneur, on souhaite établir la relation entre le couple moteur  $C$  et la charge  $H$  lors d'une configuration d'équilibre.



### Lecture et décodage

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il n'est jamais inutile de détailler le contenu d'un **énoncé**, qui comporte :

- un titre, souvent un terme spécialisé ou une marque commerciale ;
- une description fonctionnelle, accompagnée de figures et d'images ;
- une description structurelle, accompagnée de schémas ;
- un jeu d'hypothèses en général simplificatrices ;
- une ou plusieurs questions dans le cadre d'une problématique.



L'incompréhension d'un titre est fréquente, et la description fonctionnelle est là pour expliquer...



C'est le temps investi lors de cette étape qui élève le niveau d'efficacité lors de la résolution !

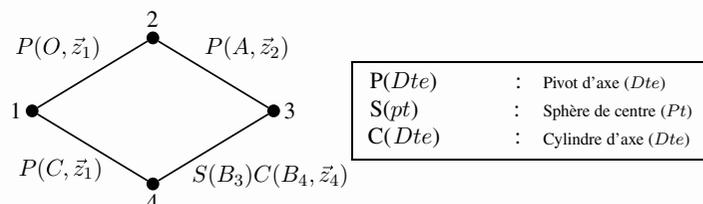


Figure 6.3 Graphe des liaisons de l'élévateur.

Après le constat des éléments présents ou absents peut débiter l'analyse du mécanisme. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de solides, comprenant quatre pièces et quatre liaisons, ce que résume le graphe des liaisons.

### Inventaire du milieu environnant

Avec les hypothèses de l'énoncé, on retient pour le milieu environnant :

- la charge ;
- le moteur.

### Décompte des nombres d'inconnues de liaison et d'équations

Que ce soit du point de vue de la cinématique ou des actions mécaniques, il est nécessaire de parcourir la chaîne fermée pour résoudre le problème. Si on considère le bâti 1 comme repère galiléen, trois équilibres sont à écrire pour la résolution : ce serait par exemple de manière systématique les équilibres 2/1, 3/1 et 4/1.

Ces trois équilibres donnent 18 équations scalaires.

La chaîne fermée comporte trois liaisons pivot et une liaison sphère-cylindre, donc admet 17 inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées sans frottement.

Au bilan, la résolution semble possible avec un système de 18 équations pour 19 inconnues ! À la condition que le rang de ce système de 18 équations soit égal à 18, on peut déterminer les 17 inconnues de liaison et le couple moteur  $C$  en fonction de la charge  $H$ , cette dernière inconnue devenant paramètre une fois basculée dans le second membre.

### Stratégie de résolution

De nombreuses possibilités de résolution existent. L'analyse préliminaire permet de borner ces possibilités :

- au minimum, trois équilibres sont à envisager, on ne peut donc probablement pas descendre en dessous de trois équations scalaires à écrire ;
- au maximum, l'écriture systématique de toutes les dix-huit équations doit donner la solution.

Dans l'hypothèse où on arrive à résoudre avec trois équations scalaires, cela signifie que l'on détermine deux inconnues de liaison et le couple moteur  $C$  en fonction de la charge  $H$ .

C'est ainsi que l'on peut décider de garder pour ces deux inconnues celles de la liaison sphère-cylindre. En conséquence, la stratégie est alors de chercher à éviter les quinze inconnues des trois liaisons pivot, et les trois équations scalaires à écrire sont alors :

- équilibre de 4 par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point  $C$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 4 ;
- équilibre de 3 par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_3$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 3 ;
- équilibre de l'ensemble  $\{2,3\}$  par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 2.

Arriver en autonomie à ces propositions est un des objectifs. Pour aider à y parvenir, le tableau (6.4) propose les différentes combinaisons de solides possibles lors des choix d'équilibre, dénombre en deuxième colonne les inconnues scalaires de liaison et liste en dernière colonne les inconnues scalaires d'actions mécaniques supplémentaires.



Ne sont pas retenues dans ce cas les influences de la pesanteur et de l'air...



On extrait donc de l'ensemble des dix huit équations un système de trois équations à quatre inconnues !



Si ces propositions apparaissent bien mystérieuses, il faut revenir à la section précédente, et ne pas hésiter à refaire schémas et graphes...



Un tel tableau n'est pas à produire de manière systématique. Il résume néanmoins les pensées du mécanicien qui balaie mentalement l'ensemble des possibilités...



L'exploit est remarquable, et l'intérêt est de le remarquer, mais il n'y a hélas pas de médaille...



Le premier exercice d'application permet de poursuivre la réflexion sur cet exemple ! Et de résoudre...

Équilibre	Nb. inc. liaison	Inc. autres
2/1	10	C
3/1	7	H
4/1	7	
{2, 3}/1	7	C, H
{2, 4}/1	17	C, H
{3, 4}/1	10	H
{2, 3, 4}/1	10	C, H

Figure 6.4 Les différents équilibres envisageables.

L'observation de ce tableau invite aux réflexions suivantes :

- l'étude de l'équilibre de l'ensemble {2, 4}/1 est possible et permet de faire intervenir toutes les inconnues du problème dans six équations. On se garde bien de poursuivre.
- la stratégie proposée s'appuie sur les trois lignes où apparaissent sept inconnues de liaison, à savoir à chaque fois les deux inconnues de la liaison sphère plan et cinq inconnues scalaires des différentes liaisons pivots.
- l'équilibre de 4 par rapport à 1 est particulier et mérite d'être repéré : il ne fait intervenir que deux éléments du milieu environnant.
- pour les lignes à dix inconnues de liaison, elles font intervenir deux liaisons pivot d'axes parallèles, et il est donc possible dans ce cas de proposer une équation scalaire évitant huit des dix inconnues.

## 6.3 Équilibres particuliers

### 6.3.1

### Résolutions triviales

Système soumis à l'action de deux glisseurs

#### Théorème

Si un système  $\Sigma$  est en équilibre dans un référentiel galiléen sous l'action de deux glisseurs, alors ces deux glisseurs sont opposés.

Le résultat se généralise à tout équilibre ne faisant intervenir que deux éléments du milieu environnant.

#### Théorème

Si un système  $\Sigma$  est en équilibre dans un référentiel galiléen sous les actions issues de deux éléments, alors les deux torseurs d'actions mécaniques correspondants sont opposés.

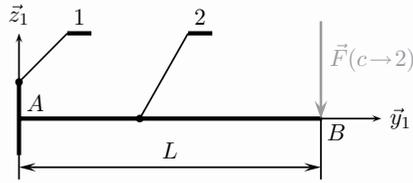
#### Exemple Poutre encastrée

On considère une poutre 2 de longueur  $L$  encastrée à une de ses extrémités dans un bâti 1 :

- on associe au bâti 1 un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- la poutre 2 reste immobile au cours du temps par rapport au bâti 1 et on pose  $\vec{AB} = L\vec{y}_1$ .

Le sens de l'implication est fondamental, la réciproque est fautive !

Une charge  $c$  est accrochée à l'extrémité  $B$  de la poutre et on modélise l'action de cette charge par une force au point  $B$  définie par  $\vec{F}(c \rightarrow 2) = -F\vec{z}_1$ .



**Figure 6.5** Une poutre encastree à une de ses extremités.

Un seul équilibre est à étudier, celui de 2 par rapport à 1 supposé galiléen. L'inventaire du milieu environnant permet de ne retenir que les deux éléments principaux :

- la charge  $c$  ;
- le bâti 1.

On dénombre six inconnues de liaison issues de l'encastrement de 2 sur 1 et la charge  $F$  pour six équations qu'il n'est pas utile d'écrire. En effet, la résolution est immédiate

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$$

Il n'est besoin que de préciser le glisseur  $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$  pour détailler  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 2) = {}_B \begin{Bmatrix} -F\vec{y}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = {}_B \begin{Bmatrix} F\vec{y}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le point  $A$  sur le schéma est symbolique, et y calculer les éléments de réduction ne présente aucun intérêt à ce stade.

### Système soumis à l'action de trois glisseurs

#### Théorème

Soit un système quelconque soumis à l'action de trois glisseurs.

Si ce système est en équilibre dans un référentiel galiléen, alors les trois axes centraux des glisseurs sont coplanaires, et sont de plus soit parallèles, soit concourants.

Ce théorème est utile lors de résolution graphique.

#### Exemple

On utilise en exemple la démonstration du théorème. Soit un système  $\Sigma$  en équilibre dans un référentiel galiléen soumis à l'action de trois glisseurs  $\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma)$ ,  $\mathcal{F}(2 \rightarrow \Sigma)$  et  $\mathcal{F}(3 \rightarrow \Sigma)$ . On pose

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma) = {}_A \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(2 \rightarrow \Sigma) = {}_B \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(3 \rightarrow \Sigma) = {}_C \begin{Bmatrix} \vec{R}_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les lois de l'équilibre annoncent  $\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O}$ , équation qui se détaille par

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma) + \mathcal{F}(2 \rightarrow \Sigma) + \mathcal{F}(3 \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O}$$

Concourants signifie sécants en un même point.

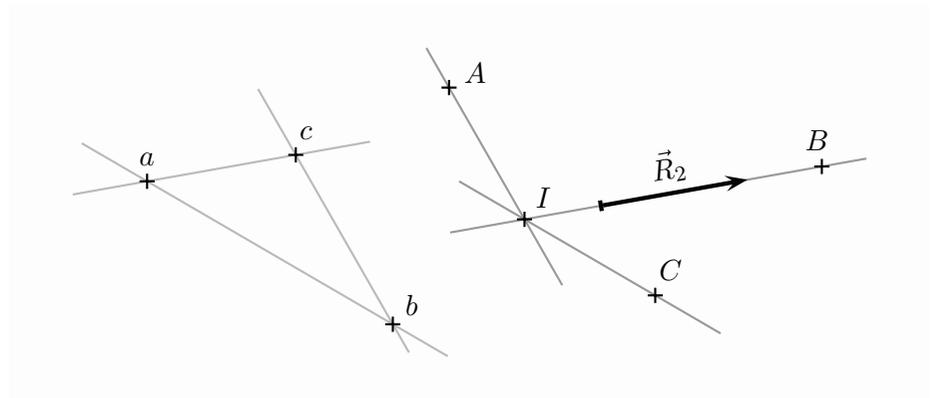
L'équation de moment au point  $A$  pour éviter  $\vec{R}_1$ , scalaire  $\vec{AB}$  pour éviter  $\vec{R}_2$ , donne un produit mixte nul  $(\vec{R}_3, \vec{AC}, \vec{AB}) = 0$

On suppose les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés et on en déduit que le vecteur  $\vec{R}_3$  peut être exprimé comme une combinaison linéaire des deux autres vecteurs et qu'il est donc dans le plan  $(\vec{AC}, \vec{AB})$ .

Ce raisonnement est recommencé deux fois pour montrer que les deux autres résultantes  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  sont également dans le plan  $(\vec{AC}, \vec{AB})$ . Les trois axes centraux sont ainsi nécessairement coplanaires, dans le plan  $(ABC)$ .

Soit de plus  $I$  le point d'intersection des droites  $(A, \vec{R}_1)$  et  $(B, \vec{R}_2)$ . L'équation de moment en ce point donne  $\vec{R}_3 \wedge \vec{CI} = \vec{0}$

La résultante  $\vec{R}_3$  est nécessairement colinéaire au vecteur  $\vec{CI}$  et les trois axes centraux sont bien concourants, ou parallèles dans le cas où le point  $I$  est rejeté à l'infini.



**Figure 6.6** Construction graphique dans le plan  $(ABC)$ .

Les constructions de la figure ci-dessus illustrent le résultat et méritent d'être refaites dans un ordre logique, à partir de la situation de départ suivante :

- on pose les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , non alignés ;
- on suppose connue la résultante  $\vec{R}_2$  et on propose une longueur de 20 mm pour  $\|\vec{R}_2\|$  ;
- on suppose connue la direction de l'axe central de  $\mathcal{F}(1 \rightarrow \Sigma)$ , que l'on trace à partir du point  $A$ .

À partir de là, la construction se fait en deux étapes :

- (1) sur la figure géométrique amorcée, la nécessaire concourance des trois axes centraux permet d'identifier le point d'intersection  $I$  et de tracer la droite  $CI$ .
- (2) il reste maintenant à exploiter l'équation de résultante  $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = \vec{0}$  dans un plan pour lequel on pose une « échelle des forces »
  - on trace une parallèle à la droite  $(IB)$  sur laquelle on pose un segment  $[ac]$  de 20 mm ;
  - on trace issue du point  $a$  une parallèle à la droite  $(IC)$  ;
  - on trace issue du point  $c$  une parallèle à la droite  $(IA)$  et on identifie le point d'intersection  $b$  ;



Sur un énoncé, une échelle des longueurs est nécessaire pour respecter les positions relatives des différents éléments géométriques.

## 6.3.2 L'arc-boutement

Un tiroir qui bloque, un serre-joint qui serre. Voici deux nouveaux exemples de manifestation du phénomène de frottement, néfaste dans le premier cas, utile dans le second !

Un premier mot s'impose pour décrire ces équilibres particuliers : l'arc-boutement.

### Définition

On appelle **arc-boutement** le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre subsiste indépendamment de l'intensité d'un effort qui tend à le rompre.

Autrement dit, si un équilibre est possible, il se réalise et dans le cas de l'arc-boutement, tout effort dépensé pour une mise en mouvement n'est pas suivi d'effet.

On illustre ce phénomène avec l'exemple d'un serre-joint présenté sur la figure ci-dessous, sur lequel on peut distinguer quatre ensembles :

- un mors fixe repéré 1, que l'on prend comme référence ;
- une tige repérée 2, encastrée sur le mors fixe 1 ;
- un mors mobile repéré 3, dessiné en filigrane, qui peut coulisser le long de la tige 2 en l'absence de serrage ;
- les pièces à serrer, prises entre les deux mors.

Le contact entre la tige 2 et le mors mobile 3 est caractérisé par un coefficient de frottement  $f$ .

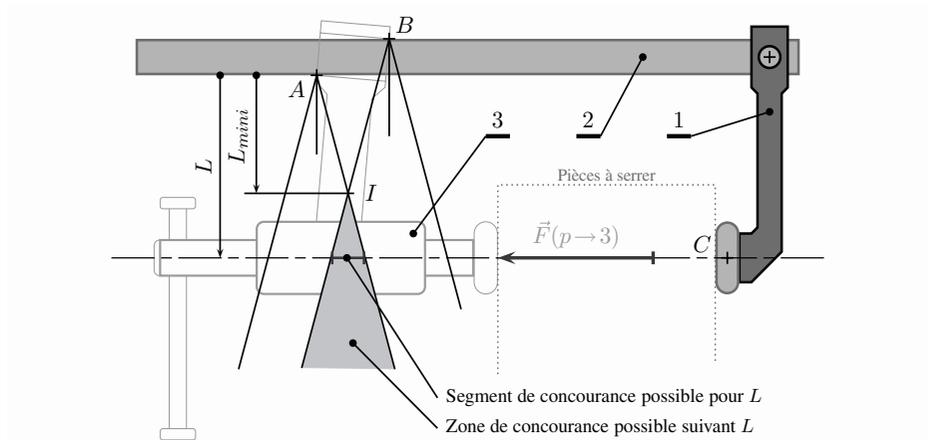


Figure 6.7 Modélisation d'un serre-joint.

Lors du serrage, le mors mobile peut légèrement basculer par rapport à la tige et le contact se fait en deux points nommés A et B. Trois actions mécaniques extérieures à 3 sont retenues pour caractériser son équilibre constaté par rapport à l'ensemble {1,2} que l'on considère comme galliléen :

- l'action des pièces à serrer, modélisée par un glisseur  $\mathcal{F}(p \rightarrow 3)$  ;
- l'action de la tige sur 3 au point A, modélisée par un glisseur  $\mathcal{F}(2_A \rightarrow 3)$  d'axe central la droite  $(A, \vec{R}(2_A \rightarrow 3))$  ;



En l'absence de frottement, il ne peut y avoir arc-boutement.

Le cône de frottement est de demi angle au sommet  $\varphi$  tel que  $\tan \varphi = f$ .

### 6.3.3 Le coincement

- l'action de la tige sur 3 au point  $B$ , modélisée par un glisseur  $\mathcal{F}(2_B \rightarrow 3)$  d'axe central la droite  $(B, \vec{R}(2_B \rightarrow 3))$ .

En l'absence de frottement, les deux droites  $(A, \vec{R}(2_A \rightarrow 3))$  et  $(B, \vec{R}(2_B \rightarrow 3))$  sont parallèles et l'équilibre de 3/1 ne peut pas être expliqué. Issus des points  $A$  et  $B$  sont alors dessinés les *cônes de frottement*. Une zone d'intersection de ces cônes apparaît, à partir d'un point nommé  $I$ . Différents comportements sont à envisager :

- l'utilisateur prend en main le mors mobile à une distance de la tige 2 inférieure à  $L_{mini}$  et l'équilibre n'est pas possible. Le mors peut coulisser le long de la tige.
- dès l'apparition de l'effort de poussée  $\vec{F}(p \rightarrow 3)$ , le contact est réalisé aux points  $A$  et  $B$  et comme l'équilibre est possible, le mors mobile ne peut plus bouger par rapport à la tige, quelle que soit l'intensité de l'effort  $\|\vec{F}(p \rightarrow 3)\|$ .
- dès que l'effort de poussée s'annule, le mouvement du mors mobile par rapport à la tige est à nouveau possible.

Le phénomène de coincement s'appuie sur les mêmes bases que le phénomène d'arc-boutement. Mais alors que l'arc-boutement disparaît dès la fin de l'effort qui tend à rompre l'équilibre, le coincement subsiste.

#### Définition

On appelle **coincement** le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre persiste sous des actions mécaniques indéterminées alors même que la cause de l'équilibre a disparu.

Autrement dit, il faut dépenser de l'énergie pour « décoincer » un objet coincé, opération inutile pour l'arc-boutement.

On illustre ce phénomène avec l'exemple d'un poussoir présenté sur la figure 6.8 ci-après. Ce mécanisme est conçu pour bloquer des pièces sur un bâti et comporte trois ensembles :

- un bâti repéré 1 supposé galiléen, auquel on associe une base vectorielle  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un coin 2, en liaison glissière de direction  $\vec{z}_1$  avec le bâti 1. On lui associe une base vectorielle  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  confondue avec celle du bâti et une base vectorielle  $(\vec{x}_2, \vec{v}_2, \vec{w}_2)$  en posant  $\alpha = (\vec{y}_2, \vec{v}_2)$ . Sur ce coin est fabriqué un plan de normale  $\vec{v}_2$  et on appelle  $A$  un point de ce plan.
- un poussoir repéré 3, en liaison glissière de direction  $\vec{y}_1$  avec le bâti 1. Sur ce poussoir est fabriquée une calotte sphérique de centre  $C$ . Elle est en contact avec le plan du coin 2 en un point  $I$ , contact caractérisé par un coefficient de frottement  $f$ .

Concernant les actions mécaniques à modéliser :

- Un vérin déplace le coin 2 suivant  $\vec{z}_1$  par rapport au bâti, et on pose

$$\mathcal{F}(v \rightarrow 2) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} F_{v2} \vec{z}_1 \\ 0 \end{array} \right.$$

- Le poussoir se déplace suivant  $\vec{y}_1$  par rapport au bâti jusqu'à être en butée contre la pièce à bloquer, et l'action mécanique de cette dernière sur le poussoir est représentée par un torseur quelconque  $\mathcal{F}(p \rightarrow 3)$ .
- Les actions de la pesanteur sont négligées devant les autres actions mécaniques.



En l'absence de frottement, il ne peut y avoir coincement.

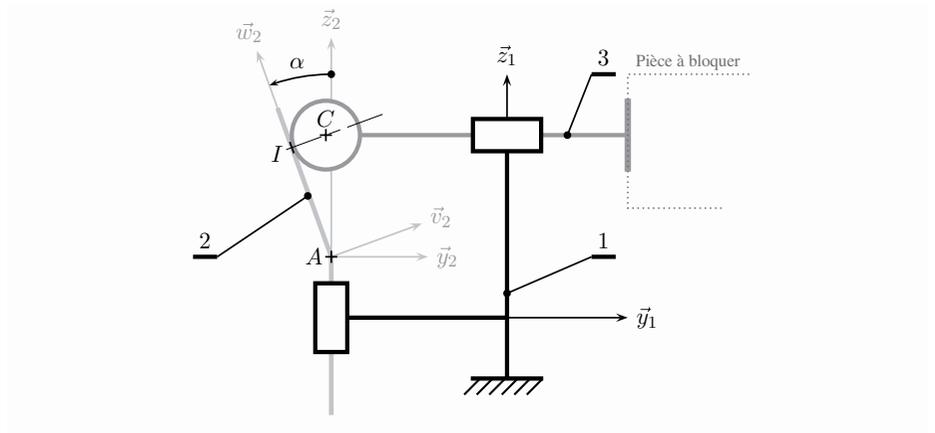


Figure 6.8 L'équilibre possible d'un coin en l'absence de poussée.

On s'intéresse à l'équilibre possible du coin 2 par rapport à 1 en l'absence de poussée du vérin, et les seules actions mécaniques extérieures à retenir sont issues :

- du bâti 1 ;
- du pousseur 3.

On pose alors

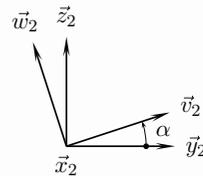
$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \begin{cases} -N_{32}\vec{v}_2 + \vec{T}_{32}, & \text{avec } N_{32} \geq 0 \text{ et } \frac{\|\vec{T}_{32}\|}{|N_{32}|} \leq f \\ I \vec{0} \end{cases}$$

On s'intéresse à l'équation de résultante scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison glissière et on obtient

$$(-N_{32}\vec{v}_2 + \vec{T}_{32}) \cdot \vec{z}_1 = 0 \tag{4}$$

Pour poursuivre le raisonnement, on suppose la composante de  $\vec{T}_{32}$  suivant  $\vec{x}_2$  nulle et on pose  $\vec{T}_{32} = T_{32}\vec{w}_2$ . On trace la figure de définition de l'angle  $\alpha$  pour effectuer les calculs de trigonométrie.

L'équation scalaire (4) s'explique alors par :



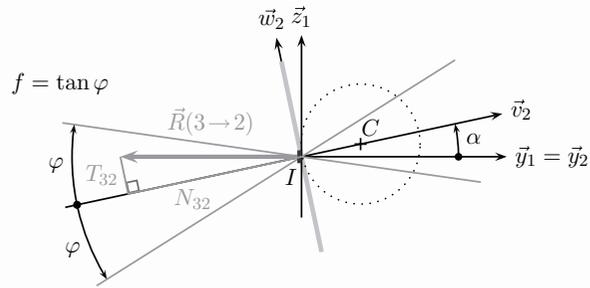
$$\frac{T_{32}}{N_{32}} = \tan \alpha \tag{5}$$

Cette dernière équation permet de conclure quant aux possibilités d'équilibre :

- soit  $\tan \alpha \leq f$ , c'est-à-dire  $\alpha \leq \varphi$ , et l'équilibre est possible ;
- soit  $\tan \alpha > f$ , c'est-à-dire  $\alpha > \varphi$ , et l'égalité de l'équation (5) ne peut être satisfaite, l'équilibre du coin 2 par rapport au bâti 1 est alors impossible.



La première condition  $N_{32} \geq 0$  traduit le contact unilatéral entre 2 et 3, la deuxième condition vient de l'application des lois du frottement dans le cas de l'adhérence.



**Figure 6.9** Configuration géométrique de coincement possible.

La résolution ne peut pas être menée plus loin, vu le trop grand nombre d'inconnues par rapport au nombre d'équations. En effet, le problème comporte 13 inconnues de liaison et 7 inconnues pour les actions du vérin et de la pièce à bloquer pour deux équilibres possibles, soit 12 équations scalaires.

Plusieurs remarques peuvent néanmoins être formulées :

- On arrive à montrer que l'équilibre de 2 par rapport à 1 est possible, mais on ne peut déterminer la valeur du module de la résultante  $\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\|$  par les seules lois de l'équilibre.
- L'hypothèse que la composante tangentielle  $\vec{T}_{32}$  suivant  $\vec{x}_2$  est nulle ne peut être vérifiée, même si elle reste plausible car le mécanisme n'autorise pas de glissement suivant cette direction. En conséquence, si l'on souhaite le coincement effectif de 2, il ne faut pas choisir l'angle  $\alpha$  trop proche de l'angle  $\varphi$ .
- La composante normale  $N_{32}$  est positive, l'équation (5) donne alors une composante  $T_{32}$  également positive.

On en déduit qu'en l'absence de frottement, une vitesse de glissement apparaîtrait au point  $I$ , caractérisée par le vecteur  $\vec{V}(I, 2/3)$  suivant  $-\vec{w}_2$ , car opposée au vecteur  $\vec{T}_{32}$ . L'action de 3 sur 2 provoquerait le déplacement de 2 par rapport à 1 suivant  $-\vec{z}_1$ .

## Synthèse

### Connaissances

Je sais définir les mots ou expressions :

- équilibre ;
- repère galiléen ;
- système matériel ;
- actions mécaniques extérieures, intérieures ;
- arc-boutement, coincement.

Je connais :

- le théorème de l'équilibre pour un solide indéformable ;
- le théorème de l'équilibre pour un système matériel quelconque ;
- la réciproque du théorème de l'équilibre ;
- le contenu type d'un énoncé.

### Savoir-faire

Je sais

- faire un inventaire exhaustif du milieu environnant, en ne nommant que des objets ou des phénomènes ;
- proposer des modèles d'actions mécaniques pour les liaisons usuelles ;
- compter le nombre d'inconnues d'un problème ;
- identifier un système soumis à l'action de deux glisseurs, de trois glisseurs.

## Exercices d'application

### 6.1 Table élévatrice

À partir de l'exemple de la table élévatrice présentée sur la figure 6.2 à la page 156, on se propose de rechercher d'autres stratégies de résolution.

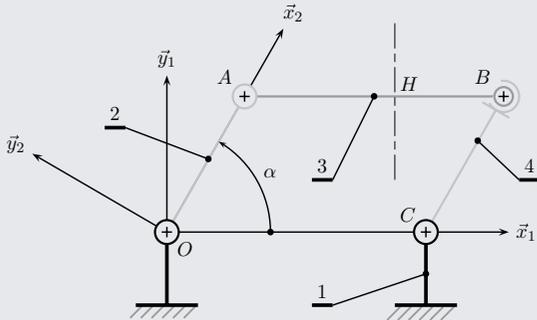


Schéma plan de l'élévateur.

Le lecteur est invité à reprendre la description des pages 154 à 155.

- Quelle stratégie de résolution permet d'éviter :
  - les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 1 ;
  - les cinq inconnues de la liaison pivot entre 3 et 2 ;
  - les deux inconnues de la liaison sphère cylindre entre 4 et 3 ;
  - trois des cinq inconnues scalaires de la liaison pivot entre 4 et 1.
- Un étudiant propose :
  - équilibre de 3 par rapport à 1 : équation de résultante scalaire  $\vec{y}_1$  pour avoir  $H$  ;
  - équilibre de 2 par rapport à 1 : équation de moment en  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour avoir  $C$  ;

Combien d'inconnues de liaisons fait-il intervenir ? A-t-il des chances de résoudre avec une troisième équation ? Proposer une ou plusieurs équations complémentaires ?

- Avec une stratégie à choisir, déterminer la relation recherchée  $C = f(H)$ .

### 6.2 Couple moteur, couple résistant ?

On se propose de définir les deux termes « couple moteur » et « couple résistant » à partir de la description d'un moteur électrique.

Un moteur électrique est constitué principalement de quatre pièces :

- un carter repéré 1 ;
- un arbre repéré 2, en contact avec le carter par l'intermédiaire de deux roulements à billes 3 et 4 ;
- un rotor  $r$  solidaire de l'arbre ;
- un stator  $s$  solidaire du carter.

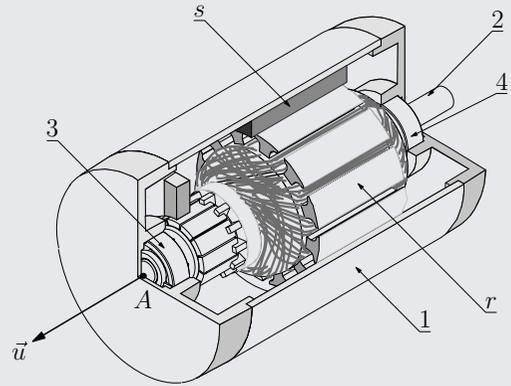


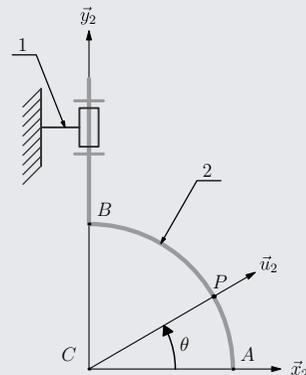
Schéma simplifié d'un moteur électrique.

On suppose le moteur en situation, entraînant une charge en rotation. On modélise l'action de cette charge sur l'arbre par un torseur  $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$  indéterminé.

- Tracer le graphe des liaisons, et proposer un modèle de comportement pour le contact entre l'arbre 2 et le carter 1.
- Faire l'inventaire des actions mécaniques qui s'exercent sur l'arbre 2.
- L'arbre est supposé parfaitement équilibré et en rotation uniforme par rapport au carter, ce qui permet de lui appliquer les lois de l'équilibre. Quel est l'intérêt d'écrire l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{u}$  ?
- En exploitant l'équation précédente, proposer une définition d'un couple moteur  $Cm$ , d'un couple résistant  $Cr$ .

### 6.3 Frottement fluide sur un malaxeur

On considère une pale filaire repérée 2 en forme de quart de cercle de rayon  $R$  plongée dans un liquide visqueux. Elle est schématisée sur la figure ci-dessous en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{y}_2)$  avec un bâti repéré 1, et la rotation 2/1 est caractérisée par le vecteur  $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_{21} \vec{y}_2$ .



Un axe de malaxeur en forme de quart de cercle

Le champ de pesanteur est donné par  $\vec{g} = -g\vec{y}_1$ , avec  $g > 0$ .

On suppose l'action mécanique élémentaire du fluide sur la pale modélisable par une force linéique proportionnelle à la vitesse relative  $\vec{q}(P) = -\mu\vec{V}(P, 2/1)$ .

1. À partir des indications de la figure, paramétrer la position du point courant  $P$  sur le solide 2.
2. Caractériser le mouvement 2/1 et exprimer le vecteur vitesse  $\vec{V}(P, 2/1)$ .
3. Exprimer la force élémentaire  $d\vec{F}(f \rightarrow 2)$  appliquée à un élément de longueur  $Rd\theta$  centré au point courant  $P$ .
4. Déterminer le torseur modélisant l'action du fluide sur l'arbre 2, et préciser sa nature.

L'axe 2 est entraîné en rotation par un motoréducteur noté  $m$  dont l'action mécanique sur cet axe est modélisée par un couple suivant  $\vec{y}_1$

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{y}_1 \end{Bmatrix}$$

5. Faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures  $\vec{2} \rightarrow 2$ .
6. Quelle équation issue du théorème de l'équilibre évite les inconnues scalaires de la liaison pivot ?  
En supposant cette équation applicable sans donnée supplémentaire en régime permanent, déterminer la valeur du couple moteur  $C_m$  à exercer pour entretenir la rotation 2/1.
7. Le théorème de l'équilibre est-il applicable en régime permanent pour déterminer les actions mécaniques dans la liaison pivot ?

#### 6.4 Barrière articulée

On considère une barrière articulée de parking telle que représentée figure 1 et schématisée figure 2.

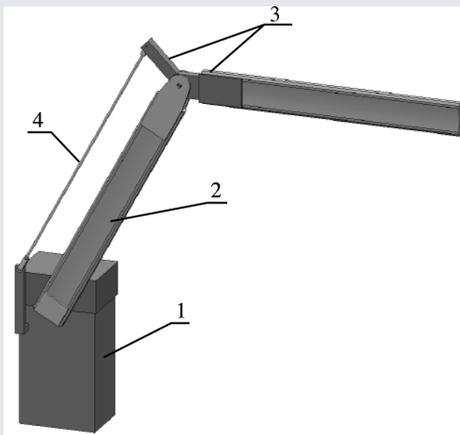


Figure 1 – Vue de la barrière articulée

Elle comprend quatre ensembles principaux, détaillés ci-dessous, conçus et assemblés de manière à obtenir le parallélogramme  $(ABDE)$ .

- Un bâti 1 est fixé au sol :
  - on lui associe deux repères,  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $(A, \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{z}_1)$ , avec  $\alpha = (\vec{y}_1, \vec{v}_1)$  ;
  - on pose  $\vec{AE} = a\vec{v}_1$ .
- Un bras 2 est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti :
  - on lui associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ , avec  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  ;
  - on pose  $\vec{AB} = L\vec{x}_2$  ;
  - ce bras est de masse  $m_2 = m$ , de centre de masse  $G_2$ , avec  $\vec{AG}_2 = \frac{1}{2}\vec{AB}$ .
- Un avant-bras 3 est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_2)$  avec le bras 2 :
  - pour obtenir au montage un parallélogramme, on pose  $\vec{BD} = \vec{AE}$  ;
  - l'avant-bras est de masse  $m_3 = m$ , de centre de masse  $G_3$  et on admet à chaque instant  $\vec{BG}_3 = \frac{L}{2}\vec{x}_1$ .
- Une biellette 4 est en liaison sphérique de centre  $E$  avec le bâti 1 et en liaison sphérique de centre  $D$  avec l'avant-bras 3 :
  - la longueur  $ED$  est choisie égale à  $L$  et on admet à chaque instant  $\vec{ED} = \vec{AB}$  ;
  - la masse de la biellette est négligeable devant les masses des bras et avant-bras.

Toutes les liaisons sont supposées sans frottement.

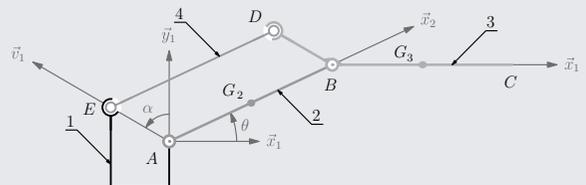


Figure 2 – Schéma cinématique de la barrière

La pesanteur caractérisée par  $\vec{g} = -g\vec{y}_1$  n'est prise en compte que pour les solides 2 et 3.

En cas d'absence d'action motrice d'ouverture ou de fermeture, un frein non représenté permet au bâti 1 d'exercer sur le bras 2 un couple de moment  $C_f \vec{z}_1$  afin de maintenir le mécanisme en équilibre par rapport au sol.

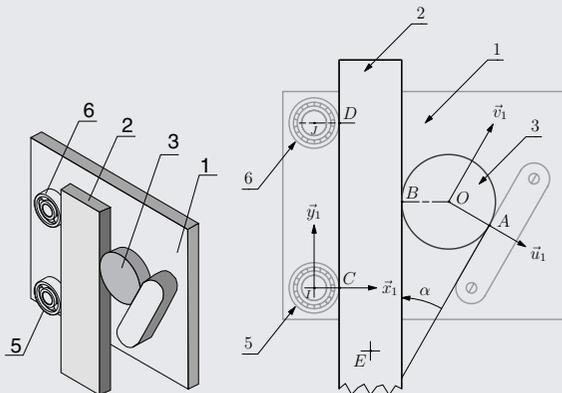
L'objectif de cet exercice est le dimensionnement du frein : il importe donc de déterminer l'expression du moment  $C_f$  en fonction du poids des pièces pour toute position d'équilibre de la barrière.

1. Déterminer le nombre d'inconnues statiques de liaison, et identifier toutes les autres composantes d'action mécanique à retenir.

2. Proposer une stratégie de résolution.
3. Déterminer la relation  $C_f = g(\theta)$ , exprimée en fonction de la masse  $m$  et des grandeurs géométriques  $L$ ,  $a$  et  $\alpha$  du mécanisme.
4. Comparer ce dernier résultat avec le couple nécessaire au maintien d'une barrière rectiligne (AC) de longueur  $2L$  et de masse  $2m$ .

### 6.5 Dispositif autobloquant

On considère le mécanisme autobloquant représenté sur la figure ci-dessous



Dispositif autobloquant.

Ce mécanisme comprend trois ensembles :

- une plaque plane 1 que l'on oriente en posant  $\vec{z}_1$  orthogonal au plan. Sur cette plaque est fixée une rampe et sont montés deux roulements à billes dont les bagues extérieures 5 et 6 sont avec la plaque en liaison pivot respectivement d'axes  $(I, \vec{z}_1)$  et  $(J, \vec{z}_1)$ . On pose  $\vec{y}_1$  orientant la droite joignant les centres géométriques des deux roulements et la base vectorielle  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est ainsi définie. On associe à la plaque une deuxième base vectorielle  $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{z}_1)$  en orientant le vecteur  $\vec{u}_1$  suivant la normale à la rampe et on pose  $\alpha = (\vec{u}_1, \vec{x}_1)$  ;
- un barreau parallélépipédique 2 de centre géométrique  $E$ , en appui sur les roulements de la plaque 1 ;
- un galet mobile 3 cylindrique de révolution, de centre géométrique  $O$ , logé entre le barreau 2 et la rampe 1.

Ce mécanisme est dit « autobloquant » car on constate le phénomène remarquable suivant :

- on peut translater le barreau 2 par rapport à 1 suivant  $\vec{y}_1$  ;
- on ne peut pas translater le barreau 2 par rapport à 1 suivant  $-\vec{y}_1$ , quel que soit l'effort mis en œuvre pour cela.

Les contacts plans entre le barreau et la plaque, le galet et la plaque sont conservés à chaque instant et sont supposés

sans frottement. On ne s'intéresse ainsi qu'aux trois degrés de liberté des mouvements dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  et les différents contacts sont assimilés à des points :

- contact aux points  $C$  et  $D$  entre le barreau 2 et les roulements à billes 5 et 6 du plateau 1 ;
- contact au point  $B$  entre le barreau 2 et le galet 3 ;
- contact au point  $A$  entre le galet 3 et la rampe 1.

Concernant les actions mécaniques :

- le contact au point  $A$  est caractérisé par un coefficient de frottement  $f_{13}$  et on pose  $\tan \varphi_{13} = f_{13}$  ;
- le contact au point  $B$  est caractérisé par un coefficient de frottement  $f_{23}$  et on pose  $\tan \varphi_{23} = f_{23}$  ;
- les contacts aux points  $C$  et  $D$  sont caractérisés par un coefficient de frottement  $f$  ;
- les deux liaisons pivot sont supposées sans frottement ;
- les actions mécaniques de pesanteur sont négligées devant les actions mécaniques de contact ;
- le référentiel lié à la plaque est supposé galiléen ;
- l'action mécanique extérieure qui tend à déplacer le barreau 2 par rapport au bâti 1 est modélisée par un glisseur

$$\mathcal{F}(e \rightarrow 2) = E \begin{Bmatrix} \pm F \vec{y}_1, \text{ avec } F > 0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

L'objectif de cette étude est de trouver les conditions géométriques sur l'angle  $\alpha$  pour que le fonctionnement décrit soit possible, et de caractériser l'action mécanique entre le barreau 2 et le galet 3.

1. Tracer le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues d'actions mécaniques.

Une étude systématique nécessite l'étude de quatre équilibres. En déduire le nombre d'équations scalaires à disposition et évaluer les chances de réussite pour la résolution du problème.

2. Par l'étude de l'équilibre du galet 5 par rapport à 1, montrer que le phénomène de frottement n'a pas d'influence sur l'action mécanique  $\mathcal{F}(2 \rightarrow 5)$ .

3. Étudier l'équilibre du galet 3 par rapport à la plaque 1 et déterminer les conditions sur l'angle  $\alpha$  qui permettent le blocage du barreau.

4. On suppose l'effort de poussée suivant  $-\vec{y}_1$ , soit  $\vec{R}(e \rightarrow 2) = -F \vec{y}_1$ .

Déterminer la relation entre l'effort de poussée  $F$  et les actions s'appliquant au galet 3.

5. On suppose l'effort de poussée suivant  $\vec{y}_1$ , soit  $\vec{R}(e \rightarrow 2) = +F \vec{y}_1$ .

L'équilibre du barreau 2 par rapport à la plaque 1 est-il possible ?

6. Comment peut-on appeler le phénomène mis à profit par ce dispositif ?

## Exercices d'approfondissement

### 6.6 Poutrelle haubannée

On s'intéresse aux différentes possibilités de mise en place pour deux câbles qui supportent une poutrelle. Le dispositif étudié, schématisé sur la figure ci-dessous, est constitué de quatre ensembles :

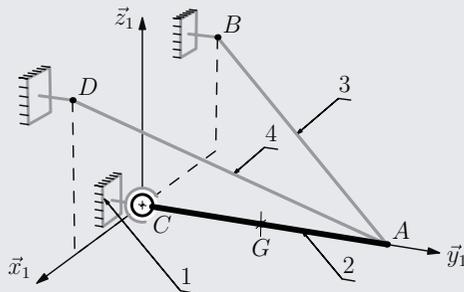
– le bâti est repéré 1 et on lui associe le repère  $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , avec  $\vec{z}_1$  orientant la verticale ascendante du lieu. On pose

- $\vec{CB} = b\vec{x}_1 + d\vec{z}_1$
- $\vec{CD} = c\vec{x}_1 + e\vec{z}_1$

– la poutrelle, repérée 2, est de masse  $m$  et de centre de masse  $G$ . Elle est supposée horizontale, immobile par rapport au bâti et on pose  $\vec{CA} = a\vec{y}_1$ . Elle est en liaison sphérique de centre  $C$  avec le bâti 1. La poutrelle est supposée homogène, on pose donc  $\vec{CG} = \frac{1}{2}\vec{CA}$ .

– un câble 3 sans masse, inextensible mais infiniment flexible, est accroché entre les points  $A$  et  $B$ .

– un câble 4 identique est accroché entre les points  $A$  et  $D$ .



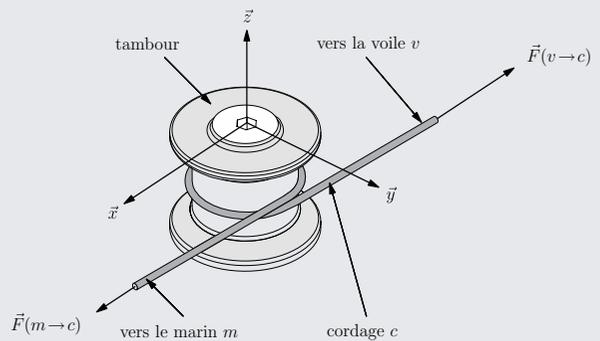
Une poutrelle haubannée.

1. Tracer le graphe des liaisons.
2. Détailler l'ensemble des actions mécaniques extérieures à poser pour l'étude de l'équilibre de la poutrelle 2 par rapport au bâti 1 supposé galiléen et dénombrer les inconnues scalaires de liaison.
3. Déterminer les expressions des tensions dans les câbles 3 et 4 en fonction de la masse  $m$  de la poutrelle et des grandeurs géométriques posées.
4. Quelles conditions a-t-on sur les coordonnées  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  des points  $B$  et  $D$  pour garantir l'équilibre.

### 6.7 Winch

Un Winch est un mécanisme monté sur le pont d'un navire à voile. Il comporte un tambour sur lequel on peut enrouler un des cordages utilisés pour le réglage des voiles.

Ce tambour est guidé en rotation par rapport au pont du navire et un dispositif à cliquets empêche un des deux sens de rotation.



Un tambour de Winch avec un tour de cordage

On suppose le système { tambour, cordage } en équilibre par rapport au pont du voilier que l'on considère assimilable à un repère galiléen pour cette étude. On cherche dans ce cas à établir la relation entre les modules des vecteurs  $\vec{F}(v \rightarrow c)$  et  $\vec{F}(m \rightarrow c)$  en fonction de l'angle d'enroulement noté  $\alpha$  du cordage autour du tambour de rayon  $R$  et du coefficient de frottement  $f$  pour le couple de matériaux en contact.

#### Compréhension du phénomène

1. En regardant la figure 2.9 ci-dessus et sachant que  $\|\vec{F}(v \rightarrow c)\| \gg \|\vec{F}(m \rightarrow c)\|$ , émettre un avis sur le sens de rotation bloqué.

2. Pourquoi la somme  $\vec{F}(v \rightarrow c) + \vec{F}(m \rightarrow c)$  n'est-elle pas forcément nulle ?

#### Évolution de la tension dans le cordage

3. Faire une figure pour poser l'équilibre d'un morceau de cordage de longueur  $R d\alpha$  enroulé de part et d'autre du point courant  $P$  de position repéré par l'angle  $\alpha$ .

4. Écrire les deux équations scalaires de résultante suivant la normale et la tangente au contact, sachant que le poids du morceau de cordage est négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

On rappelle la formule de Taylor pour un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction  $f$  au voisinage de  $x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R(x),$$

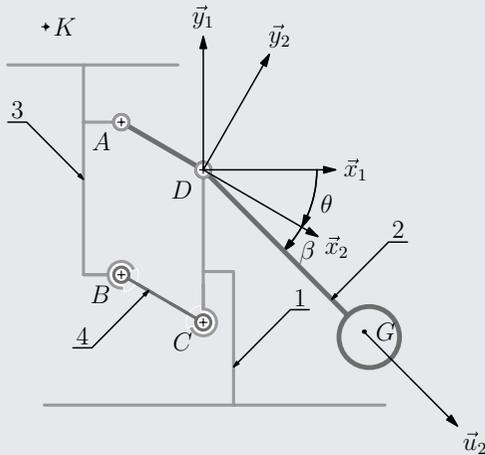
$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

5. Exploiter la formule de Taylor, les approximations trigonométriques usuelles et la loi de Coulomb à la limite du glissement pour déterminer la loi recherchée.

6. En supposant trois tours de cordage effectués et en prenant un coefficient de frottement  $f = 0,2$ , déterminer la tension nécessaire à fournir si la voile exerce un effort de 1000 N sur le cordage.

### 6.8 Pèse-lettre mécanique

On considère le pèse-lettre mécanique schématisé ci-dessous. Lorsqu'un objet est posé sur le plateau, le mécanisme prend une nouvelle position d'équilibre caractérisée par un angle  $\theta$ , dont la valeur est relevée par le biais d'un index placé devant une graduation.



Un pèse-lettre mécanique.

Le pèse-lettre étudié comporte quatre ensembles :

- un bâti, repéré 1, auquel on associe un repère  $(D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , avec  $\vec{y}_1$  orientant la verticale ascendante.

On pose  $\vec{CD} = a\vec{y}_1$

- un balancier, repéré 2, est assimilable à une ligne brisée  $ADG$ . Il est en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1.

On lui associe un repère  $(D, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose

- l'angle  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  pour la mise en position de 2 par rapport à 1 ;
- le rayon  $\vec{DA} = -b\vec{x}_2$  ;
- le repère  $(D, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{z}_2)$  défini par l'angle  $\beta = (\vec{x}_2, \vec{u}_2)$  ;
- la bras  $\vec{DG} = c\vec{u}_2$ .

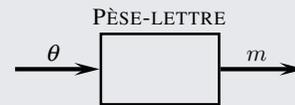
Une masse est accrochée à l'extrémité du balancier. Le centre de gravité de cet ensemble est situé au point  $G$  et la masse totale est notée  $M$ .

- un plateau repéré 3 de masse  $m_3$  supporte l'objet dont on veut évaluer la masse  $m_o$ . Il est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec le balancier. On pose le point  $B$  tel que  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{CD}\| = a$ . La masse de l'ensemble {3, objet} est notée  $m$  et l'on a bien évidemment  $m = m_o + m_3$ .

- une bielle repérée 4 est en liaison sphérique de centre  $B$  avec le plateau et de centre  $C$  avec le bâti. Sa longueur  $\|\vec{BC}\|$  est prise égale à  $b$ . Sa masse est négligée devant celle du plateau 3.

Les liaisons sont supposées sans frottement et l'accélération de la pesanteur est prise égale à  $\vec{g} = -g\vec{y}_1$ . Le référentiel lié au bâti 1 est assimilable à un référentiel galiléen.

On recherche la relation exprimant la valeur de la masse  $m$  en fonction de l'angle  $\theta$  et des paramètres  $\beta, M, a$  et  $b$ .



Déterminer la relation  $m = f(\theta)$  et montrer que la position du centre de masse  $K$  de l'ensemble {3, objet} n'a pas d'influence sur le résultat de la mesure.

### 6.9 Roue libre

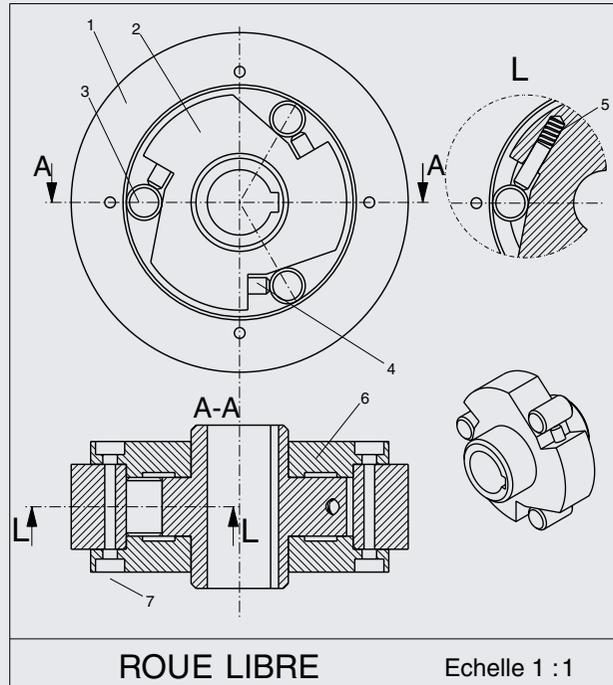
Une roue libre est un dispositif qui n'autorise la rotation relative de deux solides que dans un seul des deux sens possibles. La figure ci-dessous présente un modèle de roue-libre à galets, dont le fonctionnement s'appuie sur le phénomène d'arc-boutement. Le paramétrage adopté est illustré sur la figure suivante.

Le mécanisme étudié comprend :

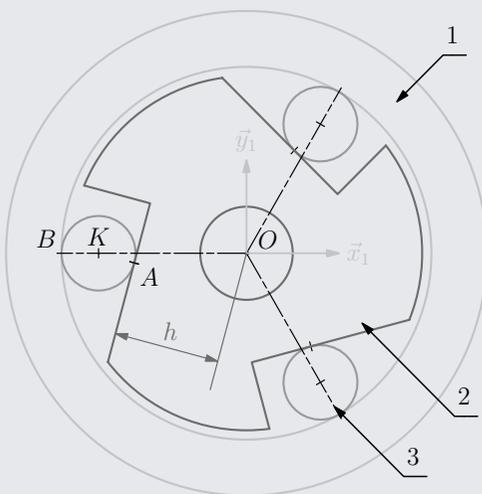
- une bague repérée 1 que l'on prend comme référence. On lui associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on note la présence d'une forme cylindrique de révolution creuse d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  et de rayon  $R$ .
- un arbre 2 que l'on considère en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec la bague 1 et sur lequel sont usinés trois plans parallèles à l'axe de rotation et disposés à  $120^\circ$ . On note  $h$  la distance entre les plans et l'axe de rotation.
- trois galets 3 de rayon  $r$ , logés entre la forme cylindrique de révolution creuse de la bague et les plans de l'arbre.
- trois plots 4, poussés par les ressorts 5, maintiennent en permanence les galets en contact avec la bague et l'arbre.

Concernant les actions mécaniques :

- toutes les pièces sont en acier et les contacts du galet avec la bague et l'arbre sont caractérisés par un coefficient de frottement noté  $f$  ;
- les ressorts sont de raideur suffisamment petite pour que l'on néglige leurs actions mécaniques devant les actions de contact ;



Dessin d'ensemble d'un modèle de roue-libre à trois galets.



Paramétrage de la roue-libre.

– la masse des galets 3 n'est pas prise en compte pour cette étude, ce qui permet de considérer le référentiel attaché à la bague comme galiléen.

Tous les plans perpendiculaires à l'axe de rotation sont semblables, et on cherche à définir dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  les conditions géométriques à respecter pour que le fonctionnement souhaité soit possible.

– Peut-on anticiper le sens de la rotation bloquée ?

– Définir les conditions géométriques entre les trois paramètres  $R$ ,  $r$  et  $h$  garantissant d'une part l'équilibre possible du galet 3 par rapport à la bague 1, d'autre part le montage possible du galet entre la bague et l'arbre.

– À partir des résultats précédents, justifier le sens de rotation bloqué.

### 6.10 Coinceur à cames

Cet équipement, photographié figure 1, permet à un alpiniste de placer un point d'ancrage dans une fissure pour laquelle il est adapté.

Il est principalement constitué d'un axe sur lequel sont articulées des cames, d'une tige souple attachée à l'axe, d'une sangle qui termine la tige, de ressorts de torsion de câbles et d'une gâchette. Les ressorts tendent à faire tourner les cames par rapport à l'axe dans le sens de l'écartement des profils des cames, ce qui permet la mise en contact avec les parois de la fissure. La gâchette et les câbles, au contraire, permettent de rendre le coinçeur moins encombrant et rendent ainsi possible la mise en place dans la fissure. La figure 2 présente trois positions différentes des cames faisant varier l'écartement.

Le système est autobloquant : si les conditions de géométrie de la fissure, de frottement et de direction de la charge sont vérifiées, le coinçeur reste en adhérence avec la paroi indépendamment de la valeur de la charge suspendue à la sangle. Les quatre cames sont à rotation indépendantes et permettent au coinçeur de fonctionner avec stabilité pour

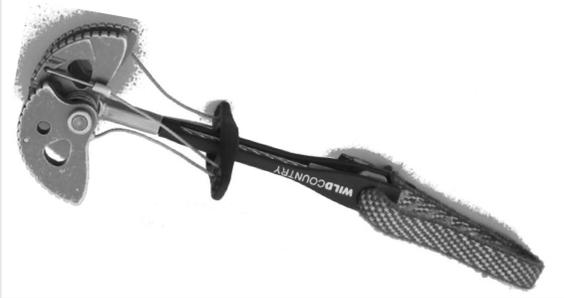


Figure 1 – Une photographie d'un coin à cames

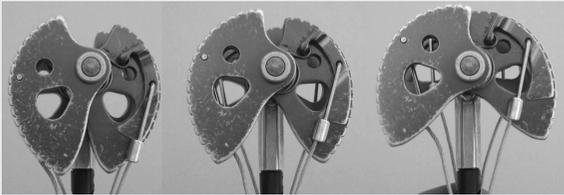


Figure 2 – Trois positions différentes des cames

des parois non strictement parallèles. Chaque modèle est conçu pour une charge nominale donnée ainsi qu'un intervalle pour la taille de la fissure.

Le modèle étudié est caractérisé pour une charge nominale de 14 kN et un intervalle pour la taille de la fissure de 43 mm à 66 mm.

**Hypothèses pour l'étude**

Le parallélisme entre les deux faces de la fissure, la position dans laquelle le coin est mis en place, la direction de la charge par rapport à la fissure permettent de faire une modélisation plane du mécanisme, telle que proposée figure 3.

On considère donc une charge appliquée à l'ensemble 2 constitué de l'axe et de la sangle modélisée par un glisseur de résultante  $-P\vec{y}_1$  de 14 kN de module, parallèle à la fissure et dont l'axe central passe par le point O.

Les cames 3 et 4 sont supposées en contact ponctuel avec la paroi 1, respectivement aux points A et B, et en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_1)$  avec l'axe 2.

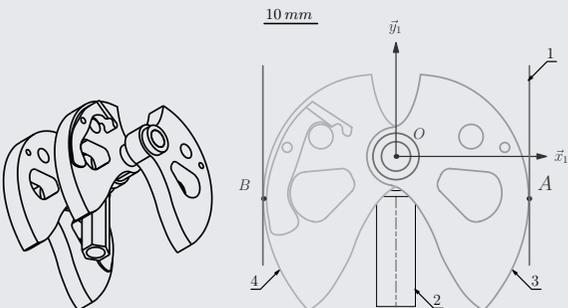


Figure 3 – Modélisation géométrique adoptée pour l'étude

La masse totale du coin est de l'ordre de 150 g ; on négligera donc le poids des pièces ainsi que les actions de rappel des ressorts devant la charge  $P$  appliquée.

**Objectif de l'étude**

Déterminer dans la position de la figure 3 l'angle de frottement minimum au contact paroi-came pour assurer le coincement.

1. En supposant l'équilibre du coin réalisé, déterminer l'action de la paroi 1 sur la came 3 en fonction de la charge  $P$  appliquée.
2. En déduire l'angle minimum de frottement au contact paroi-came pour assurer le coincement.
3. Proposer une forme de profil qui conserve la condition géométrique précédente.

**6.11 Maxpid**

On se propose de reprendre le mécanisme « Maxpid » présenté au chapitre IV à la page 104.

Le mécanisme est composé de cinq ensembles :

- un bâti 1, auquel on associe un repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . On pose  $\vec{OA} = a\vec{x}_1$  et  $\vec{OB} = b\vec{y}_1$ .
- un bras 2, en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  et on pose  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ ,  $\vec{AC} = c\vec{x}_2$  et  $\vec{AD} = d\vec{x}_2$ .
- une noix 4, en liaison pivot glissant d'axe  $(C, \vec{z}_2)$  avec le bras 2.
- un moteur électrique, dont le carter 5 est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1.
- une vis 3, solidaire de l'arbre du moteur. On lui associe un repère  $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  en choisissant  $\vec{x}_3$  suivant l'axe de rotation du moteur électrique. Cette vis est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_3)$  avec le carter 5 et en liaison hélicoïdale de pas  $p$  et d'axe  $(C, \vec{x}_3)$  avec la noix 4.

Concernant les actions mécaniques :

- le référentiel lié au bâti 1 est supposé galiléen ;
- l'accélération de la pesanteur est caractérisée par  $\vec{g} = -g\vec{y}_1$  ;
- toutes les liaisons sont supposées sans frottement ;
- une charge est accrochée à l'extrémité du bras 2, et cet ensemble est de masse totale  $M$ , de centre de masse le point  $D$ . On modélise ainsi cette action mécanique sur 2 par un glisseur :

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} -Mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- le stator du moteur électrique  $5m$  exerce sur le rotor 3 un couple noté  $C$  suivant  $\vec{x}_3$  et on pose alors

$$\mathcal{F}(5m \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\vec{x}_3 \end{Bmatrix}$$

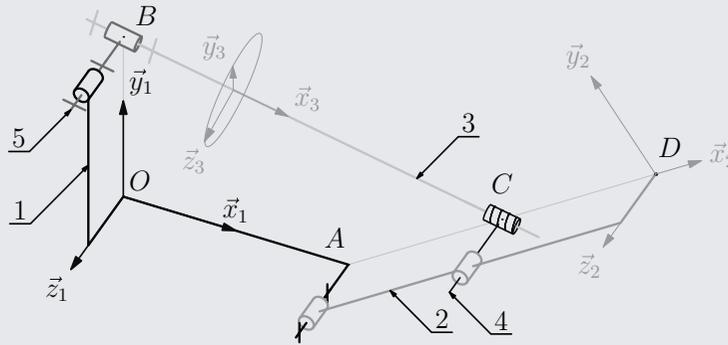


Schéma cinématique du mécanisme « Maxpid ».

– le poids des différentes pièces est négligé devant l'action de la charge.

L'objectif de cette étude est de trouver le couple moteur nécessaire au maintien du bras 2 en équilibre par rapport au bâti 1 en fonction de la masse  $M$  de la charge et de la position  $\theta$  du bras par rapport au bâti.



1. Dénombrer les inconnues scalaires d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons.
2. Proposer une stratégie de résolution pour trouver la relation  $C = f(M, \theta)$ .

3. Mettre en œuvre cette stratégie et exprimer cette relation.

4. On relève pour différentes positions d'équilibre l'intensité du courant traversant le moteur. La constante de couple est égale à  $52,5 \text{ mN/A}$  et on obtient après conversion le tableau suivant :

$\theta$ [°]	5,9	14,8	39,9	50,7	60,9	70,1	80	89,8
$C$ [mNm]	65,65	60,35	34,15	28,85	21,00	13,15	5,25	2,65

Tracer et superposer pour  $\theta$  de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  cette courbe à la courbe théorique obtenue en prenant comme valeurs numériques :

$$a = 70 \text{ mm} \quad b = 80 \text{ mm} \quad c = 80 \text{ mm} \quad d = 190 \text{ mm}$$

$$p = 4 \text{ mm/tr} \quad M = 1,9 \text{ kg} \quad g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$$

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 6.1

1. La stratégie induite est de déterminer les deux inconnues scalaires de la résultante  $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$  dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  :

- équilibre de 4/1 : équation de moment en  $B$  pour éviter les deux inconnues de la liaison sphère cylindre, scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter trois des cinq inconnues de la liaison pivot entre 4 et 1. Les deux inconnues qui apparaissent sont les deux inconnues scalaires de la résultante  $\vec{R}(1 \rightarrow 4)$  dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  ;
- équilibre de l'ensemble {3,4} par rapport à 1 : équation de moment en  $A$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot entre 2 et 3 ;
- équilibre de {2,3}/1 : équation de moment au point  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot entre 1 et 0.

Que ce soit la stratégie vue en cours ou celle-ci, il est à remarquer qu'elles s'appuient toutes les deux sur l'identification de l'objet 4 qui n'est soumis qu'aux actions mécaniques issues de deux éléments.

2. L'équation de résultante scalaire  $\vec{y}_1$ , issue de l'équilibre de 3 par rapport à 1, fait intervenir deux inconnues scalaires de liaison :

- la composante suivant  $\vec{y}_1$  de la résultante  $\vec{R}(4 \rightarrow 3)$  ;
- la composante suivant  $\vec{y}_1$  de la résultante  $\vec{R}(2 \rightarrow 3)$ .

L'équation de moment en  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$ , issue de l'équilibre de 2 par rapport à 1, fait également intervenir deux inconnues scalaires de liaison :

- les deux composantes dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  de la résultante  $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$ .

On a donc à ce stade un système de deux équations à cinq inconnues –  $C, H$  et trois inconnues de liaison – à traiter. Il manque deux équations scalaires pour arriver à un système de quatre équations à cinq inconnues. Ces deux équations ne doivent bien évidemment pas faire intervenir d'autres inconnues scalaires ! Elles existent, ce sont par exemple :

- équation de moment en  $C$  scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de l'ensemble {3,4}/1 ;
- équation de moment en  $A$  scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de 3 par rapport à 1 ;

Le réflexe de l'étudiant qui se focalise uniquement sur les grandeurs recherchées le conduit à devoir écrire un plus grand nombre d'équations. Ceci dit, dans le cas où on ne trouve pas de chemin plus court, il est toujours possible d'écrire les dix huit équations scalaires !

3. La stratégie suivante reprend les trois équilibres proposés dans le cours :

- équation de moment au point  $C$  scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de 4 par rapport à 1, pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 4

$$\left( \vec{R}(3 \rightarrow 4) \wedge \vec{C}\vec{B} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Le vecteur  $\vec{C}\vec{B}$  est à chaque instant orthogonal au vecteur  $\vec{z}_1$ , donc le résultat du produit vectoriel ne peut être orthogonal à  $\vec{z}_1$ . Le produit vectoriel  $\vec{R}(3 \rightarrow 4) \wedge \vec{C}\vec{B}$  est donc nécessairement nul et les deux vecteurs sont colinéaires. On pose alors

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) = k_{34} \vec{C}\vec{B}$$

- équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_3$  issue de l'équilibre de 3 par rapport à 1, pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 3

$$\left( -k_{34} \vec{C}\vec{B} \wedge \vec{B}\vec{A} - H \vec{y}_1 \wedge \vec{H}\vec{A} \right) \cdot \vec{z}_3 = 0 \quad (1)$$

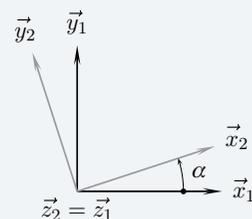
- équilibre de l'ensemble {2,3} par rapport à 1 et écriture de l'équation de moment au point  $O$  scalaire  $\vec{z}_1$  pour éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 1 et 2.

$$\left( -k_{34} \vec{C}\vec{B} \wedge \vec{B}\vec{O} - H \vec{y}_1 \wedge \vec{H}\vec{O} + C \vec{z}_1 \right) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (2)$$

Les vecteurs  $\vec{O}\vec{A}$  et  $\vec{C}\vec{B}$  sont à chaque instant égaux, ainsi que les vecteurs  $\vec{z}_3$  et  $\vec{z}_1$ . On décompose dans l'équation (2) le vecteur  $\vec{B}\vec{O}$  en  $\vec{B}\vec{A} + \vec{A}\vec{O}$  et on calcule alors la différence des deux dernières équations (2) – (1) pour trouver

$$\left( -H \vec{y}_1 \wedge \vec{A}\vec{O} + C \vec{z}_1 \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

On rappelle  $\vec{O}\vec{A} = R \vec{x}_2$  et on trace la figure de définition de l'angle  $\alpha$ .

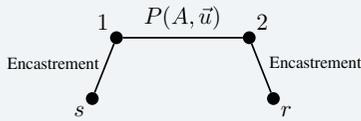


Cette figure permet d'évaluer  $\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2 = -\cos \alpha \vec{z}_1$ , et on en déduit finalement la relation recherchée

$$C = HR \cos \alpha$$

### 6.2

1. On propose comme modèle de comportement pour le contact entre l'arbre et le carter une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{u})$ . Le moteur est constitué d'une chaîne ouverte de solides. Il n'y a surtout pas contact entre le rotor et le stator !



2. Le milieu environnant retenu pour l'ensemble {arbre, rotor} est constitué :

- du carter, par l'intermédiaire de la liaison pivot ;
- du stator, pour les phénomènes d'origine électromagnétique ;
- de la charge, pour l'énergie nécessaire à son mouvement.

Cet inventaire aboutit à cinq inconnues scalaires de liaison et à *a priori* douze inconnues scalaires pour les actions mécaniques issues de la charge et du stator.

3. L'équation de moment au point A scalaire  $\vec{u}$  permet d'éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot. Il est nécessaire pour poursuivre de paramétrer les actions mécaniques  $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$  et  $\mathcal{F}(s \rightarrow r)$

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(c \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, c \rightarrow 2) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(s \rightarrow r) = \begin{cases} \vec{R}(s \rightarrow r) \\ \vec{M}(A, s \rightarrow r) \end{cases}$$

Une fois ces torseurs posés, l'équation scalaire proposée donne alors

$$\vec{M}(A, c \rightarrow 2) \cdot \vec{u} + \vec{M}(A, s \rightarrow r) \cdot \vec{u} = 0$$

4. On appelle couple moteur l'action mécanique d'origine électro-magnétique filtrée par la liaison pivot

$$C_m = \vec{M}(A, s \rightarrow r) \cdot \vec{u}$$

On appelle couple résistant le moment scalaire exercé par le récepteur suivant l'axe de rotation

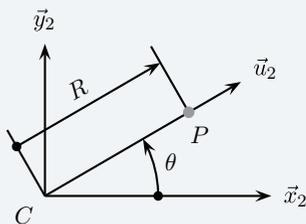
$$C_r = \vec{M}(A, c \rightarrow 2) \cdot \vec{u}$$

Il faut garder à l'esprit que les grandeurs scalaires habituellement posées cachent une problématique bien plus complexe :

- on ne perçoit les effets que d'une partie des actions d'origine électromagnétique ;
- les liaisons *encaissent* toutes les composantes suivant les degrés de liberté supprimés.

### 6.3

1. À partir de la figure proposée, on pose  $\vec{CP} = R\vec{u}_2$ , avec le rayon  $R$  constant et l'angle  $\theta$  variant entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .



2. La liaison entre l'axe 2 et le bâti 1 est une liaison pivot d'axe  $(C, \vec{y}_1)$

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{cases} \omega_{21} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

Par changement de point sur ce mouvement, on écrit pour le point courant  $P$

$$\vec{V}(P, 2/1) = \omega_{21} \vec{y}_2 \wedge R \vec{u}_2$$

La figure de la question précédente permet de calculer le produit vectoriel  $\vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2$  et on obtient

$$\vec{V}(P, 2/1) = -R \cos \theta \omega_{21} \vec{z}_2$$

3. On exploite le résultat précédent pour l'expression de la force élémentaire au point  $P$  du fluide  $f$  sur l'axe 2

$$d\vec{F}(f \rightarrow 2) = \vec{q}(P) ds$$

$$= \vec{q}(P) R d\theta$$

$$= +\mu R^2 \cos \theta d\theta \omega_{21} \vec{z}_2$$

4. On caractérise le torseur  $\mathcal{F}(f \rightarrow 2)$  par ses éléments de réduction au point  $C$ .

• Concernant la résultante

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = \int d\vec{F}(f \rightarrow 2)$$

Après substitution et arrangement, l'expression se détaille ainsi

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = \mu R^2 \omega_{21} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \vec{z}_2$$

On obtient finalement

$$\vec{R}(f \rightarrow 2) = \mu R^2 \omega_{21} [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{z}_2$$

$$= \mu R^2 \omega_{21} \vec{z}_2$$

• Concernant le vecteur moment au point  $C$

$$\vec{M}(C, f \rightarrow 2) = \int \vec{CP} \wedge d\vec{F}(f \rightarrow 2) \quad (1)$$

Comme les vecteurs  $\vec{CP}$  et  $d\vec{F}(f \rightarrow 2)$  sont respectivement suivant  $\vec{u}_2$  et  $\vec{z}_2$ , on détaille le produit vectoriel  $\vec{u}_2 \wedge \vec{z}_2$

$$\vec{u}_2 \wedge \vec{z}_2 = (\cos \theta \vec{x}_2 + \sin \theta \vec{y}_2) \wedge \vec{z}_2$$

$$= -\cos \theta \vec{y}_2 + \sin \theta \vec{x}_2$$

Après substitution et arrangement, l'expression (1) se détaille ainsi

$$\vec{M}(C, f \rightarrow 2)$$

$$= \mu R^3 \omega_{21} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos \theta d\theta \vec{x}_2 - \cos^2 \theta d\theta \vec{y}_2) \quad (2)$$

Deux intégrales sont alors à calculer :

– concernant la première

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

– concernant la seconde

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

On obtient alors après substitution dans l'équation (2)

$$\vec{M}(C, f \rightarrow 2) = \mu R^3 \omega_{21} \left( \frac{1}{2} \vec{x}_2 - \frac{\pi}{4} \vec{y}_2 \right)$$

On constate que le produit scalaire  $\vec{R}(f \rightarrow 2) \cdot \vec{M}(C, f \rightarrow 2)$  est nul. Cela signifie que le torseur  $\mathcal{F}(f \rightarrow 2)$  est un glisseur.

5. L'axe du malaxeur 2 est soumis aux quatre actions mécaniques suivantes :

- la pesanteur  $p \rightarrow 2$  ;
- le bâti  $1 \rightarrow 2$  ;
- le moteur  $m \rightarrow 2$  ;
- le fluide  $f \rightarrow 2$ .

6. Issue du théorème de l'équilibre appliqué à la pale filaire 2, l'équation de moment au point  $C$  scalaire  $\vec{y}_1$  évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot.

En régime permanent, la vitesse de rotation  $\omega_{21}$  est constante et on admet la pertinence de l'équation citée

$$\vec{M}(C, \vec{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_1 = 0$$

Seules les actions mécaniques issues du moteur et du fluide donnent des quantités non nulles et on obtient l'expression du couple moteur en régime permanent

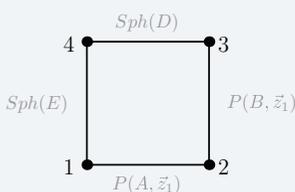
$$C_m = \mu \frac{\pi}{4} R^3 \omega_{21}$$

7. Le centre de masse  $G$  de la pale filaire 2 n'est pas sur l'axe de rotation  $(C, \vec{y}_1)$ , les quantités d'accélération ne sont donc pas nulles en régime permanent et le théorème de l'équilibre n'est pas applicable pour déterminer les actions mécaniques transmissibles par la liaison pivot.

## 6.4

1. On trace le graphe des liaisons du mécanisme, en notant :

- $P(Dte)$  une liaison pivot d'axe la droite  $Dte$  ;
- $Sph(Pt)$  une liaison sphérique de centre le point  $Pt$ .



On compte alors 16 inconnues statiques de liaison non recherchées, auxquelles il faut ajouter l'inconnue  $C_f$  et les poids du bras et de l'avant-bras.

2. Trois équilibres sont à exploiter ; sans trop réfléchir, on a alors à traiter un système de 18 équations à 16 inconnues de liaison. Pour une résolution à la main, il est judicieux de repérer la biellette 4 en équilibre sous l'action de deux glisseurs, et aussi de chercher à éviter toutes les inconnues des liaisons pivot :

- équilibre de 4/1, avec l'équation de moment au point  $D$  ou  $E$  ;
- équilibre de 3/1, avec l'équation de moment au point  $B$  scalaire  $\vec{z}_1$  ;
- équilibre de l'ensemble  $\{2,3\}/1$ , avec l'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_1$ .

3. On met en œuvre la stratégie précédente.

### Équilibre de la biellette 4 par rapport à 1

On dénombre deux actions mécaniques extérieures :

- l'action du bâti  $1 \rightarrow 4$  ;
- l'action de l'avant-bras  $3 \rightarrow 4$ .

On pose les deux torseurs associés aux liaisons sphérique

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 4) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E \quad \mathcal{F}(3 \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(3 \rightarrow 4) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$$

L'équation de moment au point  $E$  permet de proposer

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) = F_{34} \vec{x}_2$$

### Équilibre de l'avant-bras 3 par rapport à 1

On dénombre trois actions mécaniques extérieures :

- la pesanteur  $p \rightarrow 3$  ;
- la biellette  $4 \rightarrow 3$  ;
- le bras  $2 \rightarrow 3$ .

On pose les torseurs associés

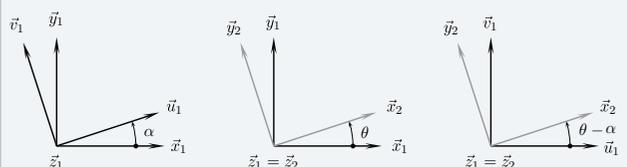
$$\mathcal{F}(p \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} -mg \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_3} \quad \mathcal{F}(4 \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} -F_{34} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$$

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(B, 2 \rightarrow 3) \perp \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_B$$

L'équation de moment au point  $B$  scalaire  $\vec{z}_1$  évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot

$$\left( -F_{34} \vec{x}_2 \wedge \overrightarrow{DB} \right) \cdot \vec{z}_1 + \left( -mg \vec{y}_1 \wedge \overrightarrow{G_3 B} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad (1)$$

Les figures de changement de base sont utiles pour effectuer les produits vectoriels



On effectue le produit vectoriel  $\vec{x}_2 \wedge \vec{v}_1 = \cos(\theta - \alpha)\vec{z}_1$  et on détaille l'équation (1) pour trouver

$$F_{34} = \frac{1}{2} \frac{L}{a \cos(\theta - \alpha)} mg$$

### Équilibre de l'ensemble {2, 3} par rapport à 1

On dénombre cinq actions mécaniques extérieures :

- le bâti  $1p \rightarrow 2$  par la liaison pivot ;
- le bâti  $1f \rightarrow 2$  par le frein ;
- la pesanteur  $p \rightarrow 2$  ;
- la pesanteur  $p \rightarrow 3$  ;
- la bielle  $4 \rightarrow 3$ .

On pose les trois torseurs manquants

$$\mathcal{F}(1p \rightarrow 2) =_A \begin{cases} \vec{R}(1p \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, 1p \rightarrow 2) \perp \vec{z}_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(1f \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{0} \\ C_f \vec{z}_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) =_{G_2} \begin{cases} -mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

L'équation de moment au point A scalaire  $\vec{z}_1$  évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot

$$\left( \vec{M}(A, 1f \rightarrow 2) - mg\vec{y}_1 \wedge \vec{G}_2\vec{A} - mg\vec{y}_1 \wedge \vec{G}_3\vec{A} - F_{34}\vec{x}_2 \wedge \vec{D}\vec{A} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

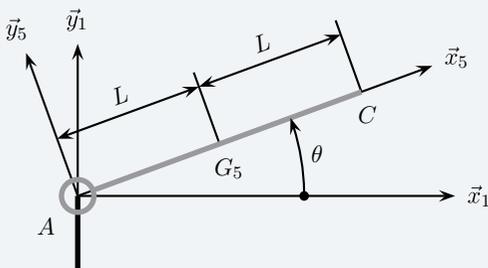
On décompose  $\vec{G}_3\vec{A} = \vec{G}_3\vec{B} + \vec{B}\vec{A}$  et  $\vec{D}\vec{A} = \vec{D}\vec{B} + \vec{B}\vec{A}$ , puis on utilise l'équation (1) pour réécrire l'expression précédente

$$C_f - \left( mg\vec{y}_1 \wedge \vec{G}_2\vec{A} \right) \cdot \vec{z}_1 + \left( -mg\vec{y}_1 \wedge \vec{B}\vec{A} \right) \cdot \vec{z}_1 - \underbrace{\left( F_{34}\vec{x}_2 \wedge \vec{B}\vec{A} \right) \cdot \vec{z}_1}_{=0} = 0$$

On calcule le produit vectoriel  $\vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 = \cos\theta\vec{z}_1$  et on trouve finalement

$$C_f = \frac{3}{2} mgL \cos\theta$$

4. On trace le schéma cinématique d'une barrière rectiligne 5, non articulée, de longueur  $2L$  et de masse  $2m$



Cette barrière est en équilibre sous l'action :

- de la pesanteur  $p \rightarrow 5$  ;

- du bâti par la liaison pivot  $1p \rightarrow 5$  ;
- du bâti par l'intermédiaire du frein  $1f \rightarrow 5$ .

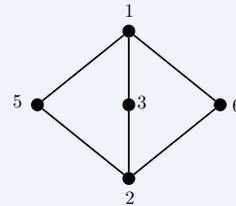
L'équation de moment au point A scalaire  $\vec{z}_1$  évite les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot et on obtient

$$C_f = 2mgL \cos\theta$$

La barrière articulée limite l'encombrement du mécanisme en position ouverte et minore le couple de maintien de 25 %.

## 6.5

1. Le graphe des liaisons comporte cinq sommets et six arcs



En ce limitant aux mouvements dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$ , on dispose de douze équations scalaires issues des quatre équilibres à étudier :

- en supposant les contacts sans frottement, on compte deux inconnues scalaires par liaison pivot et une inconnue par contact, soit huit inconnues scalaires de liaison, auxquelles il faut ajouter  $F$  ;
- en supposant les contacts avec frottement, il faut ajouter au décompte précédent une inconnue tangentielle par contact, et on dénombre au total douze inconnues scalaires de liaison et  $F$  ;

Résoudre un système de douze équations à douze inconnues en prenant  $F$  comme paramètre est *a priori* possible.

2. La bague extérieure du roulement 5 est en équilibre par rapport à 1 sous l'action du bâti et du barreau :

Écrire l'équation de moment au point I scalaire  $\vec{z}_1$  évite les deux inconnues scalaires de la liaison pivot et on obtient

$$\left( \vec{R}(2 \rightarrow 5) \wedge \vec{C}\vec{I} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Le vecteur  $\vec{C}\vec{I}$  est à chaque instant orthogonal au vecteur  $\vec{z}_1$ , donc le résultat du produit vectoriel ne peut pas être orthogonal à  $\vec{z}_1$ . Le produit vectoriel  $\vec{R}(2 \rightarrow 5) \wedge \vec{C}\vec{I}$  est ainsi nécessairement nul et les deux vecteurs sont colinéaires. On pose

$$\vec{R}(2 \rightarrow 5) = R_{25}\vec{x}_1, \text{ avec } R_{25} \leq 0$$

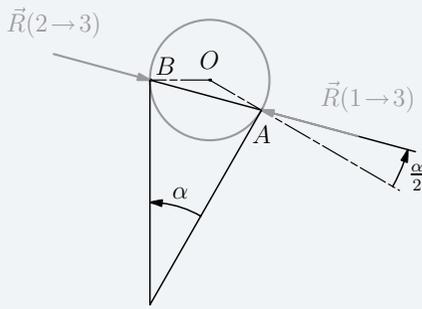
La composante tangentielle en C est à chaque instant nulle. Le phénomène de frottement n'a pas d'influence au niveau des contacts entre le barreau et les deux roulements à billes 5 et 6.

3. Équilibre du galet 3 par rapport à 1 :

Le galet 3 est soumis à deux actions mécaniques extérieures : celle de la rampe et celle du barreau. On pose

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 3) = \begin{cases} -N_{13}\vec{u}_1 + T_{13}\vec{v}_1, \\ \text{avec } N_{13} \geq 0 \text{ et } \left| \frac{T_{13}}{N_{13}} \right| \leq f_{13} \\ \text{à } \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} N_{23}\vec{x}_1 + T_{23}\vec{y}_1, \\ \vec{0} \end{cases} \text{ avec } N_{23} \geq 0 \text{ et } \left| \frac{T_{23}}{N_{23}} \right| \leq f_{23}$$



Équilibre du galet 3 par rapport au bâti 1.

L'équilibre de 3 sous l'effet des deux glisseurs entraîne que :

- les deux glisseurs ont le même axe central : la droite (AB) ;
- les deux résultantes sont opposés :

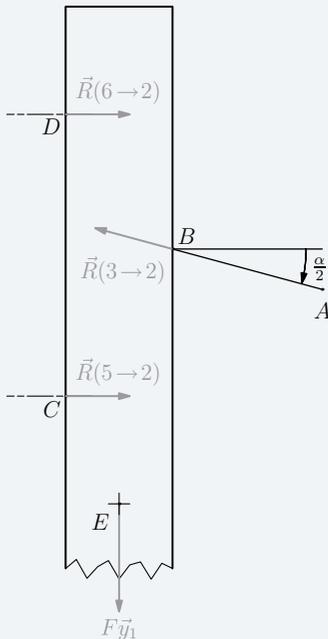
$$\vec{R}(1 \rightarrow 3) + \vec{R}(2 \rightarrow 3) = \vec{0}.$$

Les deux vecteurs  $\vec{R}(1 \rightarrow 3)$  et  $\vec{R}(2 \rightarrow 3)$  sont inclinés d'un angle  $\frac{1}{2}\alpha$  par rapport aux normales aux contacts.

Étant en situation d'adhérence, cela impose alors que :

- $\frac{1}{2}\alpha \leq \varphi_{23}$
- $\frac{1}{2}\alpha \leq \varphi_{13}$

4. La relation recherchée se détermine à partir de l'équilibre du barreau 2 par rapport à 1. Ce dernier est soumis à quatre actions mécaniques extérieures :



- le roulement 5 ;

$$\mathcal{F}(5 \rightarrow 2) = \begin{cases} R_{52}\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

- le roulement 6 ;

$$\mathcal{F}(6 \rightarrow 2) = \begin{cases} R_{62}\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

- le galet 3 ;

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(2 \rightarrow 3)$$

- le dispositif de poussée.

$$\mathcal{F}(e \rightarrow 2) = \begin{cases} -F\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

L'équation de résultante scalaire  $\vec{y}_1$  évite les actions des deux roulements 5 et 6 et on obtient :

$$\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| \sin \frac{1}{2}\alpha = F$$

d'où :

$$\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\| = \frac{F}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$$

Conclusion :

- pour obtenir un système autobloquant, on choisit  $\alpha \leq 2 \min(\varphi_{13}, \varphi_{23})$ , mais sans le prendre trop petit...
- en effet, plus l'angle  $\alpha$  est petit, plus le module de la résultante  $\|\vec{R}(3 \rightarrow 2)\|$  augmente, au risque de devenir disproportionné par rapport aux autres actions mécaniques.

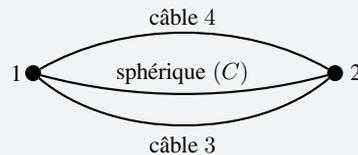
5. La condition sur la composante normale  $N_{32}$  entraîne un produit scalaire  $\vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_1$  toujours positif. L'équation de résultante précédente ne peut donc pas être nulle lors d'une poussée  $F$  positive. Dès lors, l'équilibre du barreau 2 par rapport à 1 ne peut être réalisé.

6. Le phénomène qui apparaît au niveau de ce dispositif est l'arc-boutement.

## Exercices d'approfondissement

### 6.6

1. Pour le graphe des liaisons, les câbles ne sont pas des solides.



2. On s'intéresse à l'équilibre de la poutrelle 2 par rapport au support 1 supposé galiléen. Concernant l'inventaire des actions mécaniques extérieures exercées sur 2, on retient comme éléments du milieu environnant :

- le bâti 1  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{cases}$

- le câble 3  $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \begin{cases} k_3 \vec{AB} \\ \vec{0} \end{cases}$ , avec  $k_3 \geq 0$

– le câble 4  $\mathcal{F}(4 \rightarrow 2) = A \begin{Bmatrix} k_4 \vec{AD} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ , avec  $k_4 \geq 0$

– la pesanteur  $\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = G \begin{Bmatrix} -mg \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Au bilan, on a cinq inconnues de liaison pour six équations scalaires, et le poids comme paramètre : Une solution devrait être possible !

**3.** Pour trouver la valeur de la tension dans le câble 3, il suffit d'écrire :

– l'équation de moment en  $C$  pour éviter les trois inconnues de la liaison sphérique ;

– cette équation scalaire  $\vec{AD}$  pour éliminer le terme  $k_4 \vec{AD} \wedge \vec{AC}$ .

On obtient alors l'égalité de deux produits mixtes

$$k_3 (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = mg (\vec{z}_1, \vec{GC}, \vec{AD})$$

Le premier produit mixte se transforme en utilisant successivement les cas de nullité d'un produit mixte, les permutations circulaires et l'antisymétrie du produit vectoriel

$$\begin{aligned} (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) &= (\vec{CB}, \vec{AC}, \vec{CD}) \\ &= (\vec{CD}, \vec{CB}, \vec{AC}) \\ &= (\vec{CD} \wedge \vec{CB}) \cdot \vec{AC} \\ &= (\vec{CB} \wedge \vec{CD}) \cdot \vec{CA} \\ &= (cd - be)a \end{aligned}$$

Le deuxième produit mixte se traite de la même manière

$$\begin{aligned} (\vec{z}_4, \vec{GC}, \vec{AD}) &= (\vec{CD} \wedge \vec{z}_4) \cdot \vec{GC} \\ &= \frac{1}{2} ac \end{aligned}$$

On déduit de ces deux calculs la valeur du coefficient  $k_3$

$$k_3 = \frac{mgc}{2(cd - be)}$$

Un raisonnement analogue et des calculs similaires conduisent à la détermination du coefficient  $k_4$

$$k_4 = \frac{-mgb}{2(cd - be)}$$

Les tensions dans les câbles sont obtenues en multipliant les coefficients  $k_3$  et  $k_4$  respectivement par les normes des vecteurs  $\|\vec{AB}\|$  et  $\|\vec{AC}\|$ .

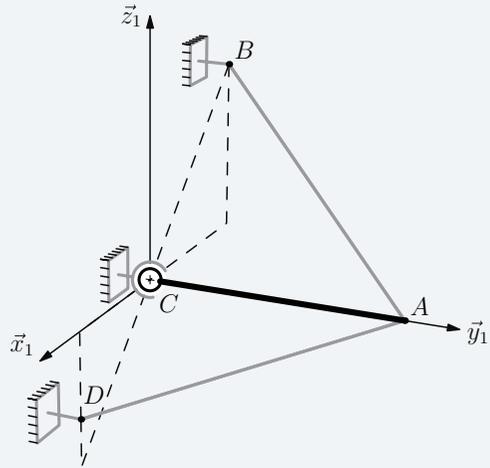
**4.** Les conditions d'équilibre ont été énoncées lors du paramétrage des actions mécaniques. Il est nécessaire que les coefficients  $k_3$  et  $k_4$  soient tous les deux positifs ou nuls.

On constate que le quotient  $k_3/k_4$  est égal à  $-c/b$ . Les valeurs de  $b$  et de  $c$  doivent donc être de signes opposés. En s'inspirant de la figure proposée, on peut choisir  $c$  positif et  $b$  négatif.

Le choix du signe de  $c$  étant fait, le terme  $(cd - be)$  doit être positif. Ce terme est issu du produit vectoriel  $\vec{CB} \wedge \vec{CD}$  et indique que l'angle entre  $\vec{CB}$  et  $\vec{CD}$ , compté de  $\vec{CB}$  vers  $\vec{CD}$  dans le sens positif, doit être compris entre  $+0^\circ$  et  $+180^\circ$ .

Le produit vectoriel doit également être non nul, les trois points  $B$ ,  $C$  et  $D$  ne doivent donc pas être alignés.

La figure ci-dessous définit une configuration d'équilibre possible, avec le point  $D$  en dessous de la poutrelle.



Une configuration d'équilibre possible.

## 6.7

**1.** L'effort de traction de la voile tend à faire tourner le tambour par rapport au pont du voilier dans le sens positif. C'est ce sens de rotation qui est bloqué par le dispositif à cliquets.

**2.** On s'intéresse à l'équilibre du tambour et du morceau de cordage représenté sur la figure 1. Cet ensemble est soumis à :

- l'action du marin sur le cordage  $m \rightarrow c$  ;
- l'action de la voile sur le cordage  $v \rightarrow c$  ;
- l'action du pont sur le tambour  $p \rightarrow t$ .

À l'équilibre, on a ainsi

$$\mathcal{F}(m \rightarrow c) + \mathcal{F}(v \rightarrow c) + \mathcal{F}(p \rightarrow t) = \mathcal{O}$$

C'est l'équation de résultante de cette dernière équation qui permet de répondre à la question posée.

La somme  $\vec{F}(v \rightarrow c) + \vec{F}(m \rightarrow c)$  représente l'opposé de la résultante des actions du pont sur le tambour. Ce dispositif est prévu pour que le pont encaisse l'essentiel de l'action mécanique de la voile sur le cordage.

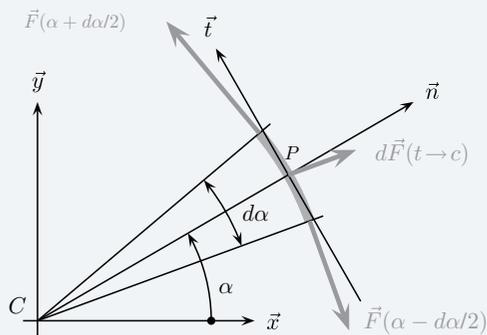
**3.** On s'intéresse à l'équilibre d'un petit morceau de cordage et on se place dans le repère local  $(P, \vec{n}, \vec{t})$ . Le poids de ce bout de cordage est négligé devant les tensions transmises et on pose :

- une tension  $\vec{F}(\alpha)$  dans le cordage à la position angulaire  $\alpha$ , en posant cette tension *a priori* croissante avec  $\alpha$  ;
- l'action élémentaire du tambour sur le bout de cordage.

$$d\vec{F}(t \rightarrow c) = N\vec{n} - T\vec{t}$$

la composante tangentielle  $T$  de  $d\vec{F}(t \rightarrow c)$  est posée suivant  $-\vec{t}$ , car avec une tension supposée croissante avec  $\alpha$ , la vitesse de glissement  $\vec{V}(P, c/t)$  est constatée suivant  $+\vec{t}$ .

**4.** Ce morceau de cordage est en équilibre sous l'action de trois glisseurs dont les axes centraux sont concourants au point  $P$ . On exploite alors l'équation de résultante pour écrire :



• l'équation de résultante suivant  $\vec{n}$  ;

$$N - F\left(\alpha - \frac{d\alpha}{2}\right) \sin \frac{d\alpha}{2} - F\left(\alpha + \frac{d\alpha}{2}\right) \sin \frac{d\alpha}{2} = 0 \quad (1)$$

• l'équation de résultante suivant  $\vec{t}$ .

$$-T - F\left(\alpha - \frac{d\alpha}{2}\right) \cos \frac{d\alpha}{2} + F\left(\alpha + \frac{d\alpha}{2}\right) \cos \frac{d\alpha}{2} = 0 \quad (2)$$

5. Plusieurs manipulations sont alors indispensables :

• on exploite la formule de Taylor pour écrire, au premier ordre

$$F\left(\alpha + \frac{d\alpha}{2}\right) \approx F(\alpha) + F'(\alpha) \frac{d\alpha}{2}$$

$$F\left(\alpha - \frac{d\alpha}{2}\right) \approx F(\alpha) - F'(\alpha) \frac{d\alpha}{2}$$

• pour un angle  $u$  très proche de 0, on a comme approximations trigonométriques, toujours au premier ordre

$$\cos u \approx 1$$

$$\sin u \approx u$$

• on se place à la limite du glissement pour écrire

$$\left| \frac{T}{N} \right| = f$$

Les équations (1) et (2) se transforment et on écrit

$$N = d\alpha F(\alpha) \quad (3)$$

$$fN = d\alpha F'(\alpha)$$

On effectue le rapport membre à membre des deux dernières équations (4) et (3) pour proposer comme équation différentielle

$$\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)} = f$$

Cette équation s'intègre entre 0 et  $\alpha$  par

$$[\ln(F(\alpha))]_0^\alpha = f [\alpha]_0^\alpha$$

On prend comme condition initiale la tension  $F_m$  exercée par le marin pour  $\alpha = 0$  et  $F_v$  celle exercée par la voile pour la valeur  $\alpha$ . On obtient alors

$$\ln(F_v) - \ln(F_m) = \ln\left(\frac{F_v}{F_m}\right) = f\alpha$$

On en déduit finalement l'expression à retenir

$$F_v = F_m e^{f\alpha}$$

6. Avec les valeurs numériques données, on obtient

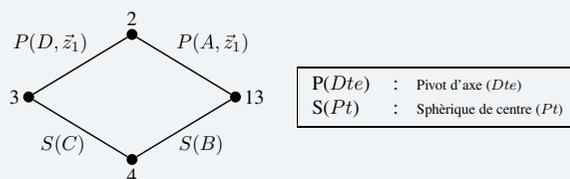
$$f = 0,2 \quad \alpha = 6\pi \quad F_v = 1000 \text{ N} \quad F_m = 23 \text{ N}$$

On constate que trois tours de cordage permettent de diviser l'effort de traction par 40 !

## 6.8 Lecture et décodage

D'un point de vue géométrique, on constate après montage que le quadrilatère  $(ABCD)$  est un parallélogramme déformable.

Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de solides, comportant quatre pièces et quatre liaisons, ce que résume le graphe des liaisons suivant.



Graphe des liaisons du pèse-lettre.

## Décompte des nombres d'inconnues de liaison et d'équations

L'étude systématique de ce mécanisme nécessite trois équilibres, ce qui donne 18 équations scalaires.

La chaîne fermée comporte deux liaisons pivot et deux liaisons sphériques, et admet donc 16 inconnues scalaires d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées sans frottement. La masse  $m$  de l'ensemble {plateau, objet} est également une inconnue du problème. On a donc un total de 17 inconnues.

Exprimer dix-sept inconnues en fonction du paramètre  $M$  à partir de dix-huit équations devrait être possible.

## Stratégie de résolution

Il est nécessaire de parcourir la chaîne fermée de solides pour résoudre, ce qui entraîne l'écriture d'au moins trois équations scalaires :

- la bielle 4 est soumise à l'action de deux glisseurs, donc l'équation de moment au point  $C$  donne la direction de la résultante  $\vec{R}(3 \rightarrow 4)$ , tout en évitant les trois inconnues scalaires de la liaison sphérique entre la bielle et le bâti ;
- l'équation de moment au point  $A$  issue de l'équilibre du plateau 3 par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre le plateau et le balancier ;
- l'équation de moment au point  $D$  issue de l'équilibre de l'ensemble  $\{2, 3\}$  par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre le balancier et le bâti.

## Résolution

Équilibre de la biellette 4 par rapport au bâti 1

Deux actions mécaniques extérieures sont à considérer : celle de 3 sur 4 et celle de 1 sur 4. Les deux liaisons concernées sont des liaisons sphériques de centres respectifs  $B$  et  $C$ . L'équation de moment au point  $C$  s'écrit alors

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) \wedge \vec{BC} = \vec{0}$$

On en déduit que la résultante  $\vec{R}(3 \rightarrow 4)$  est colinéaire au vecteur  $\vec{BC}$ , et on pose, en utilisant les propriétés des parallélogrammes

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} R_{34}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Équilibre du plateau 3 et de l'objet pesé par rapport au bâti 1

Trois actions mécaniques extérieures sont à considérer :

– action de la pesanteur

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} -mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

– action de la biellette 4, dont la forme a été trouvée précédemment

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 3) = -\mathcal{F}(3 \rightarrow 4) = \begin{Bmatrix} R_{43}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

– enfin l'action du balancier 2 par l'intermédiaire d'une liaison pivot dont on veut éviter les cinq inconnues scalaires

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(A, 2 \rightarrow 3), \end{Bmatrix}$$

avec  $\vec{M}(A, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_1 = 0$

L'équation de moment au point  $A$  scalaire  $\vec{z}_1$  donne alors une somme nulle de deux produits mixtes

$$\left(-mg\vec{y}_1, \vec{KA}, \vec{z}_1\right) + \left(R_{43}\vec{x}_2, \vec{BA}, \vec{z}_1\right) = 0 \quad (4)$$

Il est judicieux d'attendre l'équation issue du dernier équilibre avant de traiter les produits mixtes.

Équilibre de l'ensemble {2 + 3} par rapport au bâti 1

Quatre actions mécaniques extérieures sont à considérer :

– action de la pesanteur sur le plateau 3 et l'objet pesé

– action de la pesanteur sur le balancier 2

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} -Mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

– action de la biellette 4

– action du bâti 1 par l'intermédiaire d'une liaison pivot dont on veut éviter les cinq inconnues scalaires

L'équation de moment au point  $D$  scalaire  $\vec{z}_1$  donne alors une somme nulle de trois produits mixtes

$$\left(-mg\vec{y}_1, \vec{KD}, \vec{z}_1\right) + \left(-Mg\vec{y}_1, \vec{GD}, \vec{z}_1\right) + \left(R_{43}\vec{x}_2, \vec{CD}, \vec{z}_1\right) = 0 \quad (5)$$

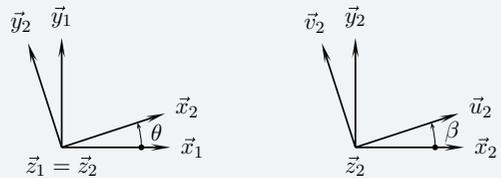
## Calcul effectif

Les deux vecteurs  $\vec{BA}$  et  $\vec{CD}$  sont à chaque instant égaux. On effectue alors la différence des deux équations (4) – (5) pour obtenir immédiatement

$$m \left(\vec{y}_1, \vec{DA}, \vec{z}_1\right) + M \left(\vec{y}_1, \vec{GD}, \vec{z}_1\right) = 0$$

Après substitution, permutation et échange de signe, le résultat recherché s'exprime par

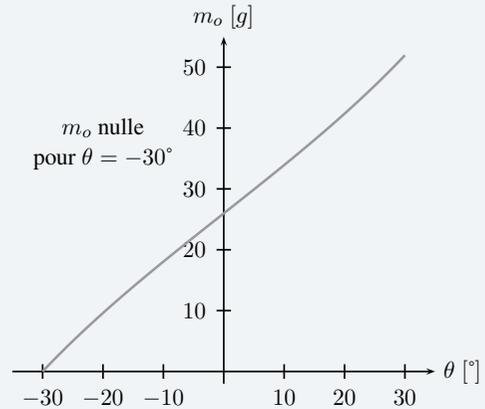
$$m = \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2} \frac{c}{b} M$$



Les figures de définition des angles permettent d'évaluer les deux produits scalaires et on obtient finalement

$$m = \frac{\cos(\theta + \beta)}{\cos(\theta)} \frac{c}{b} M$$

## Conclusions



Courbe caractéristique  $m_o = f(\theta)$ .

Trois remarques s'imposent :

- le résultat ne dépend pas de la position de l'objet pesé sur le plateau ;
- la graduation n'est pas linéaire ;
- la balance ne donne aucun résultat si l'angle  $\beta$  est nul.

La figure ci-dessus donne un exemple de courbe caractéristique obtenue avec un angle  $\beta = -30^\circ$  et un contrepoids  $M$  d'une centaine de gramme.

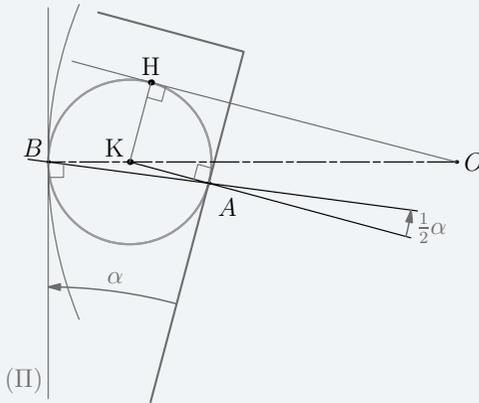
## 6.9

1. Il faut imaginer les mouvements des pièces à partir de la figure « Paramétrage de la roue libre » de l'énoncé pour anticiper le résultat :

- Lors d'une rotation de 2/1 dans le sens positif, ce sont les plots 4 qui entraînent les galets. Si on les supprime, on peut imaginer le mouvement de 2/1 en les laissant au contact de la bague et en constatant la rupture du contact avec l'arbre.
- Une rotation de 2/1 dans le sens négatif tend à écraser les galets entre arbre et bague...

En conséquence, le sens de rotation impossible de 2/1 est le sens négatif.

2. On s'intéresse à l'équilibre d'un des galet 3 par rapport à la bague 1.



Particularités géométriques au niveau d'un galet.

La figure ci-dessus, tracée dans le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  illustre le raisonnement mené :

- on trace (II) le plan tangent au point B et on pose  $\alpha$  l'angle entre les deux plans tangents aux contacts.
- si le galet 3 est en équilibre sous l'action de deux glisseurs, alors les axes centraux sont confondus et sont caractérisés par la droite (AB).
- pour que l'équilibre soit possible, il est nécessaire d'avoir un angle  $\alpha$  suffisamment petit, ce qui est exprimé par les lois du frottement

$$\tan \frac{\alpha}{2} \leq f$$

- dans le triangle (KOH), droit au point H, on a

$$\cos \alpha = \frac{h+r}{R-r}$$

- on connaît la relation entre le cosinus et la tangente d'un angle

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

En définitive, deux conditions géométriques sont à considérer :

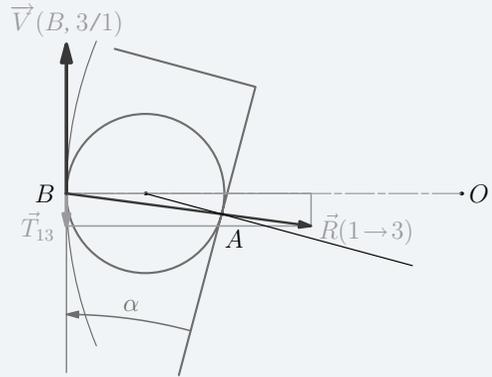
- Il faut pouvoir monter le galet entre l'arbre et la bague, ce qui se traduit par

$$2r + h \leq R$$

- l'arc boutement est possible si l'angle  $\alpha$  reste suffisamment petit, sa valeur ne dépendant que de R et de h

$$\frac{R-h}{R+h} \leq f$$

3. Un raisonnement cinématique consiste à imaginer solidaire l'arbre et le galet. On utilise alors le fait qu'au point de contact B, la composante tangentielle  $\vec{T}(1 \rightarrow 3)$  s'oppose au vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(B, 3/1)$  qui apparaîtrait en l'absence de frottement.



Vitesse de glissement virtuelle au point B.

Le vecteur vitesse tracé sur la figure ci-dessus correspond au cas où la rotation virtuelle de 2/1 est négative. Envisager le vecteur vitesse opposé entraîne le changement de signe pour la composante tangentielle  $\vec{T}(1 \rightarrow 3)$ , donc une résultante d'actions mécaniques également opposée, ce qui est incompatible avec le contact bague-galet.

On peut compléter ce raisonnement en considérant le moment au point O suivant  $\vec{z}_1$  des différentes actions mécaniques exercées par le bâti 1 sur l'ensemble  $\{2, 3_i\}$ . Il ne peut être que positif !

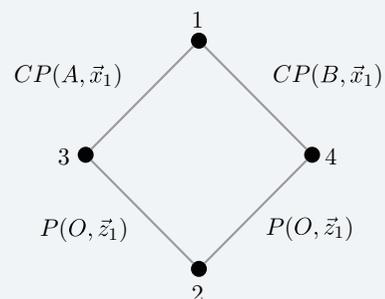
## 6.10

1. On commence par tracer un graphe des liaisons et des contacts, en notant :

- $P(dte)$  une liaison pivot d'axe la droite  $dte$  ;
- $CP(pt, vec)$  un contact ponctuel au point  $pt$  de normale  $vec$ .

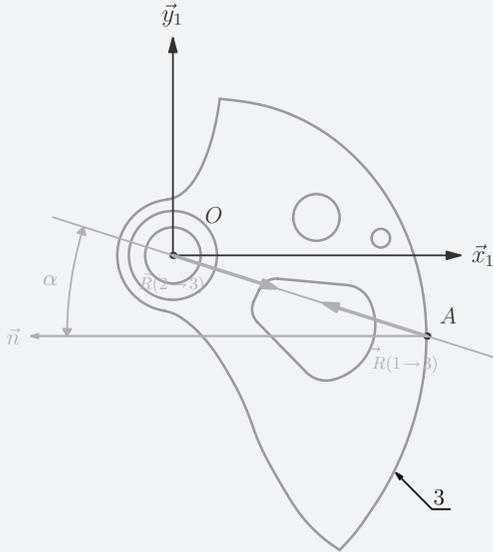
Avec l'hypothèse de modélisation plane, toutes les actions mécaniques associées aux liaisons et contacts sont assimilables à des glisseurs. On propose alors la stratégie suivante.

- On suppose réalisé l'équilibre de 3/1 :
  - actions mécaniques extérieures à 3 :  $2 \rightarrow 3$  et  $1 \rightarrow 3$  ;



- la came 3 est supposée en équilibre sous l'action mécanique de deux glisseurs : ces deux glisseurs admettent la droite  $(OA)$  comme axe central

On constate que la droite  $(AO)$  est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la normale  $(A, \vec{n})$  au contact.



- On suppose réalisé l'équilibre de  $4/1$  :
  - actions mécaniques extérieures à  $4 : 2 \rightarrow 4$  et  $1 \rightarrow 4$  ;
  - de la même façon, la droite  $(BO)$  est l'axe central commun aux deux glisseurs, incliné de l'angle  $\alpha$  par rapport à la normale au contact  $(B, \vec{x}_1)$ .
- On suppose réalisé l'équilibre de  $\Sigma = \{2,3,4\}$  par rapport à 1 :
  - actions mécaniques extérieures  $\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$  : trois glisseurs, modélisant la charge  $c \rightarrow 2$  et les actions de la paroi  $1 \rightarrow 3$  et  $1 \rightarrow 4$  ;
  - ces trois glisseurs ont leur axes centraux concourants au point  $O$  ;
  - l'équation de résultante scalaire  $\vec{x}_1$  donne

$$\|\vec{R}(1 \rightarrow 4)\| = \|\vec{R}(1 \rightarrow 3)\|$$

- l'équation de résultante scalaire  $\vec{y}_1$  permet d'écrire

$$\|\vec{R}(1 \rightarrow 4)\| = \|\vec{R}(1 \rightarrow 3)\| = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

Pour un angle  $\alpha$  de  $20^\circ$ , on obtient un module d'environ 20 kN.

2. On exploite l'interprétation graphique des lois du frottement pour répondre :

- La droite  $(OA)$  est l'axe central du glisseur  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 3)$ , incliné de l'angle  $\alpha$  par rapport à la normale au contact en  $A$ . Pour que l'équilibre soit possible, il faut que l'angle d'adhérence  $\varphi$  soit supérieur à  $\alpha$ .

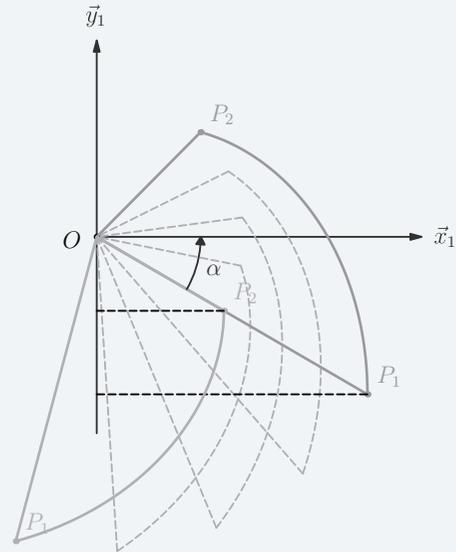
Soit  $f$  le coefficient de frottement du couple acier-roche, il est donc nécessaire d'avoir

$$\tan \alpha < f$$

- Par ailleurs, on vérifie que la composante tangentielle de l'action mécanique  $1 \rightarrow 3$  est bien opposée à la vitesse de glissement  $\vec{V}(A, 3/1)$  qui apparaîtrait s'il y avait déplacement de 3 par rapport à 1 sous l'effet de la charge  $P$ . Il est également nécessaire d'avoir

$$\vec{R}(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{V}(A, 3/1) < 0$$

- 3. Pour comprendre le problème, on se place dans le référentiel 1 et on imagine plusieurs positions de la came 3, comme le montre la figure ci-dessous.



Ces tracés permettent plusieurs constatations.

- Le point de contact courant se déplace sur la droite  $(OA)$ , avec l'angle  $\alpha$  constant.
- Si on considère les deux points extrêmes  $P_1$  et  $P_2$  du profil de la came, les largeurs extrêmes entre les deux faces de la fissure sont

$$2OP_1 \cos(\alpha) \text{ et } 2OP_2 \cos(\alpha)$$

Pour trouver l'équation du profil à adopter, on exprime maintenant la contrainte « l'angle  $\alpha$  doit rester constant » dans un référentiel lié à la came :

- on pose un repère  $(O, \vec{u}_3, \vec{v}_3)$  lié à la came 3, avec le point  $P_1$  sur la droite  $(O, \vec{u}_3)$  par exemple ;

$$\vec{OP}_1 = r_1 \vec{u}_3$$

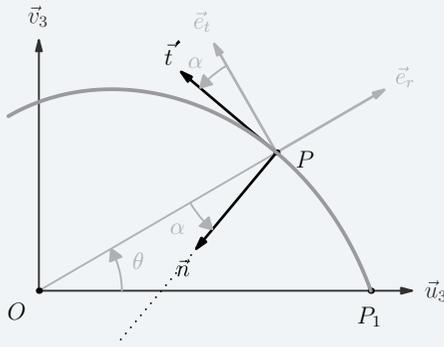
- le point de contact courant  $P$  est repéré en coordonnées polaire  $(\rho, \theta)$  ;

$$\vec{OP} = \rho(\theta) \vec{e}_r$$

- on trace au point  $P$  le vecteur normal au contact  $\vec{n}$  incliné de l'angle  $\alpha$  par rapport au vecteur  $\vec{PO}$ , ce qui revient à imposer également

$$(\vec{e}_r, \vec{t}) = \alpha$$

La figure ci-dessous exprime ces différentes propositions.



L'équation à résoudre est alors

$$\frac{-\vec{t} \cdot \vec{e}_r}{\vec{t} \cdot \vec{e}_t} = \tan \alpha$$

Comme  $\vec{t}$  est colinéaire à  $\frac{d\rho}{d\theta} \vec{e}_r + \rho \vec{e}_t$ , cette condition devient

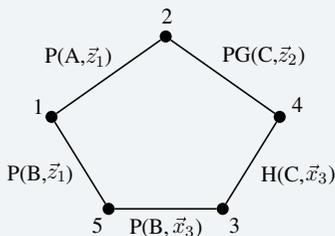
$$\frac{d\rho}{d\theta} = \tan \alpha \rho$$

La condition conduit ainsi à un profil en spirale logarithmique d'équation polaire

$$\rho(\theta) = r_1 e^{-\theta \tan \alpha}$$

## 6.11

1. Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de cinq solides.



Une étude systématique consiste à étudier quatre équilibres, ce qui donne vingt quatre équations scalaires.

On identifie trois liaisons pivot, une liaison pivot glissant et une liaison hélicoïdale, ce qui permet de dénombrer vingt quatre inconnues de liaison.

2. Il est nécessaire de parcourir la chaîne fermée. On peut donc difficilement espérer résoudre le problème avec moins de quatre équations scalaires. Ces dernières font intervenir le couple moteur et trois inconnues de liaison. Reste à déterminer lesquelles choisir :

- la liaison hélicoïdale permet la conversion du mouvement de rotation du moteur par rapport au carter 5 en translation suivant  $\vec{x}_3$  de la noix 4 par rapport à 3. On décide alors de prendre comme première inconnue les deux composantes de la liaison hélicoïdale suivant  $\vec{x}_3$ . Elles sont reliées par la relation

$$\vec{M}(C, 3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 = -p \vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3$$

- la rotation du bras 2 par rapport au bâti 1 est empêchée par la noix 4. On choisit alors comme deux autres inconnues les composantes de la résultante  $\vec{R}(4 \rightarrow 2)$ .

Ces trois inconnues étant choisies, il faut trouver quatre équations scalaires évitant les vingt-et-une autres inconnues scalaires de liaison :

**Eq1** : l'ensemble de pièces {3,4,5} n'a dans son environnement que deux éléments. L'équation de moment au point B scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de cet ensemble {3,4,5} par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 5 et 1 et les deux inconnues de moment de la liaison pivot glissant entre 4 et 2.

**Eq2** : l'équation de moment au point A scalaire  $\vec{z}_1$  issue de l'équilibre de 2 par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 2 et 1, ainsi que les deux inconnues de moment de la liaison pivot glissant entre 4 et 2.

**Eq3** : l'équation de moment au point B scalaire  $\vec{x}_3$  issue de l'équilibre de 3 par rapport à 1 permet d'éviter les cinq inconnues de la liaison pivot entre 3 et 5, ainsi que les quatre inconnues que l'on veut éviter pour la liaison hélicoïdale entre 3 et 4.

**Eq4** : l'équation de résultante scalaire  $\vec{x}_3$  issue de l'équilibre de 4 par rapport à 1 évite les quatre inconnues indésirables de la liaison hélicoïdale entre 3 et 4 et les deux inconnues de moment de la liaison pivot glissant entre 4 et 2.

3. L'équilibre **Eq4** ne fait intervenir que deux actions mécaniques extérieures :

- la vis 3 sur la noix 4 ;
- le bras 2 sur la noix 4.

On en déduit alors l'équation scalaire citée

$$\vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 + \vec{R}(2 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 = 0 \quad (6)$$

L'équilibre **Eq3** met en jeu trois actions mécaniques extérieures :

- le carter 5 sur la vis 3 ;
- la noix 4 sur la vis 3 ;
- le stator du moteur 5m sur le rotor 3.

L'équation scalaire proposée s'exprime alors

$$\left( \vec{M}(B, 4 \rightarrow 3) + \vec{M}(B, 5m \rightarrow 3) \right) \cdot \vec{x}_3 = 0$$

Après substitution, on obtient

$$C = p \vec{R}(4 \rightarrow 3) \cdot \vec{x}_3 \quad (7)$$

Les deux équations (6) et (7) permettent d'écrire

$$C = -p \vec{R}(4 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_3 \quad (8)$$

Le premier équilibre **Eq1** proposé fait intervenir deux actions mécaniques extérieures :

- le bâti 1 sur le carter 5 ;
- le bras 2 sur la noix 4.

L'équation recherchée donne alors

$$\left( \vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{CB} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Le vecteur  $\vec{CB}$  est à chaque instant orthogonal au vecteur  $\vec{z}_1$ , donc le résultat du produit vectoriel ne peut être orthogonal à  $\vec{z}_1$ . Le produit vectoriel  $\vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{CB}$  est donc nécessairement nul et les deux vecteurs sont colinéaires. On pose au choix

$$\vec{R}(4 \rightarrow 2) = k_{42} \vec{CB} = X_{42} \vec{x}_3 \quad (9)$$

Les équations (8) et (9) permettent d'écrire

$$X_{42} = -k_{42} \|\vec{CB}\| = -\frac{C}{p} \quad (10)$$

Le dernier équilibre **Eq2** met en jeu trois actions mécaniques extérieures :

- le bâti 1 sur le bras 2 ;
- la noix 4 sur le bras 2 ;
- la charge  $c$  sur le bras 2.

L'équation scalaire recherchée s'exprime alors

$$\left( \vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{CA} \right) \cdot \vec{z}_1 + \left( \vec{R}(c \rightarrow 2) \wedge \vec{DA} \right) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

Pour éviter les angles indésirables, le premier produit mixte s'évalue en prenant  $\vec{R}(4 \rightarrow 2) = k_{42} \vec{CB}$  et en décomposant  $\vec{CB}$  en  $\vec{CA} + \vec{AB}$ . On obtient ainsi

$$k_{42} ((b\vec{y}_1 - a\vec{x}_1) \wedge -\vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = k_{42} c (b \cos \theta + a \sin \theta).$$

Le second produit mixte donne  $(Mg\vec{y}_1 \wedge d\vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = -Mgd \cos \theta$  et on en déduit

$$k_{42} = \frac{mgd \cos \theta}{c(b \cos \theta + a \sin \theta)} \quad (11)$$

Les deux dernières équations (10) et (11) permettent d'écrire

$$C = p \|\vec{CB}\| \frac{Mgd \cos \theta}{c(b \cos \theta + a \sin \theta)} \quad (12)$$

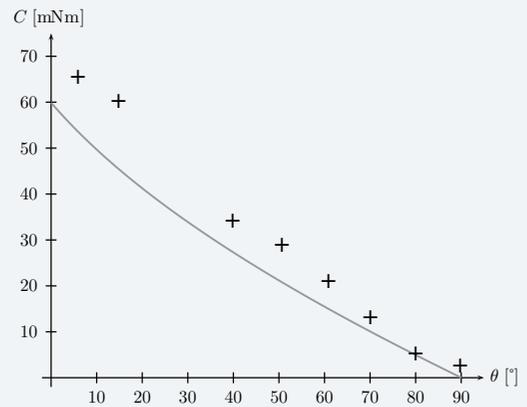
Il reste à exprimer  $\|\vec{CB}\|$  en fonction de  $\theta$  et des grandeurs géométriques

$$\begin{aligned} \vec{CB} &= \vec{CA} + \vec{AB} \\ &= -c\vec{x}_2 - a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 \\ \vec{CB}^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ca \cos \theta - 2cb \sin \theta \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'expression recherchée

$$C = pMg \frac{d \cos \theta \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ca \cos \theta - 2cb \sin \theta}}{c(b \cos \theta + a \sin \theta)} \quad (13)$$

4. On trace la courbe obtenue et on lui superpose les points expérimentaux



Superposition de la courbe théorique et des points expérimentaux.



### Plan

7.1	Notion de système en automatique	187
7.2	Systèmes Continus, Linéaires et Invariants	191
7.3	Systèmes asservis	193
7.4	Évaluation des performances des systèmes	196
	Exercices d'application	204
	Exercices d'approfondissement	207
	Solutions des exercices	209

### Introduction

Ce chapitre a pour but d'apporter toutes les notions et définitions nécessaires à la description des systèmes automatiques en général, et plus particulièrement pour les systèmes continus, linéaires et invariants afin de pouvoir prévoir par la suite leur comportement suite à des sollicitations d'utilisateurs ou suite à la présence de perturbations.

### Prérequis

Ce chapitre est un chapitre d'introduction et ne nécessite pas de connaissances autres que celles abordées au premier chapitre. Il est conseillé de revoir si nécessaire les notions suivantes :

- chaîne d'énergie et chaîne d'informations ;
- grandeurs physiques et capteurs associés ;
- diagramme de définition de blocs ;
- diagramme de blocs internes.

### Objectifs

- Décrire la structure générale d'un système asservi :
  - identifier le système commandé ;
  - identifier le générateur de commande, le ou les capteurs ajoutés, la ou les boîtes d'adaptation ;
- Distinguer une consigne d'une commande.
- Identifier et positionner les perturbations.
- Définir les entrées canoniques des systèmes.
- Nommer les performances attendues des systèmes..

## 7.1 Notion de système en automatique



Même si on ne connaît pas le contenu de la *boîte noire*, cette dernière reste régie par les lois de la physique !

Quand il s'agit de parler d'un système, l'automaticien s'approprie la définition donnée au premier chapitre en considérant *a priori* cet ensemble comme une boîte noire sollicitée par des entrées et générant des sorties.

## 7.1.1

# Description à l'aide d'un schéma-blocs

La connaissance initiale des grandeurs physiques d'entrée et de sortie est primordiale, avant même de s'intéresser au contenu. Cette volonté se retrouve sur la première représentation adoptée d'un système automatique, sous la forme d'un rectangle « boîte noire » avec une ou plusieurs flèches pour les entrées et les sorties, comme le montre la figure 7.1. Une telle représentation sous forme de *schéma-blocs* appelle les deux définitions suivantes :

### Définition

On appelle **système multivariable** un système possédant plusieurs entrées et/ou sorties.

On appelle **système monovariable** un système comportant une seule entrée et une seule sortie.



Figure 7.1 Système multivariable - Système monovariable

### Un premier exemple

On considère comme système un actionneur hydraulique, tel un vérin linéaire comme montré sur l'image ci-contre.

On peut observer le déplacement de la tige par rapport au corps lorsque la pompe fait circuler le fluide, et le comportement de l'ensemble n'apparaît pas invariant : d'une part, la vitesse de sortie de tige augmente avec le débit, d'autre part la pression dans le circuit hydraulique augmente avec la charge déplacée.



Une première approche est alors proposée sur la figure 7.2, en posant un bloc à deux entrées et deux sorties :

- d'un point de vue cinématique, le vérin hydraulique transforme le débit entrant en vitesse de déplacement de la tige par rapport au corps ;
- d'un point de vue dynamique, la pression dans le circuit hydraulique résulte entre autres de la charge déplacée.



Figure 7.2 Vérin hydraulique

## 7.1.2

# Réponse d'un système à une sollicitation

Un système est soumis à des grandeurs d'entrées auxquelles il réagit pour produire des grandeurs de sortie. Les entrées sont les causes de l'évolution du système. Ces causes produisent les effets qui sont constatés en sortie du système.



À ce stade, on ne sait dire si les deux phénomènes énoncés sont liés ou indépendants.

Les deux termes commande et consigne sont définis un peu plus loin dans ce chapitre, respectivement aux pages 190 et 194.

Une perturbation est le plus souvent aléatoire!

Une **motopompe** est l'association d'un moteur électrique et d'une pompe hydraulique.

### Définition

On appelle **réponse** d'un système l'évolution temporelle d'une grandeur de sortie suite à une évolution de la sollicitation.

Les entrées, quant à elles, peuvent être classées en deux catégories :

- les grandeurs contrôlées ; elles correspondent à des signaux modifiables sur lesquels on peut agir. Ces grandeurs sont appelées **commande** ou **consigne**.
- les grandeurs non réglables, subies par le système ; ce sont des signaux parasites, appelés perturbations.

### Définition

On appelle **perturbation** toute cause modifiant la ou les sorties d'un système indépendamment des entrées imposées par l'utilisateur.

Pour le vérin hydraulique de l'exemple précédent, le débit est la grandeur de commande alors que l'effort résistant n'est *a priori* pas connu et est alors à considérer comme une perturbation.

Afin de distinguer les deux types d'entrées, on préfère utiliser la représentation de la figure 7.3 où par convention, les perturbations sont placées arrivant sur le haut du bloc. Le schéma proposé permet de décrire le fonctionnement d'un vérin hydraulique de la manière suivante : à partir d'un débit de fluide, un vérin hydraulique génère une vitesse de déplacement, cette dernière pouvant être contrariée par un effort résistant.

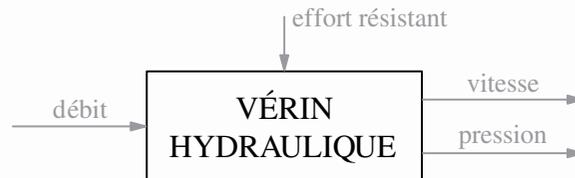


Figure 7.3 Mise en évidence d'une perturbation

On peut terminer cet exemple en remarquant que la pression générée dans le circuit hydraulique va se retrouver comme entrée de perturbation pour le système « motopompe hydraulique », lequel génère un débit en fonction d'une tension d'alimentation

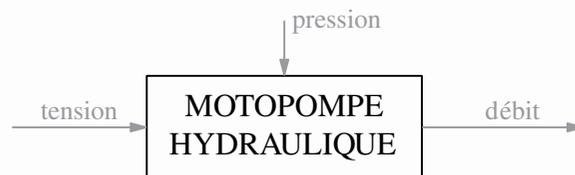


Figure 7.4 Si on s'intéresse au système « motopompe »...

### Un exemple plus complexe

On considère le système de régulation de vitesse d'un véhicule automobile grand public, dont le schéma-blocs est présenté sur la figure 7.5 : la vitesse du véhicule est régulée en fonction d'une consigne de vitesse imposée par le conducteur en tenant compte du profil de la route, des conditions d'adhérence au sol et des résistances aérodynamiques liées entre autres à la direction et la vitesse du vent. Le conducteur donne sa consigne par l'intermédiaire d'un bouton situé sur le volant. La régulation peut être interrompue à tout moment par un appui sur la pédale de frein ou par une commande au volant. Quant à la trajectoire, elle est liée à l'angle du volant dans des conditions normales d'utilisation.



Trois entrées maîtrisées par l'utilisateur, et trois entrées de perturbation !

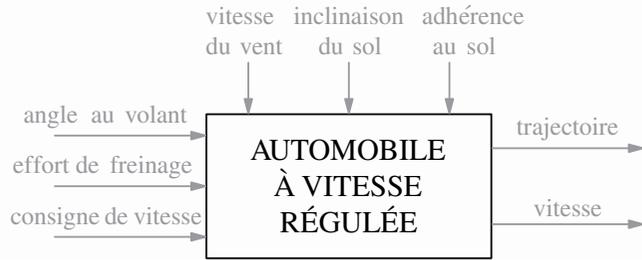


Figure 7.5 Une automobile avec régulation de vitesse

Dans cet exemple, on peut de plus regrouper les trois entrées maîtrisées par l'utilisateur selon leur nature :

- d'une part l'angle du volant et l'effort de freinage ;
- d'autre part la consigne de vitesse.

Pour les premières, le conducteur fournit en partie l'énergie nécessaire et vérifie en permanence la sortie correspondante afin d'ajuster sa commande. Pour la consigne de vitesse, le conducteur formule un souhait et le système doit gérer en autonomie l'énergie afin que la vitesse de sortie corresponde aux attentes du conducteur. Le système a donc besoin de connaître l'état de la sortie afin d'élaborer un signal de commande en accord avec la consigne du conducteur.

On peut alors proposer la représentation de la figure 7.6, laquelle met en évidence le retour nécessaire d'informations dans le cas d'une consigne.

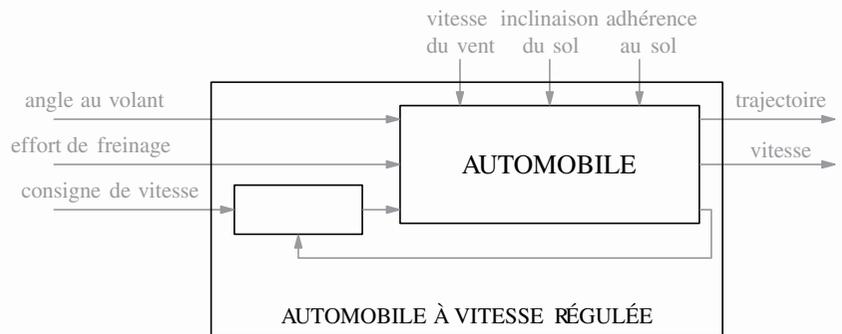


Figure 7.6 Un premier zoom à l'intérieur du bloc



Par exemple un dispositif de freinage d'automobile.



Par exemple un régulateur de vitesse d'automobile.

Selon le type d'entrée, on distingue deux comportements différents :

- un **comportement mécanisé** : l'utilisateur commande le système, il donne des ordres à partir d'informations qu'il capte lui-même, il peut fournir en partie l'énergie nécessaire au fonctionnement.
- un **comportement automatisé** : l'utilisateur ne commande pas le système en fonctionnement normal, il n'est là que pour le superviser.

### 7.1.3

## Description fonctionnelle des systèmes mécanisés

Classiquement, le fonctionnement d'un système mécanisé est décrit sous la forme du schéma de la figure 7.7. Un tel système est également appelé **système commandé**.

#### Définition

On appelle **commande** le signal d'entrée d'un préactionneur.



Figure 7.7 Schéma fonctionnel d'un système mécanisé

Un préactionneur gère le débit d'énergie en fonction de la commande reçue.

Ces quatre boîtes ne sont pas à mettre en parallèle avec les quatre blocs de la figure précédente !

Sur cette figure, on retrouve la description d'une chaîne fonctionnelle définie au premier chapitre. Seule la source d'énergie n'apparaît pas explicitement. Dans les faits, l'énergie est toujours introduite au niveau du préactionneur.

### Exemple

Un dispositif de freinage d'automobile est constitué principalement de :

- un maître cylindre qui génère une pression hydraulique à partir de l'effort de freinage appliqué par le conducteur sur la pédale de frein ;
- un cylindre de roue qui transforme la pression hydraulique en effort ;
- un ensemble étrier-plaquette de frein chargé d'appliquer un effort sur le disque de frein afin de dissiper l'énergie du véhicule sous forme de chaleur.

La figure 7.8 propose la schématisation d'un dispositif de freinage d'automobile.

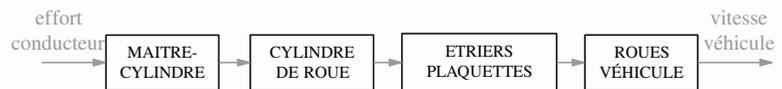


Figure 7.8 Schéma fonctionnel d'un dispositif de freinage

## 7.1.4

### Classification des systèmes automatisés

Les systèmes automatisés peuvent être classés en plusieurs catégories, répertoriées sur la figure 7.9.

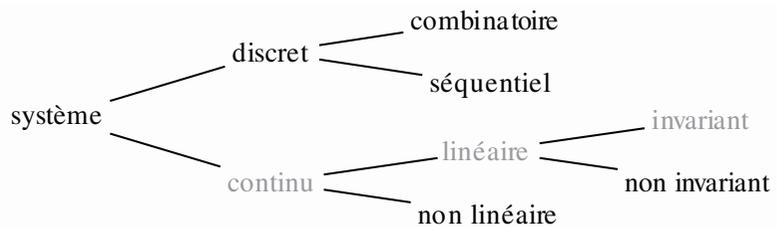


Figure 7.9 Classification des systèmes automatisés

Pour les systèmes à événements discrets, l'automatisation porte sur un nombre fini d'opérations prédéterminées. Pour un ascenseur, par exemple, il n'est pas utile de connaître en permanence sa position, il suffit simplement de savoir s'il est ou non présent à un étage.

Pour les systèmes continus, toutes les valeurs entre deux états sont observables.



Pour les systèmes continus, seuls ceux qui ont un comportement linéaire et invariant sont au programme des CPGE.

## 7.2 Systèmes Continus, Linéaires et Invariants

Les trois qualificatifs utilisés pour nommer cette section sont à définir.

### Définition

Un système est considéré comme **continu** lorsque les grandeurs sur lesquelles il intervient peuvent prendre toute valeur sur un intervalle borné. Ces grandeurs sont alors dites **analogiques**.

De plus en plus souvent aujourd'hui, les grandeurs d'entrée et de sortie analogiques sont transformées en grandeurs numériques par des Convertisseurs Analogiques Numériques (CAN). Le système travaille alors sur des signaux dits échantillonnés qui sont considérés comme des grandeurs continues. En sortie, on utilise un Convertisseur

Numérique Analogique (CNA) afin de retrouver des grandeurs analogiques en sortie. Sous certaines conditions, liées notamment à la fréquence d'échantillonnage, le traitement des signaux échantillonnés peut être assimilé à un traitement de signaux continus.

On supposera dans la suite que cette hypothèse est toujours vérifiée.

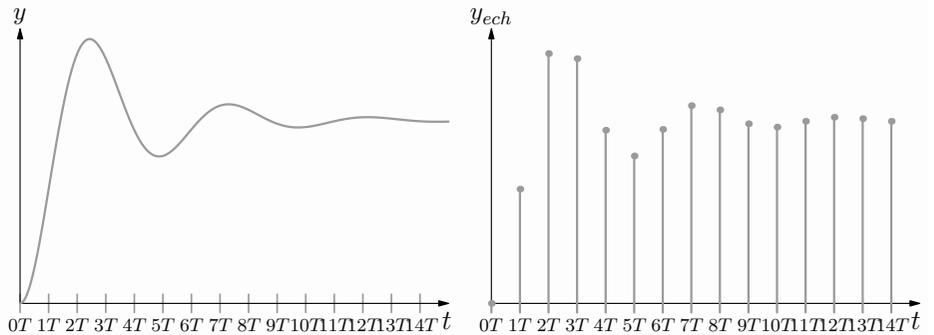


Figure 7.10 Signal continu - signal échantillonné

**Définition**

Soit un système qui élabore une sortie  $s_i$  à partir d'une entrée  $e_i$ . On a un **système linéaire** si, pour une combinaison linéaire d'entrées  $e_i$ , le système fournit en sortie la même combinaison linéaire des signaux  $s_i$  quel que soit l'instant considéré. On parle de **principe de superposition**.

$$\forall t, \forall a_i \in \mathbb{R} \quad \left( \sum_i a_i e_i \right) (t) = \sum_i a_i e_i(t)$$

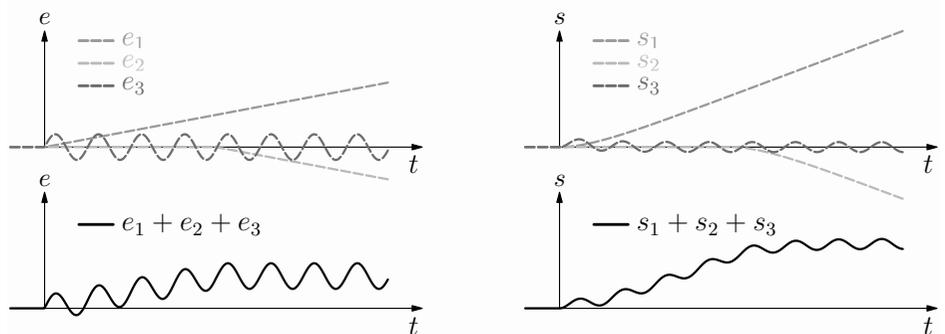


Figure 7.11 Système linéaire

En réalité, très peu de systèmes ont constamment des comportements linéaires. Par contre, on peut trouver des plages de fonctionnement où l'hypothèse de linéarité est vérifiée ou sur lesquelles on peut linéariser les lois de comportement. Les études sont généralement menées autour de ces points appelés **points de fonctionnement**.

**Définition**

Lorsque le comportement d'un système ne varie pas dans le temps, on parle de **système invariant**.

Lors d'une sollicitation, la sortie varie d'une certaine manière. C'est cette manière de varier qui est invariante !

On suppose donc que les caractéristiques intrinsèques des composants du système étudié, telles par exemple la masse d'une pièce, la raideur d'un ressort, la capacité d'un condensateur, ..., n'évoluent pas au cours du temps.

## 7.3 Systèmes asservis

### 7.3.1

### Structure des systèmes asservis

Les perturbations n'étant pas maîtrisables, un système mécanisé ne peut pas intégrer dans son comportement ces entrées non désirées.

Un système automatisé va scruter en permanence son état pour adapter la commande afin que la sortie corresponde à la consigne. Le système doit prendre en considération sa propre évolution pour adapter la commande. Celle-ci n'est donc plus fournie par un utilisateur, c'est le système lui-même qui la génère. On réalise donc nécessairement en permanence une mesure de la situation.

#### Définition

On parle de **système asservi** lorsque la commande du système mécanisé est élaborée par un organe interne au système.

Les systèmes asservis peuvent alors être approchés par le schéma de la figure 7.12, sur lequel apparaît une boucle de retour !

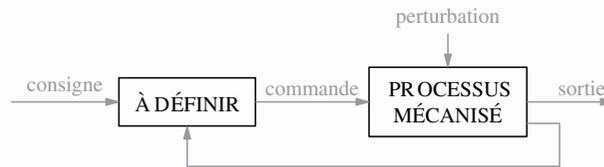


Figure 7.12 Première approche d'un système asservi

#### Remarque

Tout système asservi est un système bouclé, on dit parfois qu'il y a une rétro-action.

La boîte "À DÉFINIR" doit permettre d'élaborer la commande du processus mécanisé à partir de la comparaison de la consigne fournie par l'utilisateur à la sortie de ce système. On met en évidence la nécessité d'avoir :

- une interface homme-machine afin d'acquérir la consigne de l'utilisateur ;
- un capteur qui réalise l'acquisition du signal de sortie ou d'une grandeur interne ;
- un organe de commande capable de :
  - réaliser la comparaison entre l'image de la consigne et l'image de la sortie ;
  - générer le signal de commande à partir de l'écart constaté.

On peut alors tracer le schéma de la figure 7.13 et préciser les termes utilisés.

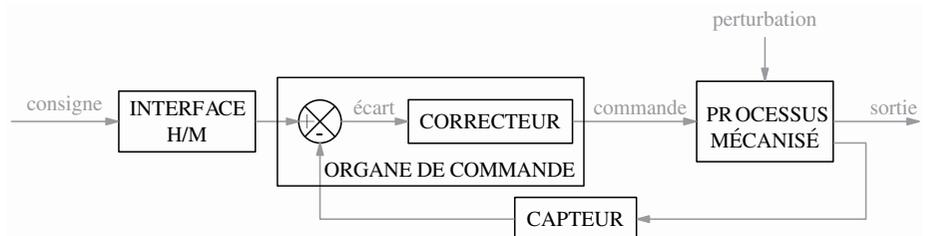


Figure 7.13 Schéma fonctionnel d'un système asservi

La réciproque n'est pas vraie ! Tout système bouclé n'est pas un système asservi...



Une consigne est toujours homogène à la grandeur de sortie générée par le système commandé !



Il n'y a pas de processus physique dans une comparaison, seulement un changement de point de vue.

On souhaite un écart idéalement nul : cela est-il toujours possible ?

### Définition

On appelle **consigne** la grandeur physique qui exprime la grandeur physique souhaitée en sortie du système.

L'élément graphique rond introduit sur le schéma de la figure 7.13 est appelé **comparateur**, ou **soustracteur**.

### Définition

On appelle **écart** la grandeur physique issue de la comparaison entre la consigne et la grandeur générée par le système.

On complète la définition de l'écart avec les remarques suivantes :

- on peut comparer également l'image de la consigne avec l'image de la grandeur générée ;
- cette grandeur est fonctionnelle : sans écart, aucune commande n'est générée ;
- la finalité d'un système asservi est d'obtenir un écart nul.

Une boîte n'est pas encore nommée. Souvent appelée **correcteur**, parfois **régulateur** ou **calculateur**, c'est l'organe qui génère la commande à partir de l'écart. C'est ce **générateur de commande** qui permet de régler les qualités d'un système asservi. Pour terminer cette série de définitions, deux expressions sont à ajouter dans cette section.

### Définition

Pour un système asservi, la partie du schéma-blocs comprise entre l'écart et la grandeur de sortie est appelée **chaîne directe** ou **chaîne d'action**.

En introduisant alors la description d'un système mécanisé dans la chaîne directe, on obtient la description fonctionnelle détaillée d'un système asservi présentée sur la figure 7.14.

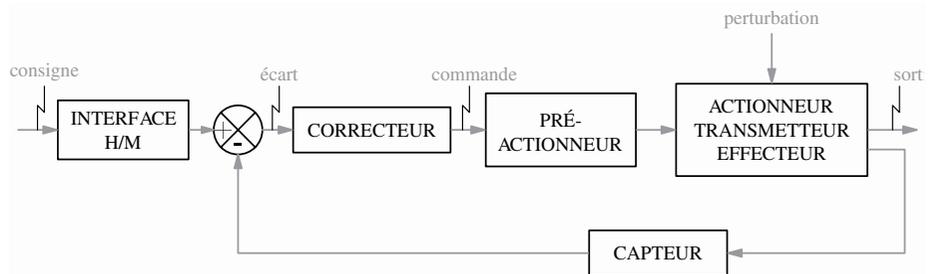


Figure 7.14 Schéma fonctionnel détaillé d'un système asservi

À partir de cette dernière figure, on peut alors affiner la définition d'un système asservi.

### Définition

Un **système asservi** est un système capable d'élaborer de manière autonome sa grandeur de commande à partir d'une valeur de consigne et d'une mesure de sa sortie ou de toute autre grandeur interne réalisée par l'intermédiaire d'un capteur.

### Exemple

La figure 7.15 fournit la description fonctionnelle du régulateur de vitesse d'automobile abordé en exemple page 189 :



L'écart n'est pas nommé sur ce schéma-blocs, mais cette grandeur reste fondamentale pour la compréhension des performances d'un système asservi !

- la grandeur générée est la vitesse du véhicule ;
- la consigne est la vitesse désirée ;
- le système mécanisé est l'automobile ;
- la commande est la commande d'injection ;
- le générateur de commande est appelé calculateur ;
- l'écart n'est pas nommé, calculé ici entre les images de la vitesse désirée et de la vitesse réelle.

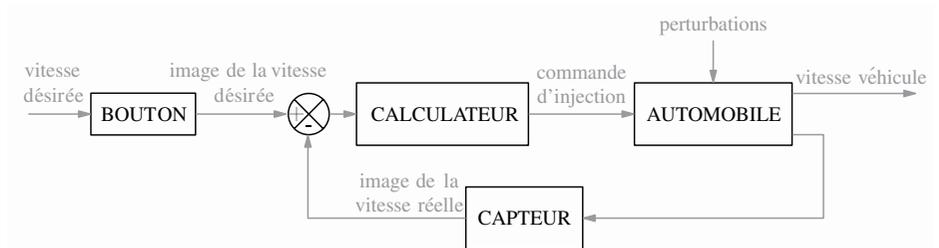


Figure 7.15 Schéma fonctionnel d'un régulateur de vitesse

## 7.3.2 Modélisation des perturbations

Un système asservi peut réagir à l'arrivée d'une perturbation. En effet, celle-ci provoquant une variation de la sortie du système, l'écart calculé par le comparateur va varier. La commande élaborée par le correcteur va évoluer de manière à essayer d'annihiler l'effet de la perturbation.

On admet que la perturbation agit, par exemple, sur l'actionneur. L'actionneur n'est plus un système monovarié, il possède deux entrées : l'ordre issu du préactionneur et la perturbation. Afin de pouvoir raisonner uniquement sur des systèmes monovariés, on doit faire en sorte que l'introduction de la perturbation se superpose à un signal existant, ici le signal de sortie de l'actionneur. On est alors conduit pour des raisons d'homogénéité à adapter le signal de perturbation comme le montre la figure 7.16.

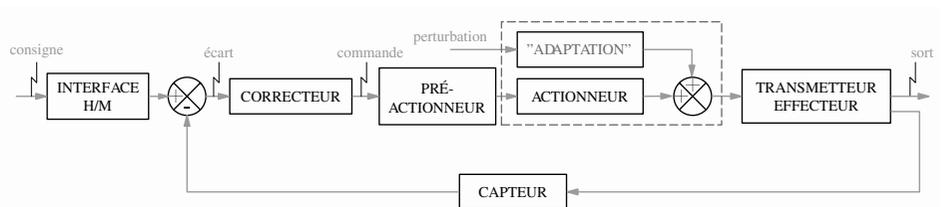


Figure 7.16 Schéma d'un système asservi avec une perturbation

Le comportement d'un système asservi doit être réglé en fonction de la nature et de l'évolution de sa consigne mais également en fonction de la nature et de l'évolution des perturbations. On peut distinguer alors deux comportements :

- un comportement en poursuite ;
- un comportement en régulation.

### Définition

On parle d'étude en **poursuite** lorsque l'on regarde l'évolution de la sortie d'un système asservi en fonction des seules variations de consigne.

Lorsque l'on regarde l'évolution de la sortie en fonction des seules variations de perturbation, on parle d'étude en **régulation**.



On peut faire les mêmes remarques dans le cas d'une utilisation conventionnelle d'un régulateur de vitesse d'automobile.

La définition de l'étude en régulation est à rapprocher d'expressions courantes comme régulation de vitesse, régulation de chauffage. Dans le cas de la régulation de chauffage d'une maison, la consigne en température est fixée une fois pour toute et seules les perturbations varient : température extérieure, ouvertures de portes, de fenêtres...

Dans les descriptions fonctionnelles précédentes, chaque boîte représente un élément d'un dispositif étudié. Le fonctionnement de chaque élément est modélisé, lorsque cela est possible, par une équation différentielle liant la grandeur de sortie à la grandeur d'entrée.

Pour un système asservi, pour prévoir l'évolution temporelle de la sortie suite, par exemple, à une consigne définie par l'utilisateur, il faut résoudre un système d'équations différentielles. Même si les modèles développés sont des représentations simplifiées du réel, la résolution de ces problèmes, dans le cas général, demeure complexe et il n'y a souvent pas de solution analytique. La résolution fait appel à l'analyse numérique et/ou à des logiciels de simulation.

Dans le cas des systèmes continus, linéaires et invariants, le comportement est décrit par des équations différentielles à coefficients constants. On peut alors accéder à une résolution analytique, mais celle-ci ne s'avère que rarement simple.

Pour éviter la résolution directe de ces systèmes d'équations différentielles, on utilise la transformation de LAPLACE. Celle-ci permet, en transposant le problème, de remplacer le système d'équations différentielles par un système d'équations polynômiales. Par ailleurs, l'utilisation de la transformation de Laplace permet de mettre en place la notion de fonction de transfert et on peut tirer tout le profit de la représentation graphique sous forme de schéma-blocs. Ces dernières notions sont développées dans le chapitre suivant.

## 7.4 Évaluation des performances des systèmes

### 7.4.1

### Signaux canoniques d'entrée

Afin de quantifier les performances des systèmes, on analyse leurs réponses à un certain nombre de signaux tests appelés *signaux canoniques* d'entrée. On en dénombre principalement quatre, à classer en deux familles :

- l'entrée sinusoïdale, qui se généralise en entrée harmonique ;
- les entrées en impulsion, échelon, rampe, qui se généralisent ensuite par intégrations successives.

Ces quatre entrées vont être définies ci-dessous dans un ordre différent, mais on peut déjà noter leurs usages :

- une entrée sinusoïdale est utilisée pour caractériser un système à partir de son comportement en *régime établi* ;
- les entrées en impulsion, échelon ou rampe sont utilisées pour caractériser un système à partir de son comportement en *régime transitoire*.

#### L'échelon

##### Définition

Le signal défini par la fonction  $e$

$$e : \begin{cases} t \mapsto 0 & \text{si } t < 0 \\ t \mapsto A & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est appelé *échelon* d'amplitude  $A$ .

Lorsque l'amplitude de l'échelon vaut 1, on parle d'*échelon unitaire* et on a alors une fonction  $u$  telle que

L'étude détaillée des différentes réponses est abordée dans les chapitres suivants.



La fonction  $u$  est également appelée fonction de HEAVISIDE.

$$u : \begin{cases} t \mapsto 0 & \text{si } t < 0 \\ t \mapsto 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

La réponse temporelle d'un système à un échelon unitaire est appelée **réponse indicelle** du système.

L'échelon est un signal simple à réaliser si on admet que la durée du changement d'état de l'entrée est négligeable devant la durée de réaction de la sortie.

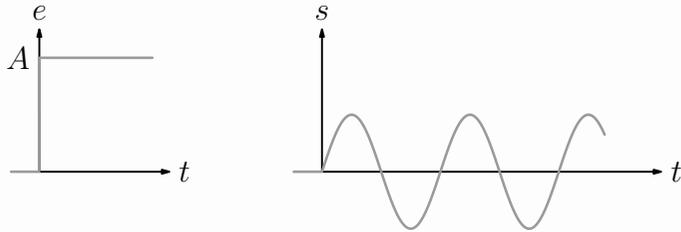


Figure 7.17 Échelon d'amplitude  $A$  - Sinus

### Le sinus

#### Définition

Lorsque le signal d'entrée est défini par

$$s : \begin{cases} t \mapsto 0 & \text{si } t < 0 \\ t \mapsto A \sin(\omega t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

on parle d'entrée **sinusoïdale** d'amplitude  $A$ .

La réponse à une entrée sinusoïdale est appelée **réponse harmonique**.



L'échelon et le sinus sont des signaux bornés.



$\delta$  n'est pas une fonction mais une distribution, notion hors programme des CPGE.

### L'impulsion

#### Définition

L'**impulsion de DIRAC** est un signal qui vaut zéro sauf au voisinage de l'instant initial. On peut le définir par

$$\begin{cases} \delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} & \text{pour } t \in ]0; a[ \\ \delta(t) = 0 & \text{pour } t \notin ]0; a[ \end{cases}$$

Lorsque l'entrée est une impulsion de DIRAC, on obtient une **réponse impulsionnelle**.

Concrètement, l'impulsion est difficile, voire impossible à mettre en œuvre. On essaie de l'approcher par un signal d'amplitude élevée de durée brève mais suffisante pour que l'effet soit mesurable en sortie.



Les signaux définis sur les figures 7.17 et 7.18 sont nuls pour les dates négatives, ces signaux respectent le principe de causalité.

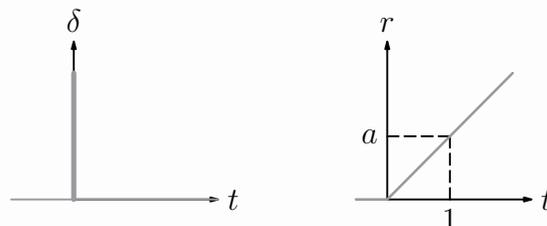


Figure 7.18 Impulsion de DIRAC - Rampe de pente  $a$

## La rampe

### Définition

On parle d'entrée en **rampe** si l'entrée est définie par

$$r : \begin{cases} t \mapsto 0 & \text{si } t < 0 \\ t \mapsto at & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Si  $a = 1$ , on a alors une **rampe unitaire**.

Dans un asservissement en position angulaire par exemple, une entrée en rampe correspond à une consigne d'angle  $\theta$  telle que  $\theta(t) = \omega t$  avec  $\omega$  une vitesse de rotation constante.



On peut également définir les fonctions entrée en rampe  $r$  et entrée en sinus  $s$  respectivement par  $r(t) = at u(t)$  et par  $s(t) = A \sin(\omega t) u(t)$ .

## 7.4.2.

Les signaux de référence sont les signaux canoniques d'entrée énumérés à la section précédente !

## Performances des systèmes

Une fois ces signaux de références définis, on peut évaluer les performances des systèmes qui en découlent ; elles s'articulent autour de quatre thèmes :

- la stabilité ;
- la précision ;
- la rapidité ;
- les dépassements.

On va se contenter dans ce chapitre de donner les principales définitions, car toutes les notions abordées seront approfondies en deuxième année de CPGE.

Néanmoins, on peut déjà annoncer que si stabilité, rapidité et dépassements concernent tous les systèmes, la notion de précision n'a de sens pour l'automaticien que pour les systèmes asservis. Les quatre thèmes précédents vont donc être abordés en précisant bien le domaine de validité :

- une première approche de la stabilité des systèmes ;
- la précision des systèmes asservis ;
- les dépassements en réponse indicielle ;
- la rapidité des systèmes, déclinée sous deux critères différents :
  - le temps de réponse à 5 % ;
  - le temps de montée.

### Stabilité des systèmes

On propose une première approche de la stabilité, simple à mettre en œuvre : la notion de stabilité au sens EBSB, sigle de l'expression « entrée bornée, sortie bornée ».

### Définition

Un système est **stable** si et seulement si pour toute entrée bornée la réponse est bornée.



Autant la précision d'un appareil de mesure est important pour le physicien, autant seule la précision des systèmes asservis a du sens pour l'automaticien.



Si un système est stable, alors la réponse à une entrée bornée est bornée.

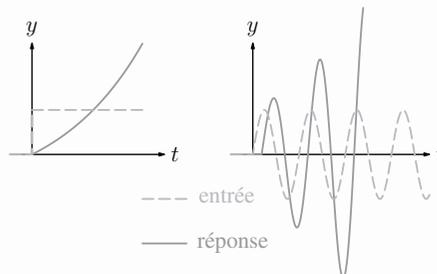


Figure 7.19 Réponses indicielle et harmonique de systèmes instables

On appelle écart la différence entre la consigne et la grandeur générée par le système commandé.

Sur la figure 7.19, on constate que la réponse indiciale du premier système diverge : celui-ci est donc instable. De la même manière, la réponse harmonique du deuxième ne convergeant pas, on peut également conclure à son instabilité.

La stabilité s'évalue sur des durées suffisamment grandes ; il faut attendre suffisamment longtemps pour voir si le signal de sortie converge ou non vers une valeur finie. La stabilité est la première qualité d'un système à apprécier, car sans elle, l'étude de la précision et de la rapidité n'a pas de sens.

### Précision d'un système asservi

Pour un système asservi, la grandeur physique nommée *écart* a été définie à la page 194. La *précision* d'un système asservi est évaluée à partir de cette grandeur et de son évolution au cours du temps suite à une sollicitation, évolution qu'il faut alors détailler.

La réponse d'un système stable à une sollicitation quelconque peut être décomposée temporellement en deux phases :

- le régime transitoire ;
- le régime permanent.

Ces deux régimes se définissent aisément à partir d'une réponse indiciale.

#### Définition

On dit qu'un système stable atteint un **régime permanent** lorsque sa réponse indiciale atteint un état quasi statique.

En complément, on définit le **régime transitoire** d'un système stable comme la période qui s'écoule entre la date de variation de l'entrée et la date d'apparition du régime permanent.

La figure 7.20 illustre les régimes permanent et transitoire d'un système stable à partir de sa réponse indiciale :

- Si on note  $s$  le signal de sortie d'un système stable, alors la valeur  $s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$  existe et est appelée *valeur finale*.
- Le début du régime permanent est défini par rapport à cette valeur finale.

On considère qu'on atteint le régime permanent lorsque

$$s_\infty \left(1 - \frac{x}{100}\right) \leq s(t) \leq s_\infty \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

Selon les points de vue,  $x$  peut prendre des valeurs différentes. En automatique, on utilise en général conventionnellement  $x = 5$ , en relation avec le temps de réponse à cinq pour cent.

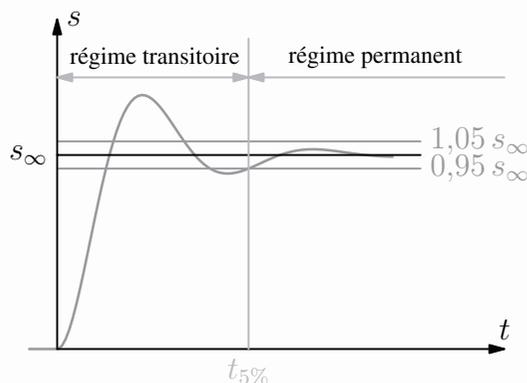


Figure 7.20 Régime transitoire et régime permanent

L'automaticien généralise la notion de régime permanent à tout régime établi, ce dernier correspondant à la seule réponse forcée d'un système, quelle que soit la nature de la sollicitation :

- en réponse à un échelon, le régime permanent se traduit par une grandeur de sortie de valeur constante ;
- en réponse à une rampe, le régime permanent se traduit par une loi affine de la grandeur de sortie en fonction du temps ;
- en réponse à un sinus, le régime permanent se traduit par une loi sinusoïdale de la grandeur de sortie en fonction du temps.

### Définition

On appelle **erreur statique** l'écart en régime permanent et **erreur dynamique** l'écart en régime transitoire.

Plus l'erreur statique est petite, plus le système est dit précis, tout en gardant à l'esprit que la finalité d'un système asservi est de conserver l'écart nul au cours du temps, que ce soit suite à des variations de consignes ou que ce soit suite à des perturbations.

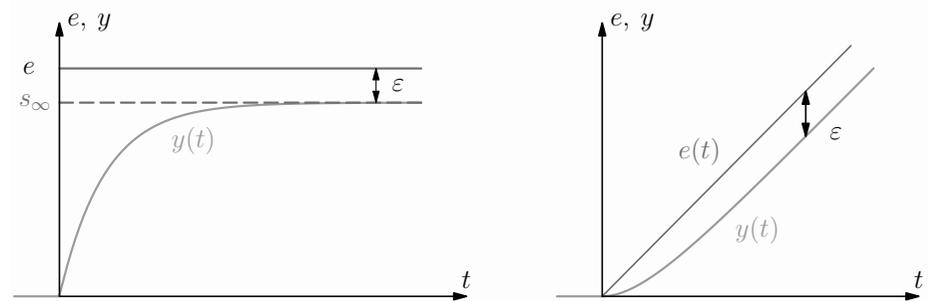


Figure 7.21 Erreurs statiques pour deux entrées différentes

Sur la figure 7.21, les erreurs statiques sont représentées et nommées  $\varepsilon$  :

- dans le cas d'une réponse indicielle, on parle parfois d'**erreur en position** ;
- dans le cas d'une entrée en rampe, on parle parfois d'**erreur de traînage**.

Néanmoins, d'autres appellations existent et dépendent essentiellement de la nature de la grandeur physique contrôlée.

### Dépassements

Les dépassements s'observent éventuellement lors de la réponse indicielle d'un système stable.

### Définition

On parle de **dépassement** lorsque la valeur du signal de sortie  $s$  est plus grande que la valeur finale  $s_\infty$ .

C'est la valeur maximale de ces dépassements qui est importante. Selon le domaine d'utilisation, les dépassements peuvent être limités voire explicitement interdits. On comprend bien que dans un asservissement de position d'un robot utilisé en chirurgie, la valeur de la position de l'instrument utilisé ne peut pas dépasser la valeur de consigne en position imposée par le chirurgien.



Seul l'écart en régime permanent est au programme.

La notion d'erreur, comme la notion d'écart, n'a de sens que si les signaux d'entrée et de sortie sont homogènes, c'est à dire de même nature et de même dimension.



C'est le cahier des charges du système qui fixe les limites du dépassement maximal autorisé.

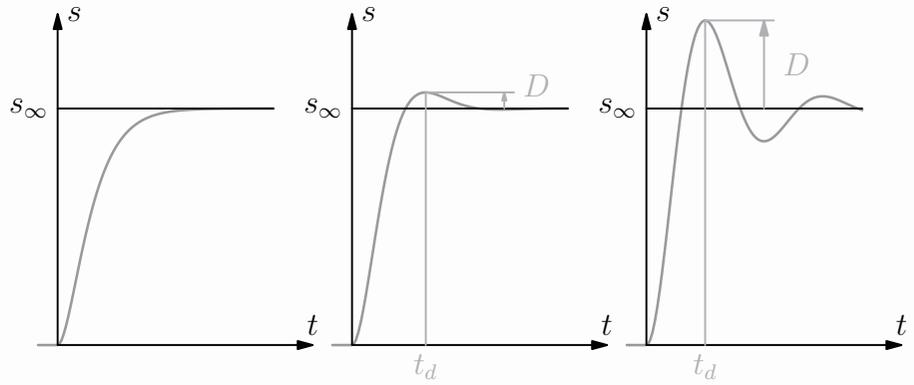


Figure 7.22 Dépassements en réponse indicielle

Pour évaluer le dépassement maximal, on relève l'instant  $t_d$  de ce dépassement. En notant  $s$  le signal de sortie du système, on évalue alors la valeur du dépassement maximal  $D$  par

$$D = s(t_d) - \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$$

Sur la figure 7.22, la première réponse indicielle ne présente pas de dépassement, et alors ce dernier est tellement faible qu'il ne se voit pas. Sur les deux figures de droite, le premier dépassement est coté avec la valeur  $D$ , et c'est le seul visible sur la courbe du milieu.

On peut par ailleurs définir le dépassement relatif  $D_{rel}$ , plus intéressant pour comparer les performances de systèmes différents. On a ainsi

$$D_{rel} = \frac{s(t_d) - \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)}{\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)}$$

### Rapidité

La **rapidité** d'un système s'évalue pour un système stable à partir de sa réponse indicielle :

- soit avec le temps de réponse à 5 % ;
- soit avec le temps de réaction ou temps de montée.

### Définition

Le **temps de réponse à cinq pour cent**, noté  $t_{5\%}$ , est la durée entre l'instant initial et l'instant à partir duquel la valeur du signal de sortie  $s$  est telle que

$$0,95 s_{\infty} \leq s(t) \leq 1,05 s_{\infty}$$

$$\text{avec } s_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$$

Plus le temps de réponse à 5 % est petit, plus le système atteint rapidement sa valeur finale.

Le « temps de réponse » est une des performances évaluées pour un système, et c'est une des performances nécessitant un critère d'évaluation : ce critère est ici cité par l'expression « à cinq pour cent ».



La valeur finale étant atteinte de manière asymptotique, elle n'est théoriquement atteinte qu'au bout d'un temps infini, d'où la nécessité de définir un temps de réponse à  $x$  %.

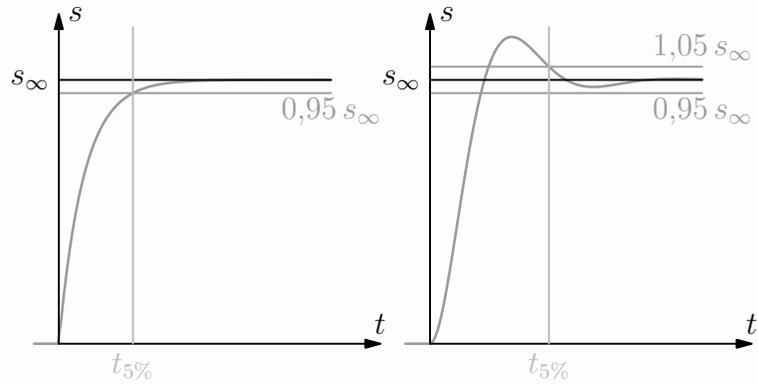


Figure 7.23 Temps de réponse à 5 %

Un deuxième manière d'évaluer la rapidité d'un système est de déterminer son temps de réaction, ou temps de montée.

**Définition**

Le **temps de montée** est la durée évaluée de plusieurs manières possibles :

- soit entre l'instant initial et l'instant pour lequel la valeur du signal de sortie atteint pour la première fois la valeur finale ;
- soit entre les instants de passage à 10 % et à 90 % de la valeur finale.

La première manière ne convient que pour des systèmes dont la réponse indicielle présente des oscillations.

La deuxième manière est rapide à mettre en œuvre dans le domaine expérimental, à l'aide d'un oscilloscope par exemple, et permet d'éviter les soucis de détermination de l'instant initial et de l'instant final.

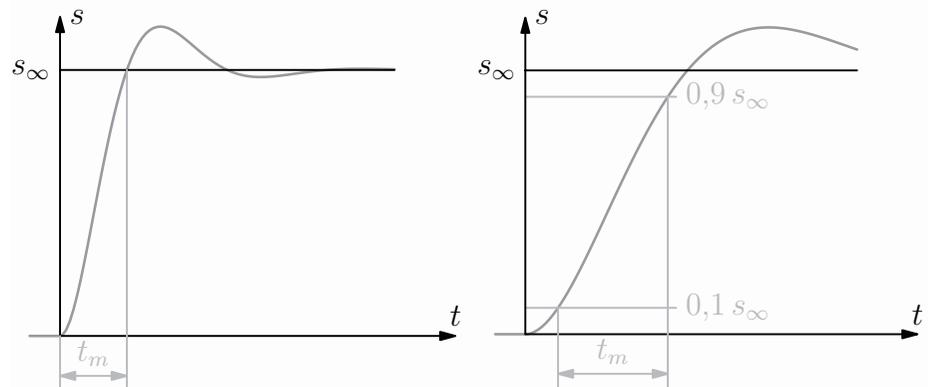


Figure 7.24 Deux définitions différentes du temps de montée

Le temps de montée caractérise la réactivité d'un système suite à une variation brusque de l'entrée, à savoir suite à une entrée en échelon. Ce temps de montée est également une performance nécessitant un critère.



Le temps de montée sera dans ce cas pris égal au temps de réponse à 5 % pour les systèmes peu ou pas oscillants.



Le critère retenu n'est pas explicité dans l'expression « temps de montée » ! Il faut le chercher ailleurs, et bien le préciser en cas de doute...

## Synthèse

### Connaissances

Je sais définir les mots ou expressions :

- système
- réponse
- perturbation
- consigne
- commande
- système asservi
- système linéaire
- système continu
- système invariant
- chaîne directe
- comparateur
- écart
- correcteur
- poursuite
- régulation
- échelon
- impulsion
- rampe
- stabilité
- précision
- rapidité
- temps de réponse à 5 %

### Savoir-faire

Je sais

- repérer les grandeurs de commande d'un système
- identifier la structure d'un système asservi
- nommer les principaux éléments d'un système asservi :
  - chaîne directe, chaîne de retour ;
  - système commandé ou mécanisé ;
  - capteur, correcteur ou générateur de commande, adaptateur ;
  - sommateur, soustracteur ou comparateur.
- localiser les grandeurs physiques de référence :
  - consigne ;
  - écart ;
  - commande.
- différencier régulation et poursuite
- caractériser les signaux canoniques d'entrée

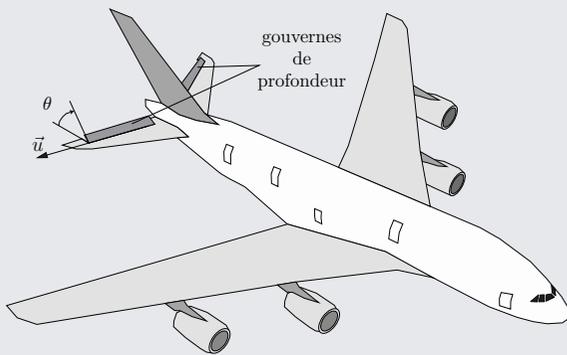
## Exercices d'application

### 7.1 Pilote automatique d'un avion

On s'intéresse dans cet exercice à la description d'un système asservi sous forme de schéma-blocs.

L'altitude d'un avion est obtenue par le gouvernail de profondeur, localisé sur la figure ci-dessous. En première approche, on considère la chaîne fonctionnelle destinée au maintien automatique de l'altitude constituée comme suit :

- la partie commande reçoit un signal électrique proportionnel à l'altitude  $h$  de l'avion, fourni par un altimètre ;
- le signal précédent est comparé à un signal de consigne proportionnel à l'altitude  $h_c$  choisie par le pilote pour donner un signal d'écart  $\varepsilon$  ;
- un régulateur électrique traite cet écart et délivre un signal de commande  $u$  à un actionneur électrique chargé de mouvoir les gouvernes de profondeur.



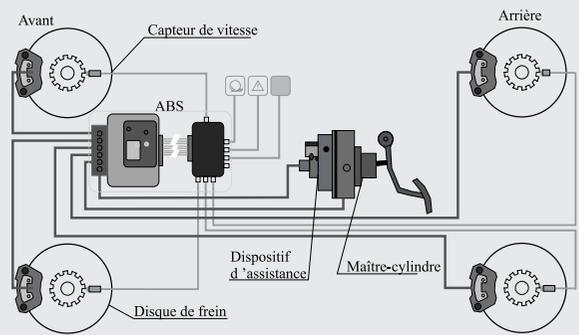
Les gouvernes de profondeur d'un AIRBUS A380

1. À partir du texte de présentation, identifier les différents éléments de la chaîne d'action et de la chaîne d'acquisition, en précisant les grandeurs physiques de chacune des entrées-sorties.
2. Quel élément est soumis à d'éventuelles perturbations ? Donner un exemple de leurs natures.
3. Tracer le schéma-blocs décrivant la structure de l'asservissement.

### 7.2 Antiblocage de roue

Sur un véhicule, pour contrôler la vitesse en phase de décélération, le conducteur agit sur le système de freinage par l'intermédiaire d'une pédale de frein. Les dispositifs actuels, schématisés figure ci-dessous sont principalement constitués des éléments suivants :

- un maître cylindre qui génère une pression hydraulique à partir de l'effort appliqué par le conducteur sur la pédale de frein ;
- quatre cylindres de roue qui transforment la pression hydraulique en effort de freinage appliqué par les plaquettes de frein sur les disques de frein ;
- un ensemble de tuyauteries qui assurent la transmission de la pression entre le maître cylindre et les cylindres de roues.



Vue générale d'un circuit de freinage

Pour augmenter l'efficacité de ces systèmes de freinage, on leur adjoint :

- un répartiteur de freinage qui gère la répartition de pression entre les cylindres de frein avant et arrière ;
- un dispositif d'assistance qui amplifie l'effort exercé par le conducteur afin de minimiser l'effort à fournir par celui-ci ;
- un dispositif d'antiblocage de roue qui module les pressions dans les cylindres de frein afin que le conducteur conserve la maîtrise directionnelle de son véhicule en évitant le blocage des roues quelles que soient la vitesse, les caractéristiques d'adhérence au sol et l'intensité de freinage.

Dans cet exercice, on s'intéresse au dispositif d'antiblocage de roue, noté ABS - abréviation de Antilocksystem. Dans le cas d'une régulation par l'ABS, la pression au niveau des cylindres de roue est modulée par des électrovannes commandées en courant. Le calculateur du véhicule définit la vitesse optimale de rotation des roues appelée vitesse cible. C'est à partir de cette vitesse cible et de la vitesse de la roue qu'est défini le courant émis vers l'électrovanne. Cette commande est élaborée pour chaque roue quelle que soit l'action exercée par la route sur la roue. Cette action de la route sur la roue, appelée traînée, est considérée comme une perturbation pour l'ABS.

Lorsque le calculateur électronique détecte une anomalie de fonctionnement, l'ABS est déconnecté automatiquement. Les électrovannes ne sont alors plus pilotées. Le système de freinage reste bien évidemment opérationnel, mais dans ce cas sans l'assistance de l'antiblocage des roues.

1. Quelle est la grandeur réglée par l'électrovanne ?
2. Quelle est la variable asservie par l'ABS ?
3. Tracer le schéma-blocs décrivant le fonctionnement de l'ABS. Faire apparaître la perturbation.

### 7.3 Contrôle d'attitude de satellite

Pour qu'un satellite ait une durée de vie importante et une grande efficacité, il faut pouvoir contrôler la position de son centre de gravité et son orientation autour de ce point par rapport à un repère de référence. Le satellite est géré par :

- un dispositif de contrôle d'orbite qui régule la position de son centre de gravité ;
- un système de contrôle d'attitude chargé d'orienter le satellite.

Le contrôle d'attitude permet de :

- modifier l'orientation du satellite afin que ses panneaux solaires soient positionnés au mieux afin d'assurer l'alimentation en énergie ;
- assurer le pointage précis des instruments embarqués : antenne, télescope, ...

Pour modifier l'orientation du satellite, on utilise trois roues de réaction, une sur chaque axe. Pour la suite du problème, on ne s'intéresse qu'à la commande d'un seul axe. Une roue de réaction est constituée d'un moteur électrique et d'un volant d'inertie. Le stator du moteur est lié au satellite alors que le rotor est solidaire du volant d'inertie. Une étude dynamique permet de montrer que la mise en rotation du volant d'inertie génère un couple  $c$  sur le satellite qui provoque sa rotation. Un dispositif électronique élabore la commande  $u$  du moteur électrique à partir de la différence entre l'orientation souhaitée  $\theta_c$  et l'orientation réelle  $\theta$  du satellite. Un capteur permet de mesurer l'orientation réelle du satellite. Par ailleurs, on modélise l'effet de la pression de radiation exercée sur les panneaux solaires du satellite par un couple résistant  $c_r$  exercé sur le satellite.

1. Si on provoque la rotation de la roue de réaction dans le sens trigonométrique, comment varie l'orientation du satellite ?

2. Un satellite géostationnaire évolue à une altitude d'environ 36000 kilomètres. Pour certaines applications, on n'a besoin que d'une précision d'environ 1 kilomètre autour du point visé. Quelle est alors la précision souhaitée pour l'orientation du satellite ?

3. Tracer le schéma-blocs décrivant le fonctionnement de ce système de contrôle d'attitude. Faire apparaître la perturbation.

#### 7.4 Train pendulaire

Pour assurer le confort des passagers lorsque le train aborde une courbe, il faut non seulement atténuer les défauts des voies mais également limiter la sensation physique due à l'accélération normale. Pour compenser l'effet de la courbe sur les passagers, on peut réaliser des virages en dévers. Le rail extérieur est plus haut que le rail intérieur. Cette solution n'est réalisable que lors de la création de nouvelles lignes. C'est la solution retenue sur les Lignes à Grande Vitesse (LGV).

Sur le réseau classique, en plus du dévers de voie, il est nécessaire d'incliner la caisse de la voiture transportant les passagers, on parle alors de voiture pendulée. Ce système est indispensable pour permettre l'accès des TGV au réseau classique.

Le principe de la pendulation est schématisé figure 1.

L'anneau d'intercirculation est suspendu à une traverse pendulaire. Celle-ci est suspendue au bogie de manière à ce que son inclinaison soit libre. Un vérin hydraulique placé entre le bogie et la traverse pendulaire permet de régler l'inclinaison des voitures.

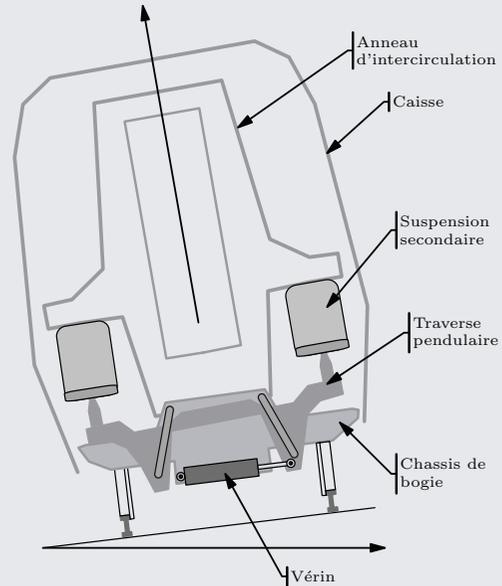


Figure 1 Comportement d'une voiture en virage

Afin de contrôler le mouvement de la caisse, on réalise un asservissement en position angulaire de l'ensemble {traverse pendulaire, caisse de la voiture}. La consigne de position angulaire est calculée à partir d'informations provenant notamment d'accéléromètres implantés sur les différentes voitures du train.

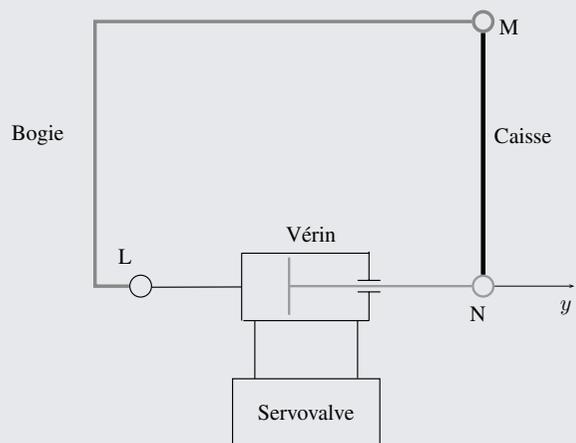


Figure 2 Schéma de principe de la pendulation

Le principe de fonctionnement, présenté figure 2, est exposé ci-dessous :

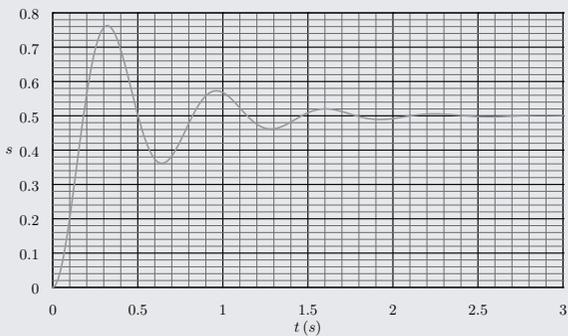
- La caisse de la voiture pendulée est en mouvement de rotation autour d'un point  $M$  par rapport au bogie fixe.
- Ce mouvement de rotation est obtenu par le déplacement  $y$  de la tige d'un vérin double effet. L'origine de ce déplacement est la position médiane de la figure.
- Ce vérin est alimenté par un débit de fluide hydraulique  $q$  fourni par une servovalve commandée en courant  $i$ . Le débit  $q$  est proportionnel au courant d'alimentation.

- Un capteur de position mesure la position  $y$  de la tige du vérin. Il délivre une tension  $u_m$ .
- Un potentiomètre fournit une tension  $u_c$  image de la consigne de position  $y_c$ .
- Un correcteur permet d'élaborer la tension de commande  $u$  à partir de l'écart. À partir de cette tension, un convertisseur tension-courant génère le courant  $i$  qui alimente la servovalve.

1. Définir la catégorie de chaque composant de ce système.
2. Tracer un schéma-blocs décrivant le fonctionnement de cet asservissement de position angulaire.

### 7.5 Dépassement

La figure ci-dessous représente la réponse d'un système à un échelon de  $0,55 \text{ ms}^{-2}$  d'un système linéaire.



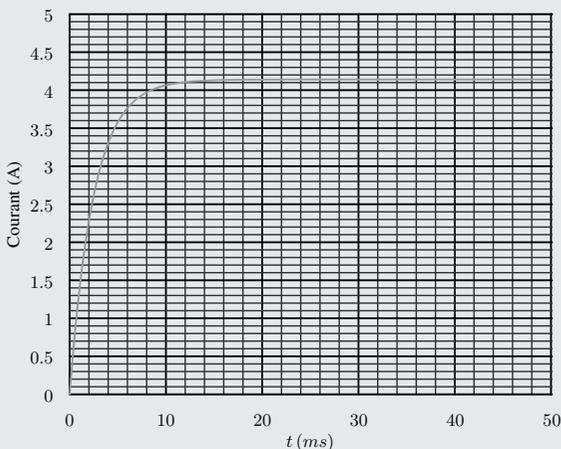
Réponse à un échelon de  $0,55 \text{ ms}^{-2}$

1. Quelles sont les grandeurs physiques d'entrée et de sortie ?
2. Déterminer le temps de réponse à 5 %.
3. Évaluer l'instant du dépassement maximal puis sa valeur. En déduire la valeur du dépassement relatif.

### 7.6 Précision et rapidité

Soit un système d'entrée une consigne de courant  $i_c$  et de sortie un courant  $i$ .

On fournit, sur la figure ci-dessous, la réponse à un échelon de 4,5 A de ce système.

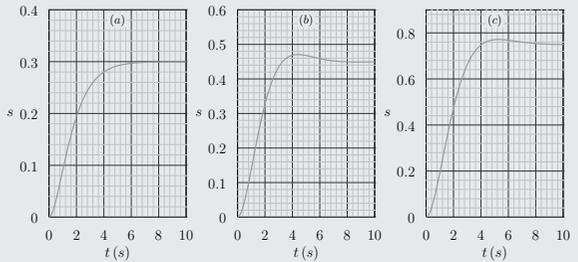


Réponse à un échelon de 4,5 A.

1. Déterminer l'erreur en régime permanent.
2. Déterminer le temps de réponse à 5 %.

### 7.7 Linéarité

On fournit sur la figure ci-dessous les réponses à des échelons d'amplitudes différentes d'un système dont l'erreur en régime permanent est nulle.

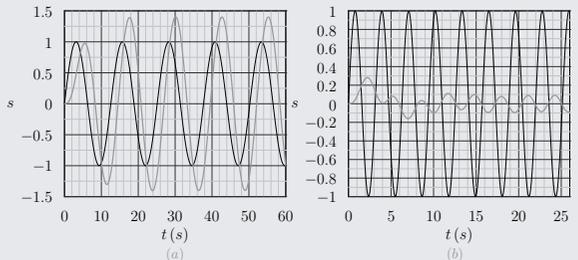


Réponses à des échelons d'amplitudes différentes

1. Pour chaque essai, définir le signal d'entrée.
2. Conclure sur la linéarité du système étudié.

### 7.8 Stabilité

On donne, figure ci-dessous, les réponses  $s_1$  et  $s_2$  d'un système linéaire à deux entrées  $e_1(t) = \sin(0,5t)$  et  $e_2(t) = \sin(2t)$ .



Réponses harmoniques aux signaux  $e_1$  et  $e_2$

1. Attribuer à chaque courbe de réponse harmonique de la figure l'entrée correspondante.
2. Pour chacune des réponses  $s_1$  et  $s_2$ , déterminer l'instant à partir duquel on peut considérer que le régime permanent est atteint.
3. Déterminer, en régime permanent, l'amplitude des signaux de sortie correspondant aux deux signaux d'entrées  $e_1$  et  $e_2$ .
4. Peut-on affirmer que la réponse à une entrée sinusoïdale de type  $e(t) = 15 \sin(0,5t) + 10 \sin(2t)$  est bornée ?
5. Peut-on conclure sur la stabilité du système testé ?

## Exercices d'approfondissement

### 7.9 Pilote hydraulique automatique de bateau

Sur les voiliers, la position du safran peut être surveillée par un pilote automatique afin de libérer le skipper pour qu'il puisse s'occuper d'autres tâches ou se reposer. Le skipper donne une consigne de cap et le pilote automatique régule le cap du bateau. Sur les voiliers de grandes dimensions, ce pilote est hydraulique.

La description du système étudié est faite à partir des trois diagrammes ci-dessous :

- diagramme de contexte (fig. 1) ;
- diagramme de définition de blocs (fig. 2) ;
- diagramme de blocs internes (fig. 3).

1. Quel est le système commandé ?

Quel est le système automatisé ?

2. Citer des causes de perturbations possibles ?

3. Proposer un schéma-blocs illustrant l'asservissement de cap d'un bateau utilisant un pilote hydraulique.

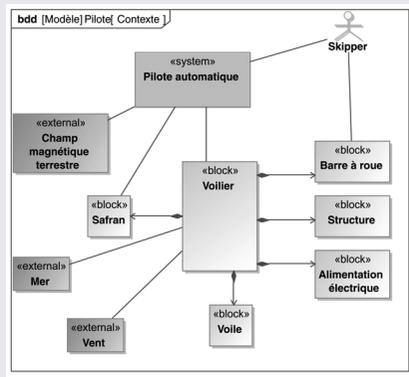


Figure 1 Diagramme de contexte pour un pilote hydraulique

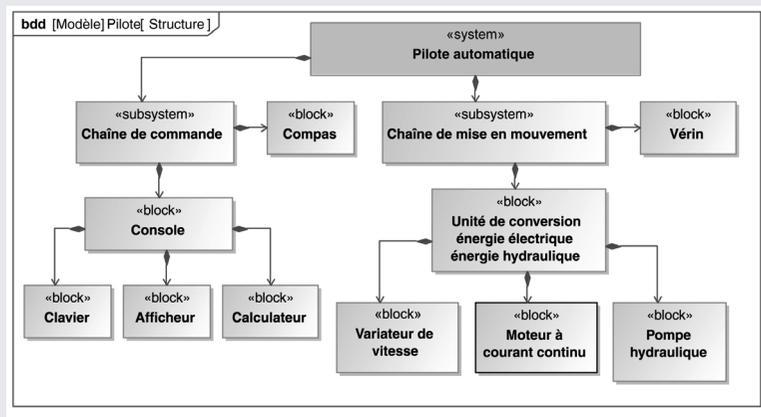


Figure 2 Diagramme de définition de blocs d'un pilote hydraulique

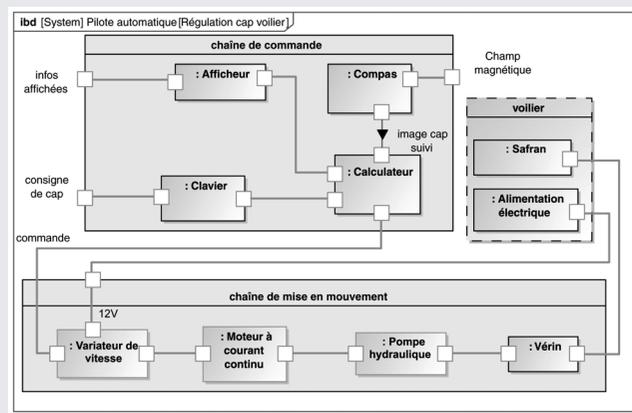


Figure 3 Diagramme de blocs internes d'un pilote hydraulique

### 7.10 Régulation de niveau

On s'intéresse à une cuve d'eau telle que schématisée sur la figure ci-dessous. On souhaite garder son niveau de remplissage constant, alors que le débit de sortie  $q_s$  est aléatoire.

Le dispositif étudié comprend :

- une cuve, de section  $S$  constante ;

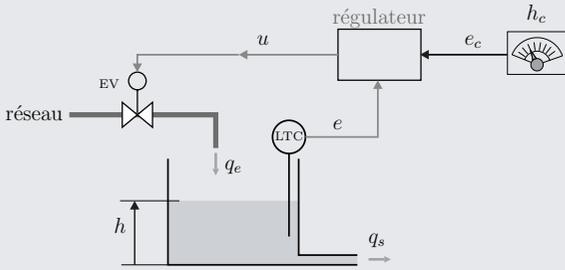


Schéma de l'installation

- une électrovanne, notée  $EV$ , assurant un débit-volume  $q_e$  proportionnel à une tension de commande  $u$  ;
- un régulateur, dont le rôle est d'élaborer la tension de commande de l'électrovanne  $u$  à partir du niveau de consigne et du niveau constaté ;
- un capteur de pression, fournissant une tension  $e$  proportionnelle au niveau d'eau  $h$  ;
- un pupitre, qui permet de donner la consigne de niveau sous la forme d'une tension  $e_c$  proportionnelle à la hauteur souhaitée  $h_c$ .

1. Quelle est la grandeur physique que l'on souhaite contrôler ?

Identifier le processus physique en cause et écrire les équations correspondantes.

2. Tracer le schéma-blocs de ce processus physique et détailler les différentes fonctions de transfert.

3. Le modèle précédent est-il applicable à une cuve sphérique ?

4. Identifier les différents éléments de la chaîne d'action et de la chaîne d'acquisition et tracer le schéma-blocs décrivant la structure de l'asservissement.

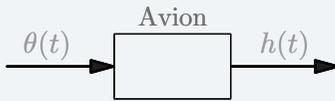
# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 7.1

Cet exercice illustre la difficulté de prendre du recul. En effet, il est probable que les ébauches de schéma-bloc font toutes intervenir *les bonnes boîtes*, sauf celle du *système commandé* ! La première question à se poser est ainsi : « Quel est le système qu'un utilisateur peut piloter pour obtenir la grandeur physique souhaitée ? » Une réflexion suite à cette question conduit aux trois propositions suivantes :

- la grandeur physique que l'on souhaite contrôler est l'altitude de l'avion ;
- le système commandé est l'avion ;
- la commande peut être prise où l'on veut sur la chaîne d'action, à savoir l'angle du gouvernail de profondeur par rapport à l'avion ou le signal de commande du préactionneur correspondant. On choisit ici de prendre l'angle du gouvernail de profondeur par rapport à l'avion comme signal de commande.

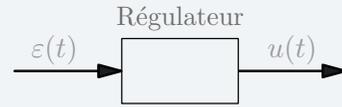


1. Une fois l'avion identifié comme système commandé, la description proposée conduit au dessin de quatre boîtes supplémentaires :

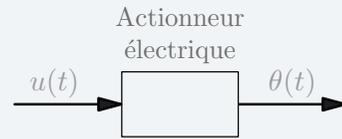
- l'altimètre ;



- le régulateur ;



- l'actionneur électrique ;

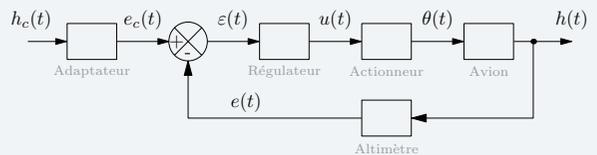


- un adaptateur.



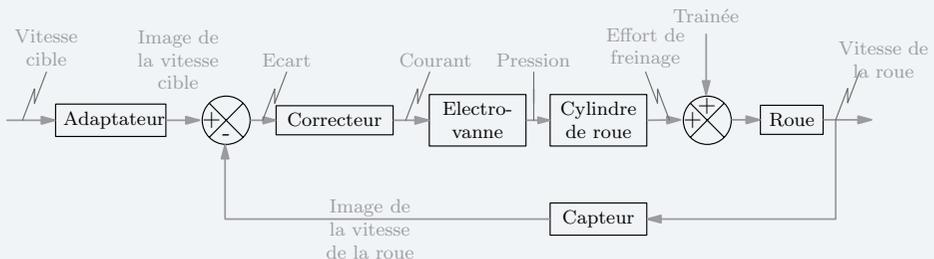
L'altimètre est à classer dans la chaîne d'acquisition, le régulateur et l'actionneur électrique dans la chaîne d'action.

2. L'altitude de l'avion est définie par rapport au sol, et l'avion évolue par rapport à l'air. On comprend ainsi que le mouvement de l'air par rapport au sol, par nature aléatoire, est source de perturbations.
3. On arrive alors à la proposition de schéma-blocs suivante



### 7.2

1. La pression d'alimentation des cylindres de roue est réglée par l'électrovanne.
2. La vitesse de la roue est asservie par l'ABS.
3. Schéma-blocs



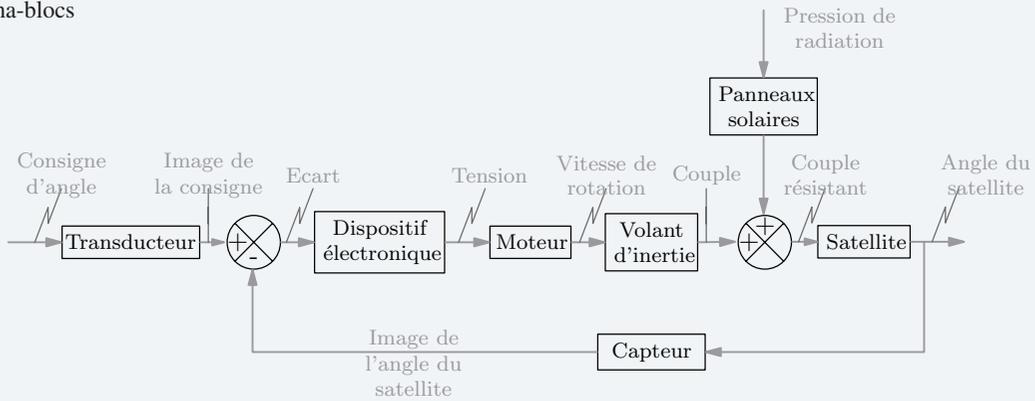
### 7.3

1. Si la rotation imposée au volant d'inertie est dans le sens trigonométrique, alors le satellite va tourner dans le sens opposé, donc dans le sens négatif.
2. Si on assimile l'arc à la corde, on peut définir l'erreur maximale d'orientation  $\Delta\theta$  par :

$$\Delta\theta = \frac{d}{R}$$

Dans cette relation,  $d$  représente l'erreur de pointage admise et  $R$  le rayon sur lequel se situe le satellite. On obtient une erreur maximale de  $1,6 \cdot 10^{-3}$  degré.

### 3. Schéma-blocs

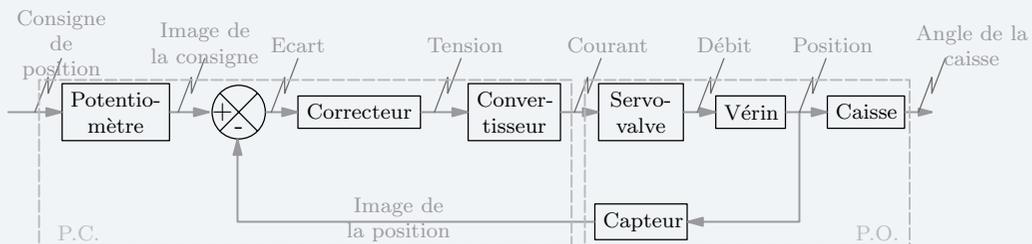


### 7.4

1. On regroupe les informations dans un tableau

Transducteur	: Potentiomètre
Préactionneur	: Servovalve
Actionneur	: Vérin
Effecteur	: Caisse

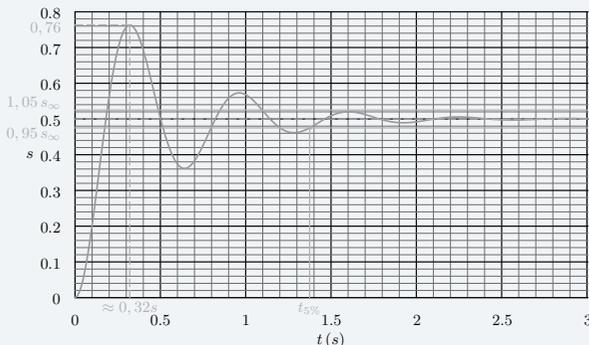
2. Schéma-blocs



### 7.5

1. La grandeur d'entrée est homogène à une accélération, la grandeur de sortie n'est pas précisée par l'énoncé.

2. Le temps de réponse à 5 % est l'instant à partir duquel la valeur du signal de sortie est comprise entre 95 % et 105 % de la valeur finale. Ici, on doit tracer deux droites d'équations  $s_1(t) = 0,95 \times 0,5$  et  $s_2(t) = 1,05 \times 0,5$ .



3. À l'instant  $t \approx 0,32$  s, le signal  $s$  atteint son maximum. Par définition, le dépassement maximal est la différence entre la valeur maximale de  $s(t)$  et la valeur finale. On relève un maximum de  $0,76 \text{ ms}^{-2}$  pour la valeur du signal de sortie. La valeur finale tend vers  $0,5 \text{ ms}^{-2}$ . On a donc un dépassement

$$\Delta_1 \approx 0,26 \text{ ms}^{-2}.$$

Pour obtenir le dépassement relatif, il suffit de diviser la valeur du dépassement par la valeur finale, on écrit donc

$$D_1 = \frac{\Delta_1}{\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)}$$

soit

$$D_1 \approx \frac{0,26}{0,5}.$$

On obtient donc un dépassement relatif  $D_1$  de 52 %.

### 7.6

1. Par définition, l'erreur en régime permanent est la différence entre la consigne et la valeur finale. On relève, sur la courbe de réponse indicielle fournie, un courant d'environ 4,15 A en régime permanent. On a donc une erreur de 0,35 A.

2. Comme la courbe de réponse indicielle ne présente pas de dépassement, le temps de réponse à 5 % est évalué lorsque la valeur de la réponse atteint 95 % de la valeur finale. On cherche donc l'instant où le courant en sortie atteint une valeur égale à  $0,95 \times 4,15$  A soit environ 3,94 A. On trouve  $t_{5\%} \approx 7,5$  s.

## 7.7

1. Comme l'erreur en régime permanent est nulle, la valeur finale est donc égale à la consigne. Il suffit donc de relever, sur chaque courbe de réponse, la valeur de la sortie en régime permanent pour avoir l'amplitude de l'échelon. On trouve respectivement comme valeur d'échelon : 0,3 ; 0,45 et 0,75.

2. Un système qui élabore une sortie  $s_i$  à partir d'une entrée  $e_i$  est linéaire si pour toute combinaison linéaire d'entrées  $e_i$  on a en sortie la même combinaison linéaire des signaux  $s_i$  quel que soit l'instant considéré. Dans la phase de régime transitoire, on observe que l'allure de la réponse n'est pas semblable sur les réponses (a) et (b). On conclut alors que le système n'est pas linéaire.

## 7.8

1. Les courbes noires sont régulières depuis l'instant initial, au contraire des courbes bleues : ce sont donc les courbes représentatives des entrées.

Le signal  $e_1$  a une période égale à  $4\pi$  secondes alors que la période de  $e_2$  est de  $\pi$  secondes. Les courbes représentatives des signaux  $e_1$  et  $e_2$  étant en noir sur la figure, on en déduit que la courbe (a) correspond à l'entrée  $e_1$  et donc la courbe (b) à  $e_2$ .

2. Le régime permanent débute lorsque le signal de sortie est décrit par une loi également sinusoïdale. Pour l'entrée  $e_1$ , on peut estimer que le régime permanent est atteint à partir de 19 s. L'instant du début du régime permanent est une caractéristique intrinsèque du système étudié, il ne dépend donc ni de l'amplitude, ni de la pulsation du signal d'entrée. On peut vérifier que sur la figure (b) le régime permanent est bien atteint au même instant.

3. En régime permanent, on relève une amplitude d'environ 1,37 alors que pour le signal  $e_2$  la sortie a une amplitude d'environ 0,1. On remarque que pour une pulsation d'entrée de  $0,5 \text{ rad s}^{-1}$ , le signal de sortie est amplifiée alors que pour la pulsation de  $2 \text{ rad s}^{-1}$ , l'amplitude du signal de sortie est très atténuée.

4. Comme le système est linéaire, on peut affirmer que pour une entrée  $e(t) = 15e_1(t) + 10e_2(t)$  on a un signal de sortie qui s'écrit  $s(t) = 15s_1(t) + 10s_2(t)$ . Donc comme les réponses  $s_1$  et  $s_2$  sont bornées, la sortie  $s$  est également bornée.

5. Pour qu'un système soit stable au sens EBSB, il faut que pour toute entrée bornée, la sortie soit bornée en régime permanent. Les deux pulsations utilisées en entrée ne permettent

donc pas de conclure, car un exemple n'est pas une preuve. Par contre, il sera vu plus tard que la réponse à un échelon permettra de conclure.

## Exercices d'approfondissement

## 7.9

1. Le diagramme de contexte met en évidence le pilote automatique, mais ce dernier est « ajouté » au système pour libérer le skipper. Le système commandé reste le voilier, que le skipper peut diriger manuellement.

2. La grandeur à contrôler est le cap suivi par le bateau : cet angle oriente ce dernier par rapport à la terre. La lecture du diagramme de contexte permet de poursuivre la réflexion :

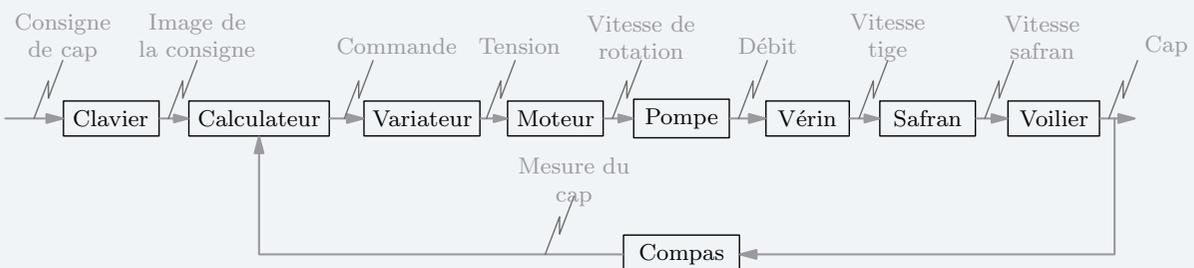
- la puissance motrice provient du vent, par nature aléatoire, mais le pilote n'a pas d'action sur les voiles ;
- le safran oriente la coque du navire par rapport à la mer, dont les courants ne sont pas connus à l'avance.
- le champ magnétique terrestre est entièrement connu, on sait tenir compte de sa lente évolution.

Pour le pilote automatique, les principales causes de perturbations proviennent de la mer, à savoir des vagues et des courants, dont on ne maîtrise pas les actions, ni sur la coque du voilier, ni sur le safran.

3. À la lecture du diagramme de blocs internes, on peut voir que

- le safran est déplacé par un vérin hydraulique ;
- le débit de fluide alimentant le vérin est fourni par une pompe hydraulique ;
- la pompe est mise en mouvement par un moteur à courant continu ;
- la vitesse de rotation du moteur est réglée par un variateur de vitesse ;
- la commande du variateur est réalisée par le calculateur ;
- le calculateur élabore la commande à partir de la mesure du cap et de la consigne fournie par le skipper ;
- la mesure du cap du bateau est réalisée par un compas.

On peut alors proposer le schéma-blocs suivant :



## 7.10

1. La grandeur physique que l'on souhaite contrôler est le niveau d'eau  $h$  dans la cuve.

Pour une cuve à section constante d'aire  $S$ , cette hauteur  $h(t)$  est proportionnelle au volume total d'eau  $V(t)$  dans la cuve

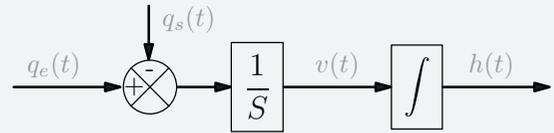
$$h(t) = \frac{V(t)}{S}$$

La variation instantanée de volume est caractérisée par le débit-volume instantané, différence entre le débit entrant et le débit sortant

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{S} (q_e(t) - q_s(t))$$

2. Soit  $v(t) = \frac{dh}{dt}(t)$  la vitesse de variation de la hauteur.

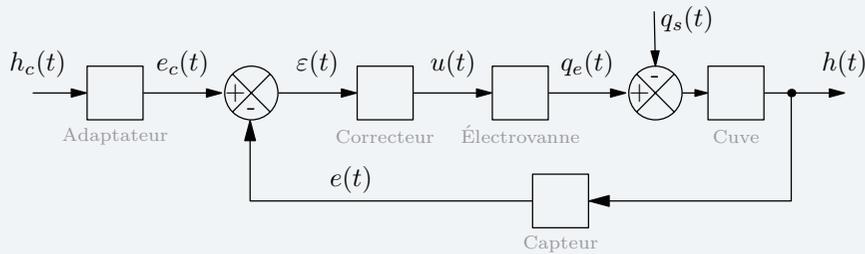
Le schéma-blocs correspondant à l'équation précédente est alors



Le débit-volume sortant  $q_s(t)$ , par nature aléatoire, est à considérer comme une perturbation.

3. Dans le cas d'une cuve sphérique, l'aire de la section  $S$  de la cuve dépend de la hauteur  $h$  et on n'est alors plus dans le cadre des systèmes à comportement linéaire. Il est néanmoins possible de conserver le modèle posé à la condition de garder le même point de fonctionnement, donc une même hauteur fixée dès le départ.

4. On peut maintenant définir la structure de l'asservissement...



### Plan

8.1	Fonction de transfert	213
8.2	Schémas-blocs	218
8.3	Modèle de connaissance – modèle de description	226
	Exercices d'application	228
	Exercices d'approfondissement	231
	Solutions des exercices	236

### Introduction

Ce chapitre a pour but de définir la notion de fonction de transfert et de mettre en place la description des systèmes continus, linéaires et invariants par schémas-blocs.

### Prérequis

- Notion de systèmes ;
- Signaux canoniques ;
- Schéma d'un système asservi ;
- Notion de perturbation.

### Objectifs

- Décrire un système sous la forme d'un schéma-blocs ;
- Déterminer une fonction de transfert à partir d'une équation différentielle ;
- Transformer et réduire un schéma-blocs ;
- Déterminer une fonction de transfert à partir d'un schéma-blocs.

## 8.1 Fonction de transfert

Le fonctionnement d'un système continu, linéaire et invariant est décrit par une ou des équations différentielles à coefficients constants. Cette équation établit une relation entre une variable de sortie et une variable d'entrée.

On remarque alors que la description schématique utilisée figure 7.16 ne serait pas pertinente pour décrire un système au niveau des équations de fonctionnement.

Par ailleurs, la résolution du système d'équations différentielles décrivant le fonctionnement du système étudié est rarement simple. Pour résoudre ce système d'équations, on fait appel à la transformée de Laplace. Cette méthode permet, en transposant le problème, de remplacer un système d'équations différentielles du domaine temporel par un système d'équations polynômiales écrites dans un domaine dit de Laplace ou symbolique.

L'annexe sur la transformée de Laplace définit les quelques notions utiles à sa mise en œuvre pour la résolution de problèmes d'automatique continue.



La notion de système s'étend des systèmes les plus simples à un seul composant aux systèmes complexes à  $x$  composants.

Le comportement d'un système continu, linéaire et invariant d'entrée  $e$  et de sortie  $s$  peut être décrit, dans le cas général, par l'équation différentielle à coefficients constants suivante, avec  $k \leq n$  en général :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt}(t) + b_2 \frac{d^2 s}{dt^2}(t) + \dots + b_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) = a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt}(t) + a_2 \frac{d^2 e}{dt^2}(t) + \dots + a_k \frac{d^k e}{dt^k}(t)$$

Par transformation de Laplace, on sait que

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right) = p^n F(p) \text{ si les conditions initiales sont nulles}$$

Si on applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle définissant le comportement du système étudié, et en supposant les conditions initiales nulles, on obtient

$$(b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n) S(p) = (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_k p^k) E(p)$$

$$\text{avec } \mathcal{L}(s(t)) = S(p) \text{ et } \mathcal{L}(e(t)) = E(p).$$

Ce qu'on peut encore écrire

$$S(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_k p^k}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n} E(p)$$



En automatique, on a l'habitude de noter les polynômes dans l'ordre des puissances croissantes.



La fonction de transfert est indépendante de la nature du signal d'entrée.

### Définition

La fonction de transfert d'un système d'entrée  $e$  et de sortie  $s$  est définie par le quotient

$$\frac{S(p)}{E(p)}$$

où  $S(p)$  est la transformée de Laplace de  $s(t)$  et  $E(p)$  celle de  $e(t)$ .



La transposition du problème en utilisant la transformée de Laplace permet non seulement de simplifier la résolution du système d'équations différentielles mais elle donne accès à une représentation graphique qui permet d'utiliser les schémas du chapitre précédent en remplaçant les noms des différents composants par des fonctions de transfert.

Si on note  $H(p)$  la fonction de transfert alors on peut écrire

$$S(p) = H(p)E(p)$$

On accède alors à une représentation graphique du système étudié dans le domaine de Laplace, voir figure 8.1.

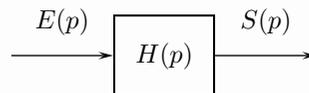


Figure 8.1 Représentation d'un système par un bloc

Le système est représenté par un **bloc**. On trouve en entrée  $E(p)$  l'image dans le domaine de Laplace du signal temporel d'entrée, en sortie  $S(p)$  l'image dans le domaine de Laplace du signal temporel de sortie et enfin la fonction de transfert qui permet d'établir la relation entre entrée et sortie du domaine de Laplace.

Pour un système, dans le cas général, on obtient la fonction de transfert suivante

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_k p^k}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}.$$



$S(p)$  et  $E(p)$  sont des images de grandeurs physiques.

**Remarque**

Si on connaît le signal d'entrée  $e$  du domaine temporel alors on a accès à  $E(p)$  son image dans le domaine de Laplace. On peut alors déterminer  $S(p)$  si on connaît la fonction de transfert  $H(p)$ . On trouve donc, si c'est l'objectif souhaité, la réponse temporelle  $s$  du système étudié en utilisant des tableaux de transformées de Laplace comme ceux fournis dans l'annexe sur la transformée de Laplace ou si l'expression de  $S(p)$  est compliquée en utilisant une décomposition en éléments simples puis la transformation de Laplace.

Une fonction de transfert est donc une fraction rationnelle. C'est l'étude de cette fraction et plus particulièrement dans un premier temps de son dénominateur qui permet de caractériser les systèmes décrits par une fonction de transfert.

**Définition**

Le polynôme situé au dénominateur d'une fonction de transfert est appelé **polynôme caractéristique** en référence à l'équation caractéristique issue des méthodes de résolution des équations différentielles.

À partir de ce polynôme caractéristique on met en place deux notions importantes dans l'analyse des systèmes continus, linéaires et invariants : l'ordre et les pôles d'une fonction de transfert.

**Définition**

L'**ordre** d'un système ou d'une fonction de transfert est égal au degré de son polynôme caractéristique.

**Définition**

On appelle **pôles** d'une fonction de transfert les racines de son polynôme caractéristique.



La valeur de la partie réelle des pôles est déterminante dans l'étude de la stabilité.

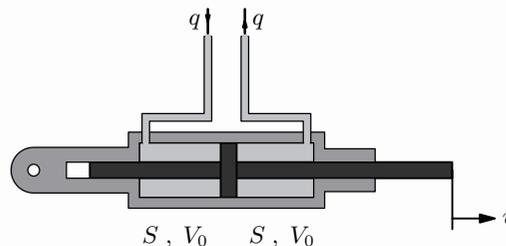


Figure 8.2 Schéma de fonctionnement d'un vérin hydraulique

**Exemple : Vérin hydraulique**

Soit un vérin hydraulique, voir figure 8.2, dont le signal d'entrée est un débit  $q$  en  $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$  et celui de sortie une vitesse  $v$  en  $\text{m s}^{-1}$ . Son fonctionnement non perturbé peut être modélisé, autour de la position neutre, par l'équation différentielle suivante

$$V_0 \left( m \frac{d^2 v}{dt^2}(t) + \mu \frac{dv}{dt}(t) \right) + 2BS^2 v(t) = 2BSq(t)$$

avec

- $B$  : module de compressibilité du fluide en Pa
- $S$  : surface utile du vérin en  $\text{m}^2$
- $V_0$  : volume des chambres du vérin en  $\text{m}^3$
- $\mu$  : paramètre de frottement visqueux en  $\text{Nm}^{-1} \text{s}$
- $m$  : masse de la partie mobile du vérin en kg.

Si on suppose  $v(0) = 0$  et  $\dot{v}(0) = 0$ , en utilisant la transformée de Laplace on obtient

$$(V_0 (mp^2 + \mu p) + 2BS^2) V(p) = 2BSQ(p)$$

La fonction de transfert du vérin s'écrit donc

$$\frac{V(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{2BS^2 + V_0 (\mu p + mp^2)}$$

Le vérin hydraulique modélisé est donc un système d'ordre 2.

Pour déterminer les pôles de la fonction de transfert du vérin, il suffirait de résoudre l'équation  $2BS^2 + V_0(\mu p + mp^2) = 0$ .

Afin de pouvoir classer les systèmes ou afin de les comparer, on écrit la fonction de transfert sous une forme spécifique, appelée **forme canonique**.

On dit que la fonction de transfert est mise sous **forme canonique** lorsque les polynômes des numérateur et dénominateur ont leur constante égale à 1 une fois que les racines nulles ont été factorisées. On a donc l'écriture suivante pour le numérateur et le dénominateur

$$p^n (1 + a_0 p + a_1 p^2 + \dots) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

Dans le cas général, la forme canonique de la fonction de transfert est la suivante

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \times \frac{1 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots + c_k p^k}{1 + d_1 p + d_2 p^2 + \dots + d_m p^m}$$

La forme canonique permet de mettre en place deux nouvelles notions : classe et gain statique. Notions, elles aussi importantes dans l'étude et la caractérisation des systèmes.

#### Définition

La **classe** d'une fonction de transfert, notée  $\alpha$ , représente le nombre de pôles nuls de la fonction de transfert.

La classe est un entier positif  $\alpha \leq 0$ .

#### Définition

Le **gain statique** d'un système, noté  $K$ , est défini en régime statique comme le rapport de l'amplitude de sortie sur l'amplitude d'entrée lorsque l'entrée est constante.

Le gain statique ne peut être défini que si le système est stable, ce qui impose notamment que la classe de la fonction de transfert du système étudié soit nulle.

De par sa définition, le gain statique permet de connaître l'amplitude de la sortie en régime permanent si l'entrée est un signal en échelon.

L'ordre et la classe permettent de prévoir le comportement du système, pour les basses et les hautes fréquences, lorsque l'entrée est sinusoïdale, voir le chapitre suivant. L'ordre renseigne en partie également sur le régime transitoire de la réponse temporelle.

Les pôles quant à eux sont utiles pour l'étude de la stabilité.

Pour compléter cette série de définition, on introduit la notion de zéros d'une fonction de transfert.

#### Définition

Les **zéros** d'une fonction de transfert sont les racines du polynôme situé au numérateur.

**Exemple : Vérin hydraulique**

Pour pouvoir définir la classe et le gain du vérin hydraulique, on met la fonction de transfert sous forme canonique, on a alors

$$\frac{V(p)}{Q(p)} = \frac{1}{S} \frac{1}{1 + \frac{V_0}{2BS^2} (\mu p + mp^2)}.$$

On conclut alors que le vérin est un système d'ordre 2, de classe 0 et de gain statique  $\frac{1}{S}$ .

On peut valider ce résultat en cherchant l'expression de la sortie  $v$  pour une entrée  $q$  en échelon d'amplitude  $Q_0$ .

Par transformation de Laplace du signal d'entrée, on obtient

$$Q(p) = \frac{Q_0}{p}$$

D'après l'expression de la fonction de transfert, la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit

$$V(p) = \frac{1}{S} \frac{1}{1 + \frac{V_0}{2BS^2} (\mu p + mp^2)} \times \frac{Q_0}{p}$$

ou encore

$$V(p) = \frac{Q_0}{S} \frac{1}{p \left( 1 + \frac{V_0}{2BS^2} (\mu p + mp^2) \right)}$$

Si on suppose  $\mu < 2m$ , le polynôme caractéristique n'a pas de racines réelles. On peut alors identifier l'expression de  $V(p)$  à la forme suivante

$$\frac{1}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

Forme que l'on trouve dans les tableaux de transformées de Laplace fournis en annexe.

Comme la transformation inverse est linéaire alors on trouve l'expression dans le domaine temporel de la sortie  $v$

$$v(t) = \frac{Q_0}{S} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \right) \right)$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{2BS^2}{V_0 m}}, \xi = \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{V_0}{2BS^2 m}} \text{ et } = \arctan \left( \frac{1-\xi^2}{\xi} \right).$$

À partir de l'expression de  $v(t)$ , on peut calculer la valeur de la sortie en régime permanent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{Q_0}{S}$$

Par définition le gain statique est le rapport des amplitudes de sortie et d'entrée en régime statique. On trouve comme prévu

$$K = \frac{1}{S}$$

## 8.2 Schémas-blocs

### 8.2.1 Éléments de syntaxe

Comme chaque composant d'un système continu, linéaire et invariant peut se représenter par un bloc, le système d'équations différentielles définissant le fonctionnement de ce système se traduit sous la forme d'un schéma qui reprend la structure des schémas définis au chapitre précédent. On parle alors de *schéma-blocs*.

Sur un schéma-blocs, on trouve trois éléments de base définis sur la figure 8.3 :

- le bloc,
- le point de prélèvement,
- le sommateur qui permet d'additionner ou de soustraire des signaux.

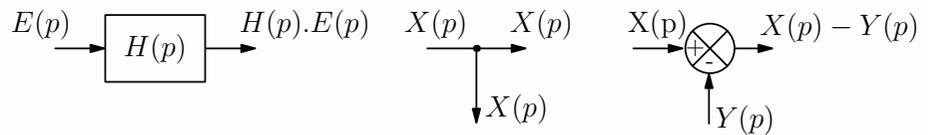


Figure 8.3 Éléments graphiques de base pour les schémas-blocs

#### Remarque

Lorsque le sommateur est utilisé pour fabriquer l'écart dans un système asservi, on parle alors de comparateur.

Ces éléments de base permettent de tracer le schéma-blocs correspondant à la structure d'un système asservi défini sur la figure 7.16 du chapitre précédent. On obtient alors le schéma de la figure 8.4.

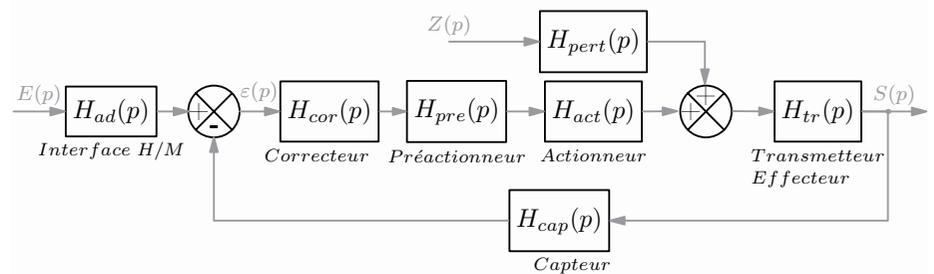


Figure 8.4 Schéma-blocs d'un système asservi

À partir du schéma de la figure 8.4, il serait intéressant de déterminer, par exemple, l'expression de  $S(p)$  afin d'avoir accès par transformation de Laplace à l'expression de  $s(t)$ . On aurait alors résolu le système d'équations différentielles régissant le fonctionnement du système étudié simplement en travaillant sur son schéma-blocs. Pour accéder rapidement à l'expression de  $S(p)$ , il est nécessaire d'effectuer quelques manipulations sur le schéma-blocs afin de simplifier les calculs. Ces manipulations sont décrites dans les paragraphes suivants.

### 8.2.2 Blocs en série

Dans le domaine de Laplace, on obtient l'expression du signal de sortie du système par une simple multiplication de la fonction de transfert par l'expression du signal d'entrée. De manière évidente, lorsqu'on met plusieurs blocs en série, voir figure 8.5, la fonction de transfert globale du système est le produit de toutes les fonctions de transfert.



Le sommateur est utilisé notamment pour l'introduction des perturbations.

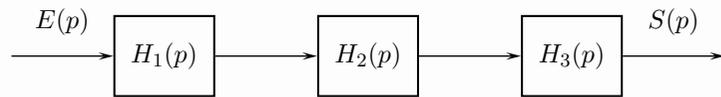


Figure 8.5 Blocs en série

On obtient alors pour le schéma de la figure 8.5

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H_1(p) \times H_2(p) \times H_3(p)$$

## 8.2.3 Fonction de transfert d'un système bouclé

Sur la figure 8.6(a) est représenté le schéma d'un système bouclé d'entrée  $e$  et de sortie  $s$ .

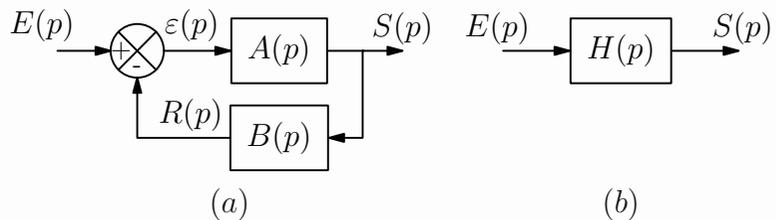


Figure 8.6 Schéma-blocs d'un système bouclé

On cherche une relation entre  $S(p)$  et  $E(p)$  afin de pouvoir tracer le schéma de la figure 8.6(b) où la fonction de transfert  $H(p)$  est la fonction de transfert du système bouclé.

À la lecture du schéma-blocs de la figure 8.6(a), on peut écrire trois équations :

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p) \quad (1)$$

$$S(p) = A(p) \times \varepsilon(p) \quad (2)$$

$$R(p) = B(p) \times S(p) \quad (3)$$

Par substitution, on obtient

$$S(p) = A(p) (E(p) - B(p)S(p))$$

Finalement

$$S(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} E(p)$$

La fonction de transfert du système bouclé s'écrit alors

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

### Remarque

Cette relation est fondamentale pour le calcul des fonctions de transfert des systèmes asservis.

Un système asservi est obligatoirement bouclé, la réciproque n'est pas vraie.

La relation permettant de calculer la fonction de transfert d'un système bouclé est parfois appelée formule de BLACK.  
H.S. BLACK : ingénieur américain (1898-1983)

## 8.2.4

# Fonction de transfert en boucle fermée – Fonction de transfert en boucle ouverte

Les notions de *fonction de transfert en boucle fermée*, notée  $BF(p)$  par la suite et de *fonction de transfert en boucle ouverte*, notée  $BO(p)$ , n'ont de sens que dans le cadre des systèmes asservis.

Soit le schéma-blocs d'un système asservi, représenté sur la figure 8.7, où  $H_D(p)$  représente la fonction de transfert de la chaîne directe et  $H_R(p)$  celle de la chaîne de retour.  $E(p)$  représente l'image du signal de consigne et  $S(p)$  l'image du signal de sortie.

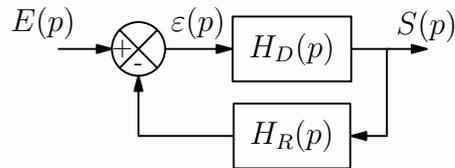


Figure 8.7 Schéma-blocs d'un système asservi

Comme un système asservi est un système bouclé alors en utilisant la relation des systèmes bouclés démontrée au paragraphe 8.2.3, on obtient pour la fonction de transfert en boucle fermée

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_D(p)}{1 + H_D(p)H_R(p)}$$

Dans un asservissement, la grandeur asservie est mesurée par un capteur. On trouve donc dans la chaîne de retour par un capteur. On peut envisager d'étudier le système en supposant que le signal de sortie du capteur n'est pas relié au comparateur. On trace alors le schéma de la figure 8.8.

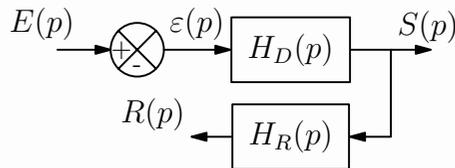


Figure 8.8 Schéma-blocs d'un système asservi avec la boucle ouverte

On définit la *fonction de transfert en boucle ouverte* par

$$BO(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = H_D(p)H_R(p)$$

### Remarque

Compte tenu du calcul de la fonction de transfert en boucle ouverte  $BO(p)$ , on a de manière évidente

$$BF(p) = \frac{H_D(p)}{1 + BO(p)}$$

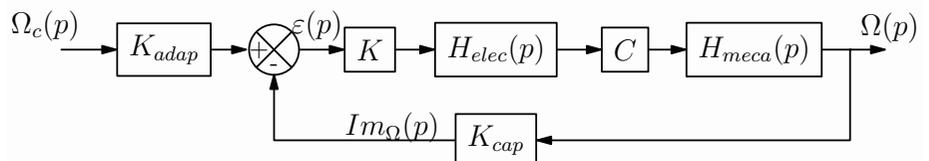


Figure 8.9 Schéma-blocs d'un système d'antiblocage de roue non perturbé



La fonction de transfert en boucle fermée représente la fonction globale du système asservi



Les caractéristiques de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi permettent de conclure sur la stabilité et sur la précision du système en boucle fermée.

### Exemple : Antiblocage de roue

En modélisant le comportement de chaque composant du système d'antiblocage de roue de l'exercice 7.2 et en négligeant la perturbation, on obtient le schéma-blocs de la figure 8.9. Certaines fonctions de transfert se résument à un simple gain statique.

En utilisant l'association de blocs en série, on obtient aisément pour la fonction de transfert en boucle ouverte

$$BO(p) = \frac{Im_{\Omega}(p)}{\varepsilon(p)} = KH_{elec}(p)CH_{meca}(p)K_{cap}$$

Pour déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système d'antiblocage de roue, on utilise la relation des systèmes bouclés et l'association de blocs en série, on trouve alors

$$BF(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = K_{adap} \frac{KH_{elec}(p)CH_{meca}(p)}{1 + KH_{elec}(p)CH_{meca}(p)K_{cap}}$$

## 8.2.5 Retour unitaire

### Définition

Un schéma-blocs est à **retour unitaire** si la chaîne de retour ne comporte aucune fonction de transfert, voir figure 8.10.

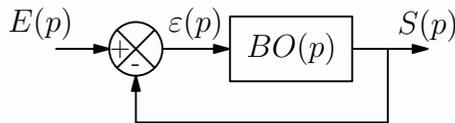


Figure 8.10 Schéma-blocs à retour unitaire

Sur ce type de schéma, la grandeur de consigne est directement comparée à la grandeur de sortie. La fonction de transfert en boucle fermée s'obtient en utilisant la relation des systèmes bouclés

$$BF(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)}$$

Cette relation ne peut être utilisée que pour des systèmes asservis à retour unitaire.

## 8.2.6 Schéma-blocs équivalents

Dans le cas de schéma-blocs complexes, voir figure 8.11, on peut être amené à manipuler la structure du schéma afin de pouvoir utiliser la relation des systèmes bouclés démontrée précédemment pour déterminer la fonction de transfert globale du système.

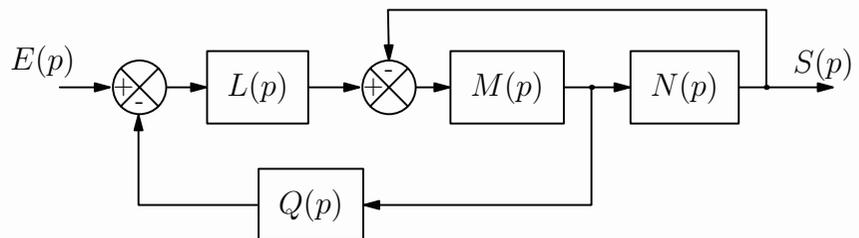
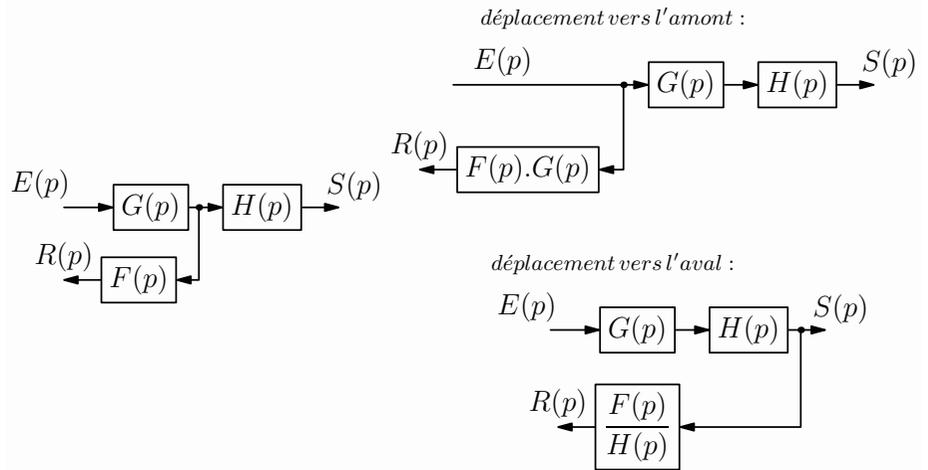


Figure 8.11 Schéma-blocs d'un système complexe

### Déplacement d'un point de prélèvement

Les trois schéma-blocs de la figure 8.12 sont équivalents.



**Figure 8.12 Schéma-blocs équivalents par déplacement du point de prélèvement**

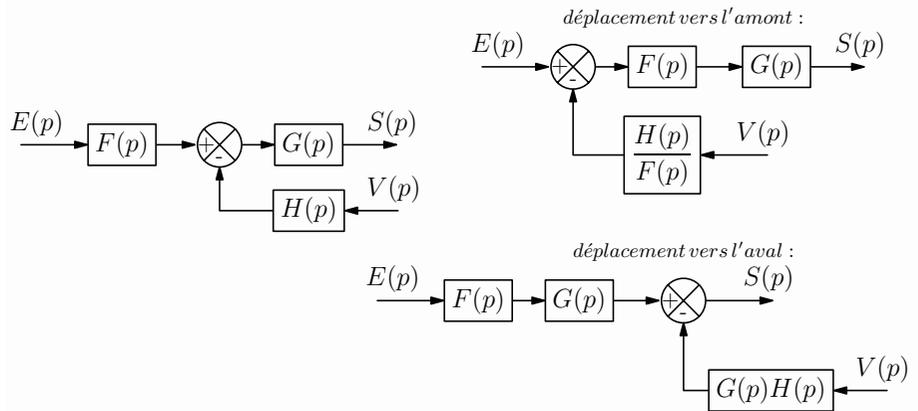
À partir du schéma-blocs de départ, on trouve

$$R(p) = F(p)G(p)E(p) \quad \text{et} \quad S(p) = H(p)G(p)E(p)$$

Résultats que l'on retrouve aisément sur les deux autres schéma-blocs après avoir déplacé le point de prélèvement vers l'amont ou vers l'aval.

### Déplacement d'un comparateur ou d'un sommateur

Les trois schéma-blocs de la figure 8.13 sont équivalents.



**Figure 8.13 Schéma-blocs équivalents par déplacement du sommateur**

En utilisant le schéma-blocs de départ, on écrit

$$S(p) = G(p) (F(p)E(p) - H(p)V(p))$$

À partir du schéma où le comparateur a été déplacé vers l'amont, on écrit

$$S(p) = F(p)G(p) \left( E(p) - \frac{H(p)}{F(p)}V(p) \right)$$

ce qui fournit bien une expression identique à celle déterminée précédemment. La vérification sur le dernier schéma-blocs est immédiate.



Cette manipulation est très utile pour déterminer la fonction de transfert en régulation.

### Exemple

On souhaite déterminer la fonction de transfert définie sur le schéma-blocs de la figure 8.11.

Pour pouvoir appliquer la relation des systèmes bouclés il faut, par exemple, déplacer en aval du bloc  $N(p)$  le point de prélèvement situé en amont de ce même bloc voir figure 8.14(a) ou déplacer en amont de  $N(p)$  le point de prélèvement situé en aval de  $N(p)$ , figure 8.14(b).

On peut également déplacer le comparateur situé en aval de  $L(p)$  vers l'amont et utiliser les propriétés de distributivité des comparateurs pour obtenir la figure 8.14(c). Il reste une dernière possibilité : déplacer le comparateur situé en amont de  $L(p)$  vers l'aval, non représentée ici.

Le calcul de la fonction de transfert  $\frac{S(p)}{E(p)}$  est effectué à partir du schéma-blocs de la figure 8.14(a).

Dans un premier temps on réduit la boucle interne en utilisant la relation des systèmes bouclés, voir figure 8.15.

On a alors un simple schéma bouclé qui permet de trouver

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{L(p) \frac{M(p)N(p)}{1 + M(p)N(p)}}{1 + L(p) \frac{M(p)N(p)Q(p)}{(1 + M(p)N(p))N(p)}}$$

Ou encore après simplification

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{L(p)M(p)N(p)}{1 + M(p)N(p) + L(p)M(p)Q(p)}$$

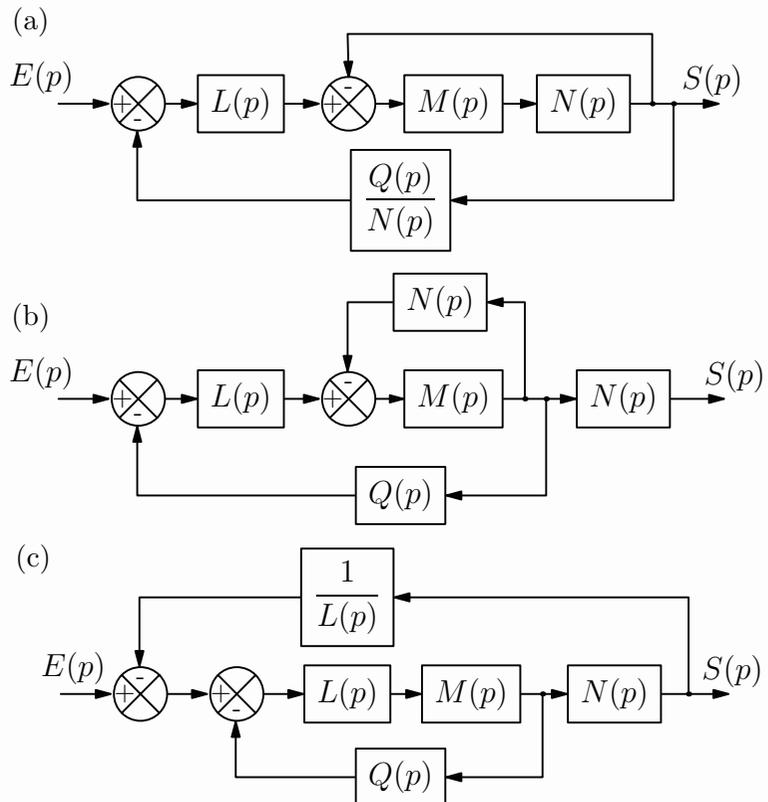


Figure 8.14 Schémas-blocs équivalents au schéma-blocs de la figure 8.11

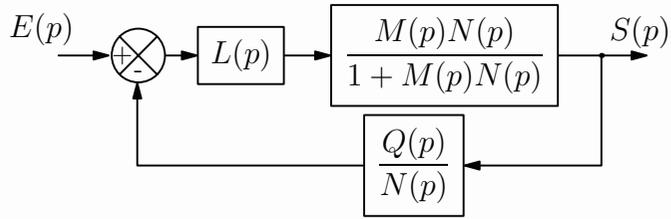


Figure 8.15 Schéma-blocs équivalent au schéma-blocs de la figure 8.14(a)

**Schéma équivalent à retour unitaire**

Pour faciliter certaines études, on peut être amené à mettre un schéma-blocs sous la forme d'un schéma à retour unitaire.

On prend comme schéma-blocs initial celui d'un système asservi, voir figure 8.4, mais sans la perturbation pour simplifier la lecture du schéma-blocs. Comme l'étude d'un système repose souvent sur l'étude de sa sortie, pour transformer le schéma-blocs initial on s'abstient de modifier sa sortie. On déplace le comparateur pour le mettre en amont du bloc  $H_{cap}(p)$  situé sur la chaîne de retour afin d'obtenir le schéma-blocs de la figure 8.16.

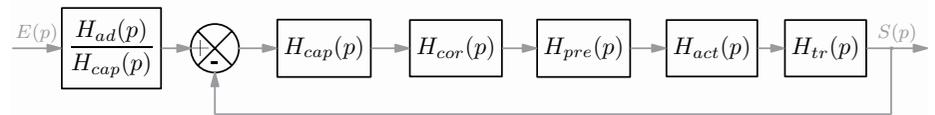


Figure 8.16 Schéma-blocs d'un système asservi non perturbé à retour unitaire

Dans un système asservi, on fait en sorte que la fonction de transfert de l'interface homme-machine soit égale à celle du capteur afin de comparer des grandeurs comparables sur une même échelle. On a donc ici  $H_{ad}(p) = H_{cap}(p)$ .

On a alors le schéma-blocs de la figure 8.17.

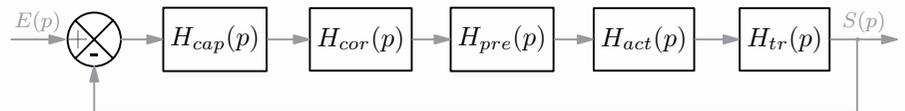


Figure 8.17 Schéma-blocs d'un système asservi à retour unitaire

Sur le schéma de la figure 8.17, on voit que la valeur de consigne, ce que l'on souhaite, est directement comparée à la valeur de sortie, ce que l'on a.

**Exemple : Antiblocage de roue**

En reprenant le schéma-blocs de la figure 8.9, si on fixe

$$K_{cap} = K_{adap} = a$$

alors on peut tracer un schéma-blocs à retour unitaire, voir figure 8.18.

Comme on a un système asservi, on peut alors utiliser la relation

$$BF(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit alors

$$BF(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{aKH_{elec}(p)CH_{meca}(p)}{1 + aKH_{elec}(p)CH_{meca}(p)K_{cap}}$$



Le schéma-blocs à retour unitaire est intéressant pour l'étude de la précision.

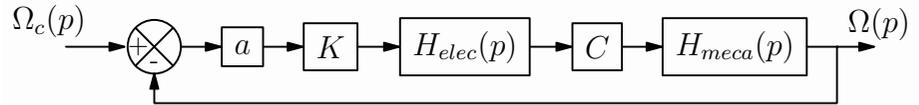


Figure 8.18 Schéma-blocs équivalent à retour unitaire de l'antiblocage de roue

## 8.2.7

## Schéma-blocs avec perturbation

La notion de fonction de transfert en régulation et en poursuite ne peut s'utiliser que pour des systèmes asservis.

Lorsqu'un système asservi est perturbé, on a un schéma-blocs à deux entrées et une sortie, voir figure 8.19. Il faut, dans un premier temps, déterminer les fonctions de transfert en poursuite et en régulation.

Ensuite, comme le système est linéaire, on applique le principe de superposition pour déterminer l'expression de la sortie  $S(p)$  en fonction  $E(p)$  et  $P(p)$ .

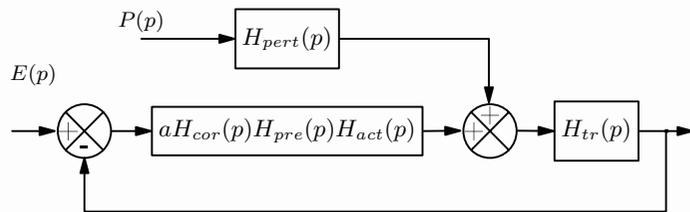


Figure 8.19 Schéma-blocs d'un système perturbé

Pour déterminer la fonction de transfert en poursuite  $\frac{S(p)}{E(p)}$ , on considère la perturbation nulle. On a donc affaire à un schéma bouclé simple. On suppose le signal de consigne nul pour calculer la fonction de transfert en régulation  $\frac{S(p)}{P(p)}$ . Il faut alors retracer le schéma-blocs pour lui donner une forme conventionnelle de schéma bouclé.

Une autre démarche est cependant possible. On déplace le sommateur en amont du schéma-blocs pour obtenir le schéma de la figure 8.20.

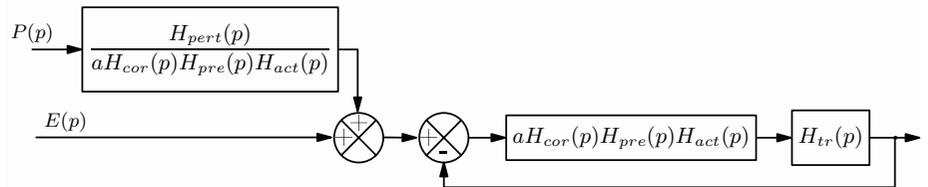


Figure 8.20 Schéma-blocs équivalent d'un système perturbé

On remarque alors que l'annulation de la consigne ou de la perturbation ne modifie pas l'allure de la boucle du schéma. Les calculs à mener pour déterminer les deux fonctions de transfert en poursuite et en régulation sont donc sensiblement identiques.

C'est cette démarche qui est privilégiée par la suite. À partir du schéma de la figure 8.20, en utilisant la relation des systèmes à retour unitaire, on obtient pour la fonction de transfert en poursuite

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{aH_{cor}(p)H_{pre}(p)H_{act}(p)H_{tr}(p)}{1 + aH_{cor}(p)H_{pre}(p)H_{act}(p)H_{tr}(p)}$$

Pour le calcul de la fonction de transfert en régulation, la consigne est nulle. On travaille alors sur un schéma similaire à celui utilisé pour la fonction de transfert en poursuite, simplement il y a un bloc en série avec le schéma bouclé. On trouve alors



Comme la stabilité d'un système ne dépend que des pôles de sa fonction de transfert, on voit que l'introduction d'une perturbation ne modifie en aucun cas la stabilité. La perturbation n'intervient que sur la précision.

$$F(p) = \frac{S(p)}{P(p)} = \frac{H_{pert}(p)}{aH_{cor}(p)H_{pre}(p)H_{act}(p)} \times \frac{aH_{cor}(p)H_{pre}(p)H_{act}(p)H_{tr}(p)}{1 + aH_{cor}(p)H_{pre}(p)H_{act}(p)H_{tr}(p)}$$

Soit

$$F(p) = \frac{S(p)}{P(p)} = \frac{H_{pert}(p)H_{tr}(p)}{1 + aH_{cor}(p)H_{pre}(p)H_{act}(p)H_{tr}(p)}$$

Comme le système est linéaire alors en appliquant le principe de superposition, on a

$$S(p) = H(p)E(p) + F(p)P(p).$$

Ce qu'on peut écrire ici

$$S(p) = \frac{H_{tr}(p)}{1 + aH_{cor}(p)H_{pre}(p)H_{act}(p)H_{tr}(p)} (aH_{cor}(p)H_{pre}(p)H_{act}(p)E(p) + H_{pert}(p)P(p))$$

On peut remarquer que les expressions des fonctions de transfert en poursuite et en régulation ont le même dénominateur.

Quel que soit le schéma-blocs utilisé, on sait maintenant déterminer l'expression de la sortie en fonction des entrées. Donc quel que soit le système d'équations différentielles décrivant le fonctionnement d'un système asservi ou non, on peut déterminer l'expression du signal de réponse si on connaît les signaux d'entrée et de perturbation.

La détermination du signal de sortie sous-entend qu'on a été capable de mettre en équations tous les phénomènes physiques définissant le fonctionnement du système étudié.

## 8.3 Modèle de connaissance – modèle de description

Le **modèle de connaissance** s'établit à partir de l'analyse du système réel, en mettant directement en œuvre les lois de la physique dans divers domaines : électricité, mécanique des solides, des fluides, thermodynamique .... Ce modèle découle essentiellement des hypothèses choisies pour écrire ces lois. Bien évidemment, les hypothèses formulées pour déterminer le modèle de connaissance doivent être validées en confrontant les résultats obtenus avec ce modèle et les résultats expérimentaux.

Les limites de nos connaissances peuvent, pour certaines études, rendre très délicat la mise en œuvre d'un modèle de connaissance. Dans ce cas, on établit un **modèle de description** à partir d'expérimentations faites sur le système réel. On étudie les signaux de sortie du système étudié obtenus en fonction de signaux connus appliqués en entrée de ce système à modéliser. On ne connaît alors que les flux entrant et sortant du système ce qui permet de déterminer des fonctions de transfert décrivant son comportement. Pour établir ce modèle de description, on procède par identification avec des modèles de références qui sont détaillés dans le chapitre suivant.

## Synthèse

### Connaissances

#### Je sais définir les mots ou expressions :

- fonction de transfert ;
- ordre, classe d'une fonction de transfert ou d'un système ;
- pôles et zéros d'une fonction de transfert ;
- fonction de transfert en boucle ouverte ;
- fonction de transfert en boucle fermée ;
- schéma-blocs à retour unitaire ;
- théorème de la valeur finale.

#### Je connais

- les différents théorèmes associés à la transformation de Laplace :
  - pour la dérivation par rapport au temps ;
  - pour les valeurs initiales et finales ;
  - dans le cas d'un retard.

### Savoir-faire

#### Je sais

- déterminer une fonction de transfert à partir d'une équation différentielle ;
- tracer un schéma-blocs ;
- mettre un schéma-blocs sous la forme d'un schéma à retour unitaire ;
- tracer un schéma-blocs équivalent pour avoir des boucles imbriquées ;
- déterminer une fonction de transfert à partir d'un schéma-blocs ;
- trouver les fonctions de transfert en poursuite et en régulation pour un système asservi ;
- déterminer l'expression d'un signal de sortie dans le domaine symbolique ;
- calculer la valeur d'un signal de sortie en régime permanent.

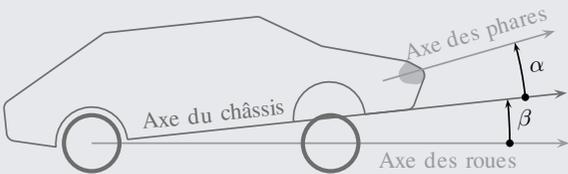
## Exercices d'application

### 8.1 Système de correction d'axe de phares

On s'intéresse à un système, embarqué sur un véhicule, qui corrige automatiquement la direction de l'axe de ses phares.

On s'intéresse lors d'une première approche aux positions relatives de trois droites particulières :

- l'axe des roues, parallèle à la route pour des roues de même diamètre ;
- l'axe du châssis, faisant un angle  $\beta$  par rapport à l'axe des roues ;
- l'axe des phares, dont on peut régler l'angle d'inclinaison  $\alpha$  par rapport à l'axe du châssis.



Positions relatives des axes

Le système de correction doit permettre de maintenir le mieux possible l'angle optimal noté  $\varphi^*$  entre l'axe des phares et l'axe des roues. Il comprend :

- un capteur pour mesurer l'angle  $\alpha$ , de gain  $K_\alpha$ . Il délivre une tension  $e_\alpha$ .
- un capteur pour mesurer l'angle  $\beta$ , de gain  $K_\beta$ . Il délivre une tension  $e_\beta$ .
- un mécanisme pour orienter l'axe des phares par rapport à l'axe du châssis, alimenté par une tension de commande  $u$  et de fonction de transfert  $F(p)$ .
- un système correcteur pour élaborer la tension de commande précédente, de fonction de transfert  $C(p)$ .

1. Dans quelles circonstances ce système de correction est-il sollicité ?

2. Quelle relation lie les angles  $\alpha$  et  $\beta$  ?

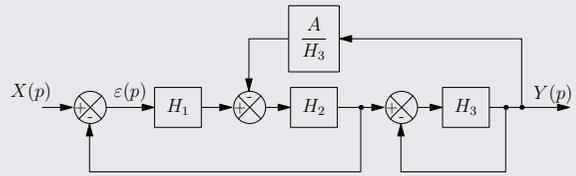
3. Proposer un schéma-blocs décrivant le système asservi permettant de maintenir l'orientation de l'axe des phares par rapport à l'axe des roues.

4. En supposant les gains des capteurs identiques, transformer le schéma-blocs pour le rendre à retour unitaire, puis déterminer sa fonction de transfert en boucle fermée.

### 8.2 Réduction de schéma-blocs 1

Dans le schéma-blocs proposé ci-dessous, la notation des fonctions de transfert a été simplifiée. On note, par exemple  $H_i$  pour  $H_i(p)$ .

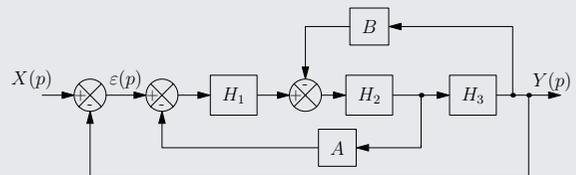
Réduire le schéma-blocs ci-dessous et trouver la fonction de transfert  $\frac{Y(p)}{X(p)}$ .



Premier schéma-blocs à réduire

### 8.3 Réduction de schéma-blocs 2

Réduire le schéma-blocs ci-dessous et trouver la fonction de transfert  $\frac{Y(p)}{X(p)}$ .



Deuxième schéma-blocs à réduire

### 8.4 Réduction de schéma-blocs 3

Soit le schéma-blocs dessiné de la figure ci-dessous. Il modélise un système asservi dont la consigne est  $X(p)$ , la sortie  $Z(p)$  et la perturbation  $Y(p)$ . Les différents paramètres,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $G$  et  $K$  sont des gains.

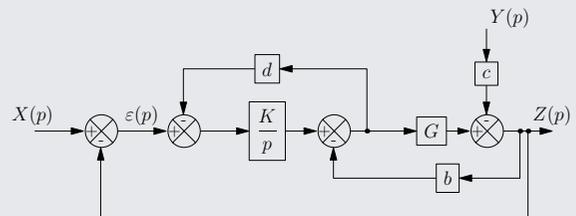


Schéma-blocs avec perturbation

Déterminer les fonctions de transfert en poursuite et en régulation.

### 8.5 Réduction de schéma-blocs 4

On considère le schéma-blocs de la figure ci-dessous d'un système à deux entrées  $X(p)$  et  $U(p)$  et deux sorties  $Y(p)$  et  $W(p)$ .

1. On s'intéresse à la seule influence de l'entrée  $X(p)$  sur la sortie  $Y(p)$ . Déterminer la fonction de transfert :

$$H_x(p) = \left( \frac{Y(p)}{X(p)} \right)_{U(p)=0}$$

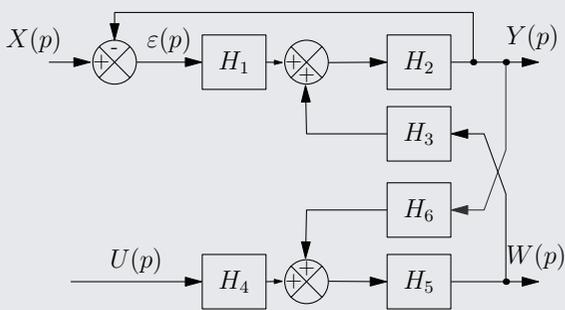


Schéma-blocs à deux entrées

2. On s'intéresse uniquement à l'influence de l'entrée  $U(p)$  sur la sortie  $Y(p)$ . Déterminer la fonction de transfert :

$$H_{U(p)} = \left( \frac{Y(p)}{U(p)} \right)_{X(p)=0}$$

3. Quelle est l'influence simultanée des deux entrées  $X(p)$  et  $U(p)$  sur la sortie  $Y(p)$  ?

### 8.6 Transformée de LAPLACE

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante

$$y''(t) + 10y'(t) + 21y(t) = 21x(t),$$

$$\text{avec } y(0) = y_0 \text{ et } y'(0) = y'_0$$

1. Exprimer cette équation dans le domaine symbolique, à écrire sous la forme

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)} X(p) + \frac{N_0(p)}{D(p)}$$

Que représentent les différents termes  $\frac{N(p)}{D(p)}$ ,  $\frac{N_0(p)}{D(p)} X(p)$

et  $\frac{N_0(p)}{D(p)}$  ?

À la vue de ces expressions et de leurs interprétations, expliquer pourquoi en automatique, on considère presque systématiquement les conditions initiales nulles.

2. Soit une entrée en échelon unitaire. Déterminer les réponses temporelles  $y(t)$  et donner l'allure de ces courbes dans les deux cas suivants :

- $y_0 = 0$  et  $y'_0 = 0$
- $y_0 = 2$  et  $y'_0 = 5$

On rappelle la transformée de LAPLACE suivante

$f(t)$	$F(p)$
$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!} e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$

3. On suppose les conditions initiales nulles et on prend comme entrée

$$x(t) = E \sin(\omega t)$$

On recherche alors une sortie sous la forme

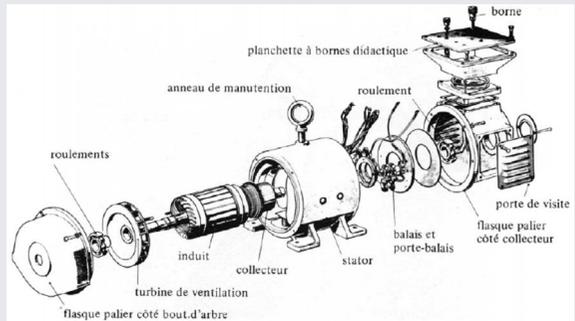
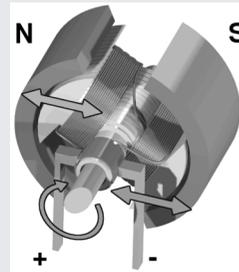
$$y(t) = S \sin(\omega t + \varphi)$$

À quoi correspond cette sortie ?

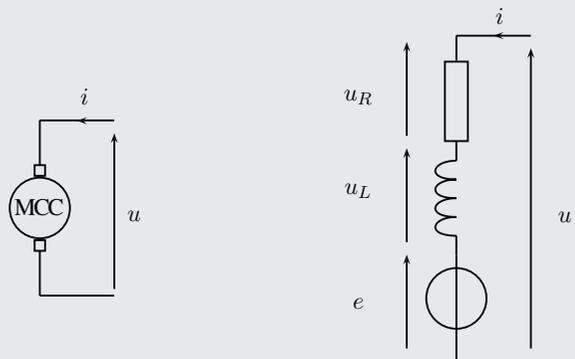
En adoptant les notations complexes  $x(t) = E e^{j\omega t}$  et  $y(t) = S e^{j(\omega t + \varphi)}$ , déterminer à partir de l'équation différentielle le rapport  $\frac{S}{E} e^{j\varphi}$ , puis conclure.

### 8.7 Moteur à Courant Continu

On s'intéresse au fonctionnement d'un moteur à courant continu.



Éclaté d'un Moteur à Courant Continu



Modèle électrique d'un Mcc

Le fonctionnement d'un moteur à courant continu est décrit par le système d'équations suivant :

- Loi d'Ohm :  $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$
- Équation de couplage :  $e(t) = K_v \omega(t)$
- Équation de couplage :  $c_m(t) = K_c i(t)$
- Principe Fondamental de la Dynamique :

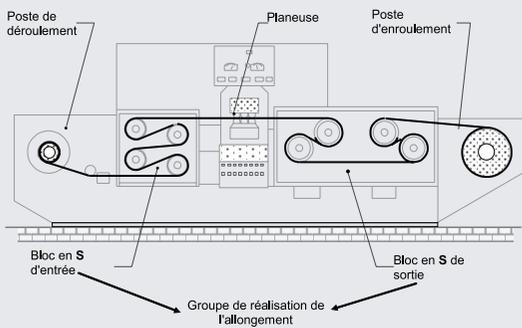
$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t) - f\omega(t)$$

avec :

- $i$  : courant d'induit [A]
- $u$  : tension aux bornes de l'induit [V]
- $e$  : tension contre électromotrice [V]
- $c_m$  : couple moteur [Nm]
- $\omega$  : taux de rotation du moteur [ $\text{rad s}^{-1}$ ]
- $c_r$  : couple résistant [Nm]
- $R$  : résistance totale : induit, balais, collecteur [ $\Omega$ ]
- $L$  : inductance de l'induit [H]
- $J$  : Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation du rotor [ $\text{kg m}^2$ ]
- $K_v$  : constante de vitesse [ $\text{V s rad}^{-1}$ ]
- $K_c$  : constante de couple [ $\text{Nm A}^{-1}$ ]
- $f$  : paramètre de frottement visqueux [ $\text{Nm s rad}^{-1}$ ]

1. Exprimer le système d'équations du moteur à courant continu dans le domaine symbolique.
2. Tracer le schéma-blocs d'un moteur à courant continu commandé en tension.
3. Le schéma-blocs est-il celui d'un système bouclé ? d'un système asservi ?
4. Dédurre de ce schéma l'expression de  $\Omega(p)$  en fonction de  $U(p)$  et  $C_r(p)$ .
5. Déterminer l'expression du taux de rotation en régime permanent si l'entrée de consigne est un échelon d'amplitude  $U_0$  et si la perturbation est supposée nulle.
6. Que devient cette vitesse en régime permanent si on prend en compte une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0}$  ?

### 8.8 Planeuse



Principe de fonctionnement d'une planeuse

Une planeuse permet l'allongement réglable de bandes d'acier. La bande est déroulée à partir du poste de déroulement. La vitesse de déroulement  $V_e$  est imposée par le bloc d'entrée. La vitesse imposée par le bloc de sortie  $V_s$  est supérieure à  $V_e$ . Il y a donc allongement de la bande entre ces deux postes. La bande allongée est bobinée au poste d'enroulement.

L'allongement obtenu augmente le domaine de comportement élastique du matériau utilisé.

La planeuse étudiée utilise principalement deux moteurs :

- le moteur 1 pour générer le mouvement de la bande ;
  - le moteur 2 pour maîtriser l'allongement de la bande.
- Les fonctionnements de ces deux moteurs sont donc liés. En effet, la variation de la tension de commande,  $u_1$ , du moteur 1 modifie sa vitesse de rotation,  $\omega_1$ , et cette variation de vitesse perturbe la vitesse de rotation,  $\omega_2$ , du moteur 2 et réciproquement. On a alors un système modélisable par le schéma-blocs de la figure ci-dessous.

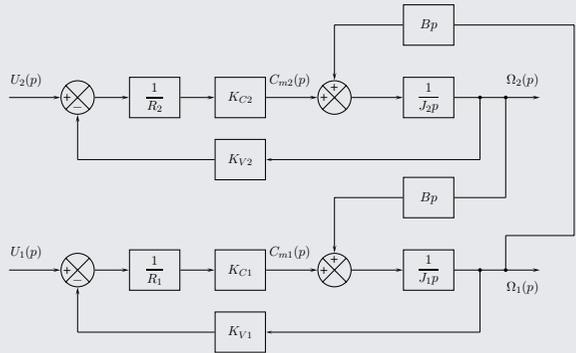


Schéma-blocs de la planeuse

avec :

- $R_1$  et  $R_2$  : résistance en  $\Omega$
  - $K_{C1}$  et  $K_{C2}$  : constante de couple en  $\text{Nm A}^{-1}$
  - $K_{V1}$  et  $K_{V2}$  : constante de vitesse en  $\text{V s rad}^{-1}$
  - $J_1$  et  $J_2$  : moment d'inertie en  $\text{kg m}^2$
- Afin d'alléger les notations, on note

$$K_1 = K_{C1} = K_{V1}$$

$$K_2 = K_{C2} = K_{V2}$$

1. Déterminer l'unité du gain  $B$ .
2. Déterminer les fonctions de transfert  $H_{11}(p)$  et  $H_{12}(p)$  telles que

$$\Omega_1(p) = H_{11}(p)U_1(p) + H_{12}(p)U_2(p)$$

On peut trouver de la même manière des fonctions de transfert  $H_{21}(p)$  et  $H_{22}(p)$  telles que

$$\Omega_2(p) = H_{21}(p)U_1(p) + H_{22}(p)U_2(p)$$

Chaque moteur est asservi en vitesse avec une génératrice tachymétrique chargée de mesurer sa vitesse de rotation. La tension de commande de chaque moteur est élaborée par un correcteur à partir de l'écart entre l'image de la consigne de vitesse et l'image de la vitesse de rotation. On note :  $GT_1(p)$ ,  $GT_2(p)$ ,  $C_1(p)$  et  $C_2(p)$  les fonctions de transfert respectivement des génératrices tachymétriques et des correcteurs des moteurs 1 et 2. Les génératrices tachymétriques sont assimilées à des gains purs tels que :  $GT_1(p) = G_1$  et  $GT_2(p) = G_2$ .

Les correcteurs utilisés sont des correcteurs proportionnels de gain respectif :  $C_1$  et  $C_2$ .

3. Tracer le schéma-blocs décrivant l'asservissement des moteurs 1 et 2 en faisant apparaître notamment  $H_{11}(p)$ ,  $H_{12}(p)$ ,  $H_{21}(p)$  et  $H_{22}(p)$ .

4. Déterminer l'expression de  $\Omega_1(p)$  en fonction de  $\Omega_{1C}(p)$ , la vitesse de consigne du moteur 1, et de  $U_2(p)$ .

## Exercices d'approfondissement

### 8.9 Train pendulaire

La description du principe du train pendulaire est faite page 205.

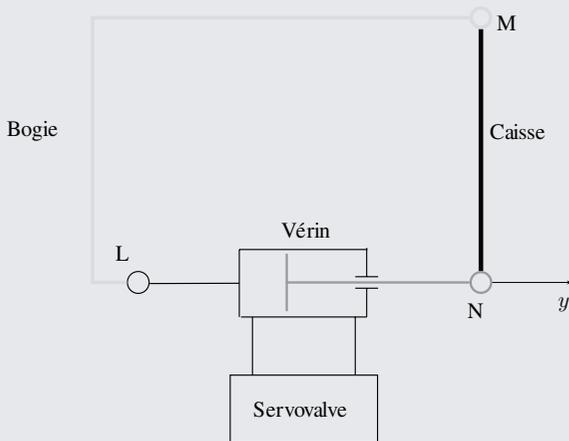


Schéma de principe de la pendulation

Le comportement du vérin est modélisé par

$$q(t) = S \frac{dy(t)}{dt} + \frac{V_0}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad (1)$$

avec

- $q$  : débit [ $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ]
- $y$  : position de la tige du vérin [m]
- $\sigma$  : pression du fluide [Pa]
- $S$  : section du piston [ $\text{m}^2$ ]

•  $V_0$  : volume du vérin [ $\text{m}^3$ ]

•  $B$  : module de compressibilité du fluide [Pa]

Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la caisse fournit l'équation suivante

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = RF(t) - C\theta(t) \quad (2)$$

avec

- $\theta$  : position angulaire de la caisse [rad]
- $F$  : action mécanique appliquée par le vérin sur la caisse [N]
- $J$  : moment d'inertie de la caisse par rapport à l'axe  $(M, \vec{x})$  [ $\text{kg m}^2$ ]
- $C$  : raideur [ $\text{Nm rad}^{-1}$ ]
- $R$  : distance  $MN$  [m]

Si on suppose la pression  $\sigma$  uniforme dans les chambres du vérin alors on a

$$F(t) = S\sigma(t) \quad (3)$$

*Hypothèse :*

On se place dans le cadre des petits déplacements, on a alors

$$y(t) = R\theta(t) \quad (4)$$

1. Écrire les quatre équations proposées dans le domaine symbolique.

Afin de simplifier l'écriture, on pose

$$k = \frac{C}{R^2} \quad \text{et} \quad M = \frac{J}{R^2}$$

2. Compléter le schéma-blocs proposé figure ci-dessous.

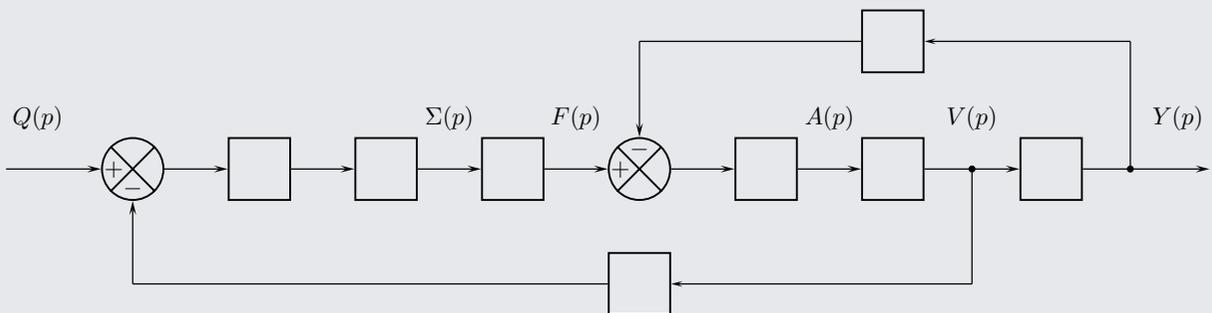
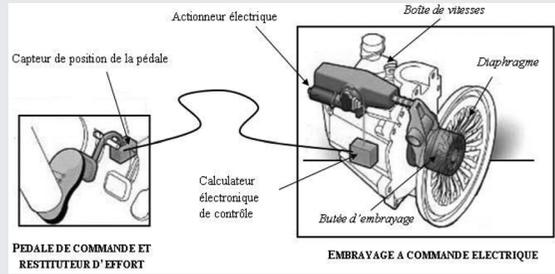


Schéma-blocs à compléter

- Déterminer la fonction de transfert  $\frac{Y(p)}{Q(p)}$ . Donner sa classe et ses pôles.
- Montrer qu'en régime permanent, pour une entrée  $q$  bornée, le signal  $y$  n'est pas borné. Conclure sur la stabilité.

### 8.10 Restituteur d'effort

Le restituteur d'effort étudié a pour objectif de créer une sensation d'effort pour le conducteur au niveau de la pédale d'embrayage alors que la commande d'embrayage est électrique. L'asservissement consiste à réguler la différence entre l'effort appliqué, et donc ressenti, par le conducteur sur la pédale,  $f_p$ , et l'effort appliqué sur la butée d'embrayage,  $f_e$ .



D'après document VALÉO

Afin d'être dans le domaine linéaire, l'étude est faite autour d'un point de fonctionnement. Le processus peut être modélisé par le schéma-blocs de la figure ci-dessous.

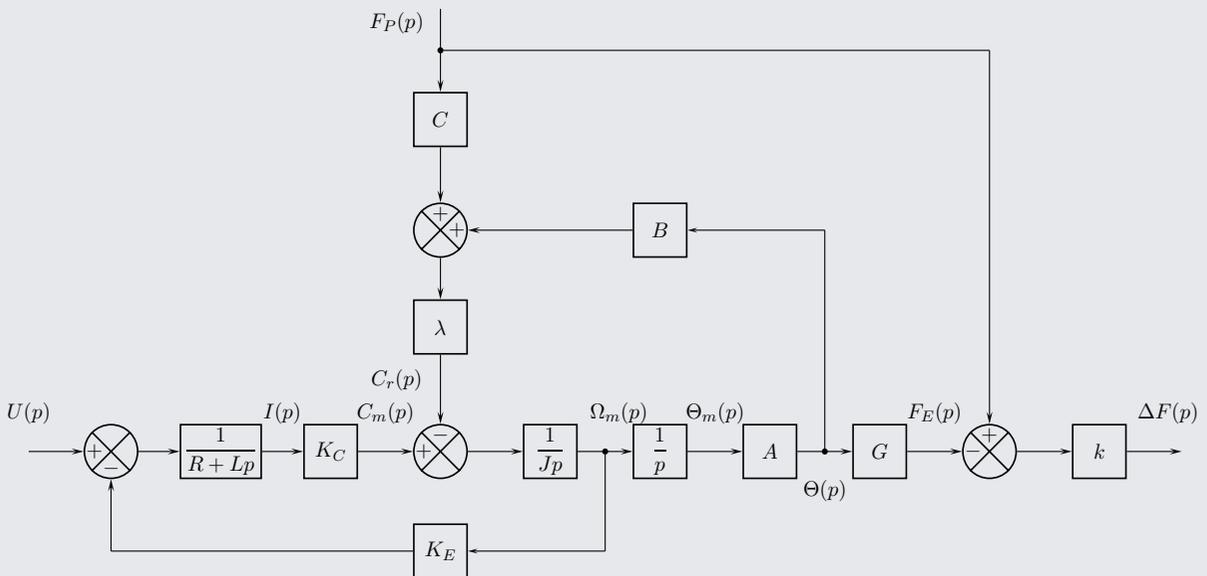


Schéma-blocs du restituteur

- Quelles sont les unités des gains  $A$ ,  $B$  et  $C$  si  $\lambda$  représente le pas d'une vis en  $\text{m rad}^{-1}$ ?
- Déterminer  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  tel que  $\Delta F(p) = H_1(p)U(p) + H_2(p)F_p(p)$ .
- Le processus précédent est asservi : quelle est la grandeur contrôlée ?

### 8.11 Bras maître à retour d'effort

Un système à retour d'effort est un périphérique informatique particulier, utilisé par des entreprises souhaitant effectuer en phase de conception des manipulations sans faire appel à des prototypes physiques. Il permet à son utilisateur d'interagir avec un environnement virtuel par l'intermédiaire du sens du toucher. Il se compose d'une structure mécanique articulée, le **bras maître**, équipée de moteurs et de capteurs, reliés à une électronique embarquée.

L'utilisateur prend en main la poignée située à l'extrémité de la structure et peut la déplacer librement, provoquant ainsi le déplacement de l'image dans la scène virtuelle tridimensionnelle qu'il visualise à l'aide d'un masque. Le bras à retour d'effort lui restitue les actions mécaniques qu'il ressentirait lors de la manipulation réelle.

Toutes les notations sont définies dans le tableau de la page 235.

L'étude se limite à l'axe numérique associé à la rotation du socle par rapport au bâti autour de l'axe vertical. Le socle supporte l'ensemble du bras.

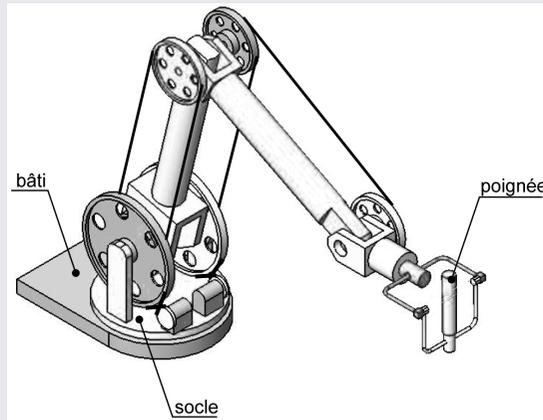


Figure 1 Schéma d'un bras maître à retour d'effort de la société HAPTION

**Étude de l'axe du bras maître**

La consigne de couple  $C_c$  est élaborée par une interface de couplage. La description des chaînes d'énergie et d'information (figure 2), ainsi que le modèle continu de l'axe (figure 3) font apparaître un asservissement de courant, appelé « boucle de courant », ayant comme entrée la consigne de courant  $i_c$  et comme sortie le courant  $i$  absorbé par le moteur.

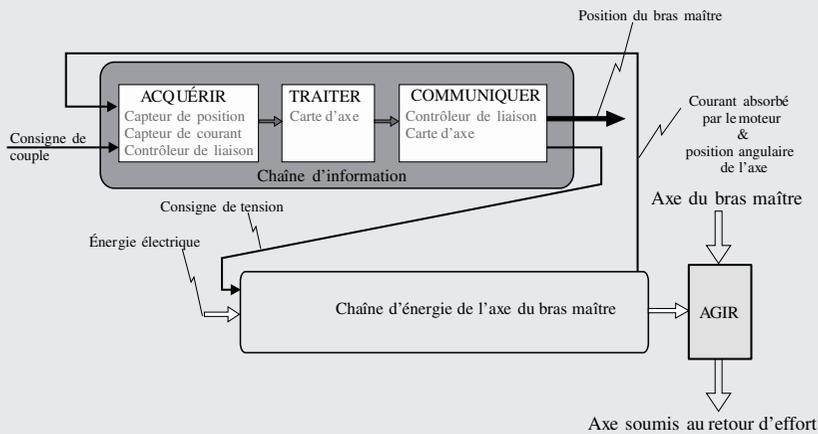


Figure 2 Chaîne d'information de l'axe du bras maître

On donne les équations de fonctionnement du moteur à courant continu

$$v_s(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (1) ; \quad e(t) = K\omega_m(t) \quad (2)$$

$$c_{m1}(t) + c_{op}(t) - f\omega_m(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} \quad (3) ; \quad c_{m1}(t) = Ki(t) \quad (4)$$

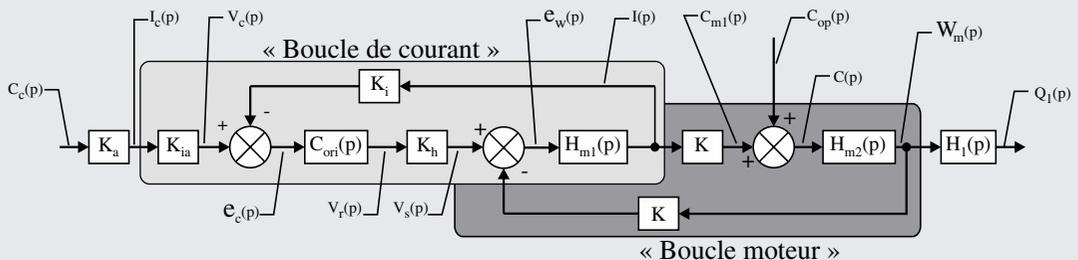


Figure 3 Modèle continu n°1 - « Axe du bras maître »

1. Expliquer en quoi cet asservissement de courant est équivalent à un asservissement de couple.
2. Trouver les expressions des fonctions de transfert  $H_{m1}(p)$  et  $H_{m2}(p)$ .
3. Quelle valeur doit-on donner au gain d'adaptation  $K_a$  ?
4. Déterminer les fonctions de transfert  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$  telles que  $Q_1(p) = G_1(p)C_{op}(p) + G_2(p)C_c(p)$ .  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$  sont à exprimer en fonction de  $H_{m1}(p)$ ,  $H_{m2}(p)$ ,  $C_{ori}(p)$ ,  $H_1(p)$ ,  $K$ ,  $K_i$  et  $K_h$ .

**Étude de l'ensemble bras maître – système virtuel**

Le schéma-blocs de la figure 4 est le modèle d'étude obtenu à partir de l'étude précédente en substituant globalement les transmittances  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$  à la « boucle de courant » et à la « boucle moteur ».

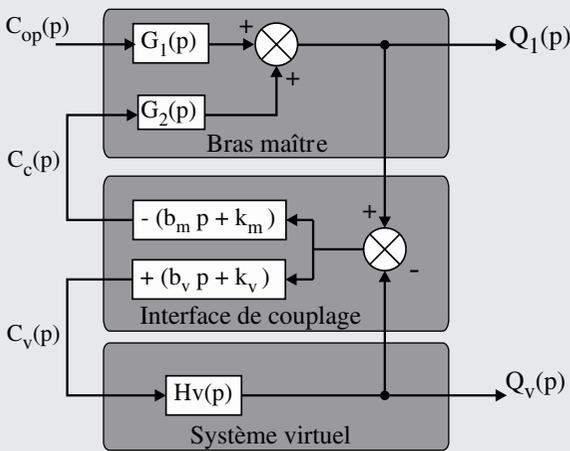


Figure 4 Modèle continu n°2 – « Bras maître, Interface de couplage et Système virtuel »

L'interface de couplage permet au système virtuel de reproduire les mouvements du bras maître et de lui transmettre en retour une image des résistances mécaniques virtuelles rencontrées.

Cette interface est caractérisée à ce niveau de description par les deux fonctions de transfert de couplage

$$\frac{C_c(p)}{\Delta Q(p)} = -(b_m p + k_m) \quad ; \quad \frac{C_v(p)}{\Delta Q(p)} = +(b_v p + k_v)$$

$$\text{où } \Delta Q(p) = Q_1(p) - Q_v(p)$$

Les paramètres  $b_m, b_v, k_m, k_v$  constituent les **paramètres de réglage** de l'interface. Ils sont déterminés pour satisfaire trois critères : la stabilité, la raideur et la bande passante. On ne traite ici que le critère relatif à la raideur.

**Critère de raideur** La raideur d'un système mécanique caractérise l'ampleur de ses déformations sous l'effet des efforts qui lui sont appliqués. Par extension, on définit la raideur de l'axe étudié sur le bras maître par

$$c_{op}(t) = r q_v(t)$$

avec  $r$  la raideur en  $\text{Nm rad}^{-1}$ ,  $c_{op}$  en  $\text{Nm}$  et  $q_v$  en  $\text{rad}$ .

Pour ce critère de raideur, on veut que l'opérateur ressente les arrêts de fin de course générés par le logiciel comme des butées mécaniques réelles. Pour cela, on souhaite une raideur supérieure à  $20 \text{ Nm rad}^{-1}$ .

On considère que :

- la structure mécanique du bras maître est infiniment rigide ;
- la stabilité est acquise ;
- l'opérateur délivre une consigne de couple  $c_{op}$  en échelon unitaire ;
- $b_v, b_m, k_v, k_m$  sont des constantes non nuls.

On admet pour cette étude que le comportement de l'axe du système virtuel est modélisé par la fonction de transfert  $H_v(p)$ , voir figure 4.

5. Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{Q_v(p)}{C_{op}(p)}$  en fonction de  $G_1, G_2, H_v, b_v, b_m, k_v, k_m$  et de la variable  $p$ .

Des calculs ont permis de déterminer les expressions de  $G_1(p), G_2(p)$  et  $H_v(p)$ .

$$G_1(p) = \frac{18}{p(1 + 1,8 \cdot 10^{-3} p + 1,2 \cdot 10^{-6} p^2)}$$

$$G_2(p) = \frac{18}{p(1 + 4 \cdot 10^{-4} p)}$$

$$H_v(p) = \frac{4}{1 + 3 \cdot 10^{-3} p + 2 \cdot 10^{-6} p^2}$$

6. Déterminer, en régime permanent, l'expression de la position articulaire virtuelle notée  $Q_\infty$  suite à la consigne imposée par l'opérateur. En déduire l'expression de la raideur  $r$  de la chaîne présentant  $C_{op}(p)$  en entrée et  $Q_v(p)$  en sortie.

7. Conclure sur la relation existant entre  $k_v$  et  $k_m$  permettant de vérifier le critère de raideur.

Tableau des variables utilisées

$R$	Résistance totale d'induit [ $\Omega$ ]	
$L$	Inductance totale d'induit [H]	
$K$	Constante contre électromotrice [ $V \text{ s rad}^{-1}$ ] ou de couple du moteur [ $Nm \text{ A}^{-1}$ ]	$K = 7 \cdot 10^{-2} \text{ USI}$
$K_i$	Gain du capteur de courant	$K_i = 0,2 \text{ V A}^{-1}$
$K_{ia}$	Gain d'adaptation réglé égal à $K_i$	$K_{ia} = 0,2 \text{ V A}^{-1}$
$K_h$	Gain de l'amplificateur de puissance	$K_h = 6$
$e(t)$	Tension contre-électromotrice [V]	
$K_a$	Gain d'adaptation couple-courant	
$b_m$	Coefficient de frottement visqueux de la liaison système virtuel/maître [ $Nm \text{ s rad}^{-1}$ ]	
$k_m$	Coefficient de raideur de la liaison système virtuel/maître [ $Nm \text{ rad}^{-1}$ ]	
$b_v$	Coefficient de frottement visqueux de la liaison maître/système virtuel [ $Nm \text{ s rad}^{-1}$ ]	
$k_v$	Coefficient de raideur de la liaison maître/système virtuel [ $Nm \text{ rad}^{-1}$ ]	
$J$	Moment d'inertie équivalent ramené sur l'arbre moteur [ $kg \text{ m}^2$ ]	
$f$	Coefficient de frottement visqueux produisant un couple résistant proportionnel à la vitesse [ $Nm \text{ s rad}^{-1}$ ]	
$H_v(p)$	FT de l'esclave virtuel	
$I(p)$	Courant absorbé par le moteur [A]	
$V_s(p)$	Tension de sortie de l'amplificateur de puissance [V]	
$C_{m1}(p)$	Couple délivré par le moteur sur l'arbre d'entrée du réducteur à cabestan [Nm]	
$C_{op}(p)$	Couple résultant de l'action de l'opérateur ramené sur l'arbre moteur [Nm]	
$\Omega_m(p)$	Vitesse angulaire de rotation du moteur [ $rad \text{ s}^{-1}$ ]	
$I_c(p)$	Consigne de courant [A]	
$V_c(p)$	Tension, image de $I_c(p)$ [V]	
$\varepsilon_i(p)$	Écart de « courant » [V]	
$V_r(p)$	Tension de référence de l'amplificateur de puissance [V]	
$\varepsilon_\omega(p)$	Écart de « vitesse » [V]	
$C_{ori}(p)$	FT du correcteur de courant	
$H_{m1}(p)$	FT n°1 du moteur	$H_{m1}(p) = \frac{I(p)}{\varepsilon_\omega(p)}$
$H_{m2}(p)$	FT n°2 du moteur	$H_{m2}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C(p)}$
$H_1(p)$	FT du réducteur à cabestan de rapport de réduction $r_{01}$	$H_1(p) = \frac{r_{01}}{p}$
$C(p)$	Couple sur l'arbre moteur [Nm]	
$C_c(p)$	Consigne de couple articulaire [Nm]	
$Q_1(p)$	Position angulaire du socle par rapport au bâti [rad]	
$C_v(p)$	Couple articulaire virtuel [Nm]	
$Q_v(p)$	Position articulaire virtuelle [rad]	

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 8.1

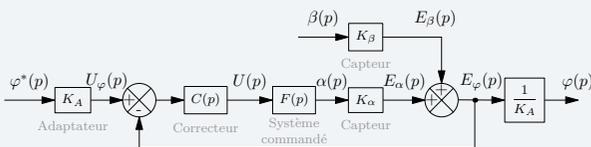
1. Ce système de correction va être sollicité en cas d'accélération et de freinage, tout en tenant compte du chargement du véhicule.
2. Une simple composition des mouvements permet d'écrire, suite à la lecture de l'énoncé

$$\alpha + \beta = \varphi$$

Cet angle  $\varphi$  correspond à l'angle orientant l'axe des phares par rapport à l'axe des roues.

3. L'angle  $\varphi^*$  est dans les faits la consigne pour le système qui modifie l'angle  $\alpha$  en fonction des variations aléatoires de l'angle  $\beta$ . Ce dernier angle est à considérer comme une perturbation.

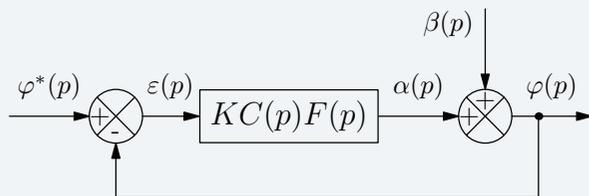
On ajoute un bloc adaptateur pour proposer comme schéma-blocs



Comme  $\varphi = \alpha + \beta$ , la tension  $e_\varphi$  est la somme des tensions  $e_\alpha$  et  $e_\beta$ . L'écart s'obtient en comparant la tension  $u_\varphi$ , image de la consigne  $\varphi^*$ , à  $e_\varphi$ . À partir de cet écart le correcteur élabore la tension de commande  $u$  de l'actionneur. Pour avoir en sortie la même grandeur qu'en entrée, il faut transformer la tension  $e_\varphi$  en un angle  $\varphi$ . Cette transformation doit être similaire à celle effectuée pour adapter la consigne  $\varphi^*$  en tension  $u_\varphi$ .

4. On suppose les gains statiques  $K_\alpha$ ,  $K_\beta$  et  $K_A$  identiques. On les note  $K$ .

On aboutit alors au schéma-blocs à retour unitaire suivant



On a un système asservi à deux entrées pour une sortie. Pour déterminer l'expression de  $\varphi(p)$ , on détermine la fonction de transfert en poursuite  $\frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)}$  et la fonction de transfert en régulation  $\frac{\varphi(p)}{\beta(p)}$ .

Pour la fonction de transfert en poursuite on suppose l'entrée de perturbation nulle. En utilisant la relation des systèmes bouclés pour un système à retour unitaire, on trouve

$$\frac{\varphi(p)}{\varphi^*(p)} = \frac{KC(p)F(p)}{1 + KC(p)F(p)}$$

Pour la fonction de transfert en régulation, on suppose la consigne nulle. On n'a alors qu'une fonction de transfert sur la boucle de retour on obtient donc

$$\frac{\varphi(p)}{\beta(p)} = \frac{1}{1 + KC(p)F(p)}$$

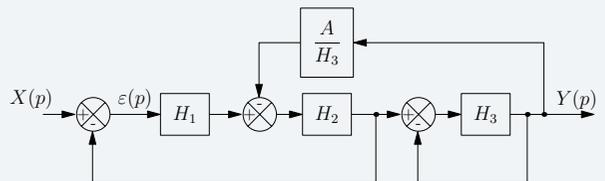
Comme le système est supposé linéaire, on utilise le principe de superposition pour trouver l'expression de la sortie  $\varphi(p)$

$$\varphi(p) = \frac{KC(p)F(p)}{1 + KC(p)F(p)} \varphi^*(p) + \frac{1}{1 + KC(p)F(p)} \beta(p)$$

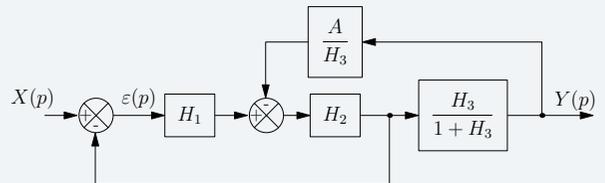
### 8.2

On propose ci-dessous un exemple de résolution à partir de transformations du schéma-blocs :

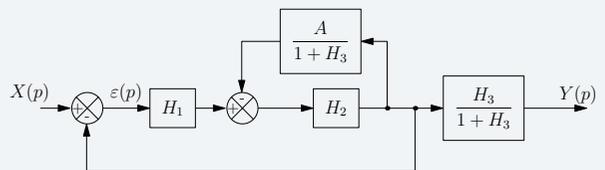
- déplacement du point de prélèvement de la boucle supérieure à droite du bloc  $H_3$



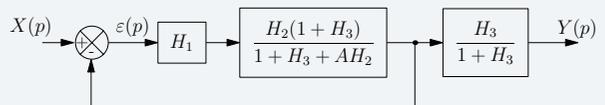
- réduction de la boucle interne, en utilisant la relation des schémas bouclés



- déplacement du point de prélèvement de la boucle supérieure vers la gauche en amont du bloc  $\frac{H_3}{1+H_3}$



- réduction de la boucle interne, en utilisant la relation des schémas bouclés

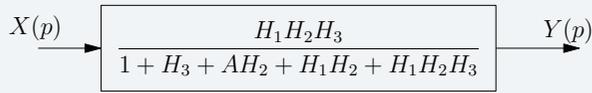


- réduction finale

On obtient en utilisant la relation des schémas bouclés

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\frac{H_1 H_2 (1 + H_3)}{1 + H_3 + A H_2}}{1 + \frac{H_1 H_2 (1 + H_3)}{1 + H_3 + A H_2}} \times \frac{H_3}{1 + H_3}$$

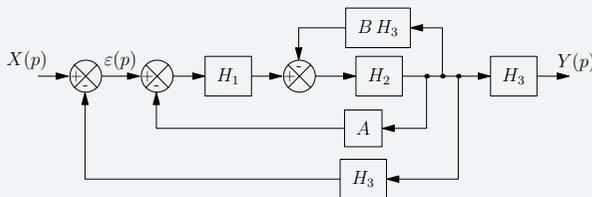
Après simplification, on trouve finalement



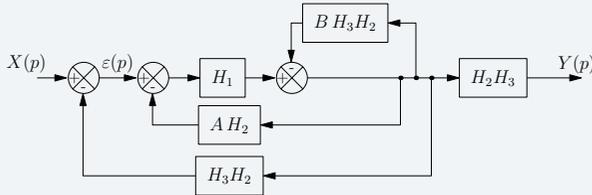
### 8.3

On se propose pour résoudre cet exercice de sortir toutes les fonctions de transfert de l'intérieur des boucles sur la chaîne directe :

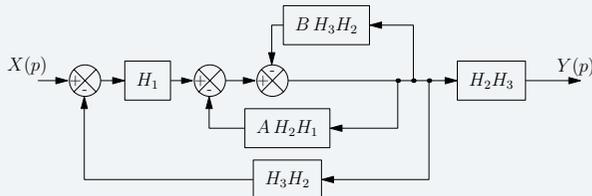
- sortir la fonction  $H_3$  de la boucle



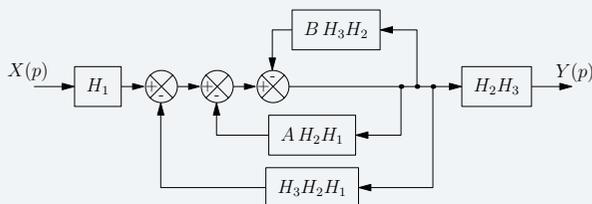
- sortir la fonction  $H_2$  des boucles



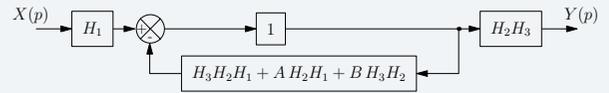
- sortir la fonction  $H_1$  des boucles...



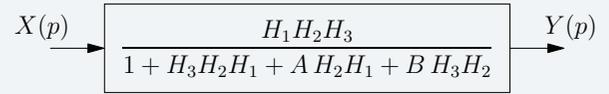
... en deux étapes



On est en présence de trois boucles imbriquées qui prélèvent au même point et dont les sommateurs sont juxtaposés, c'est à dire non séparés par des fonctions de transfert : elles se réduisent à une seule boucle avec la somme des opérateurs des boucles dans le retour.



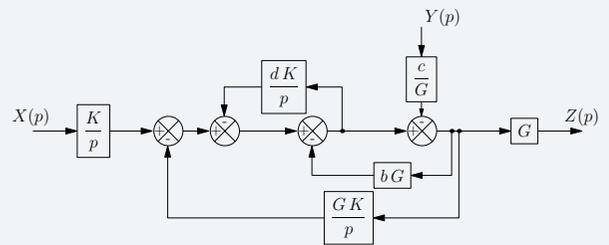
On obtient l'expression finale



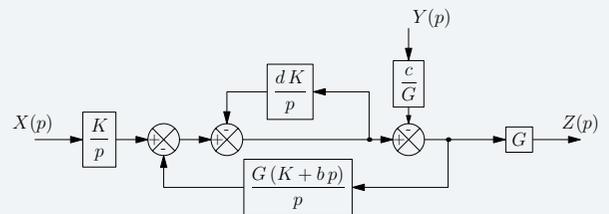
### 8.4

Pour déterminer les deux fonctions de transfert recherchées, il faut d'abord tracer un schéma-blocs équivalent avec des boucles imbriquées. Exemple de réduction du schéma-blocs :

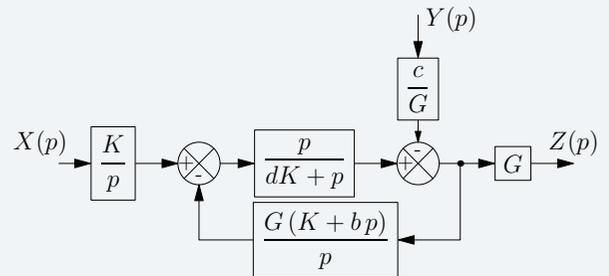
- sortir les deux blocs placés entre les sommateurs pour pouvoir les permuter afin de rassembler les deux boucles inférieures



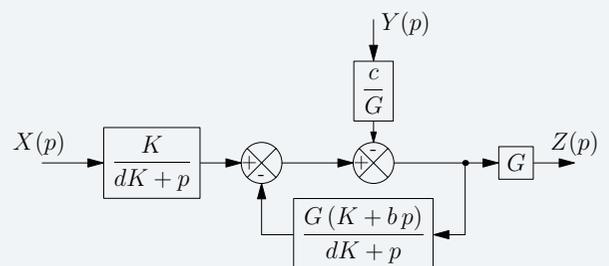
- permuter les soustracteurs et rassembler les deux boucles inférieures en une seule



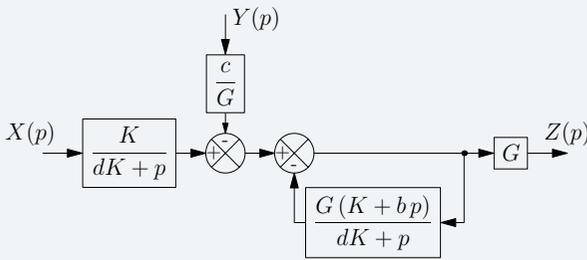
- réduire la boucle intérieure



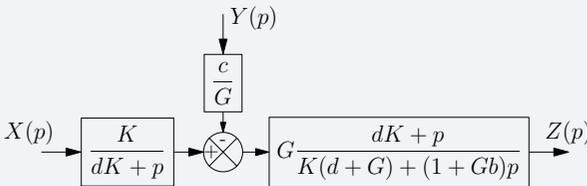
- sortir la fonction de transfert placée entre des sommateurs pour pouvoir les permuter...



... en deux étapes



• réduire la dernière boucle



Apparaissent alors les deux fonctions de transfert recherchées :

• la fonction de transfert en poursuite  $H_x(p)$  en considérant l'entrée  $Y(p)$  nulle

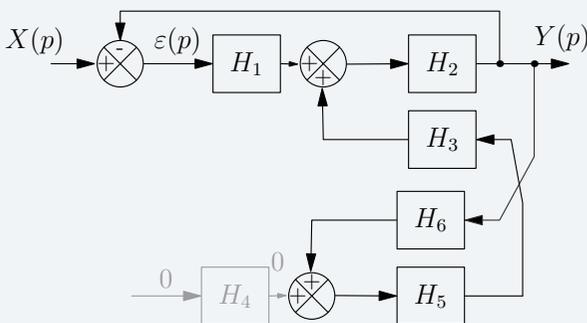
$$H_x(p) = \left( \frac{Z(p)}{X(p)} \right)_{Y(p)=0} = \frac{KG}{K(d+G) + (1+Gb)p}$$

• la fonction de transfert en régulation  $H_y(p)$  en considérant l'entrée  $X(p)$  nulle

$$H_y(p) = \left( \frac{Z(p)}{Y(p)} \right)_{X(p)=0} = c \frac{dK+p}{K(d+G) + (1+Gb)p}$$

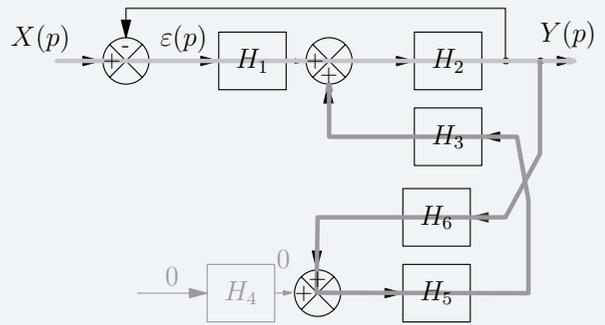
## 8.5

1. On s'intéresse à l'influence de l'entrée  $X(p)$  sur la sortie  $Y(p)$  en l'absence de  $U(p)$  ; on pose donc  $U(p) = 0$  sur le schéma-blocs. La grandeur qui sort du bloc  $H_6$  est alors celle qui entre dans le bloc  $H_5$ .

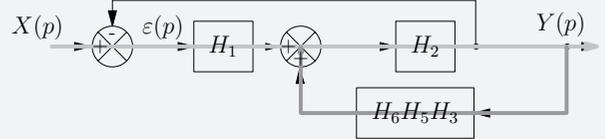


Il est intéressant de suivre les différents chemins possibles pour comprendre le schéma :

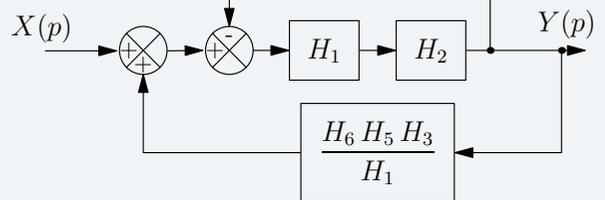
- le chemin direct de  $X(p)$  à  $Y(p)$ , via le soustracteur, le bloc  $H_1$ , le sommateur et le bloc  $H_2$  ;
- le retour unitaire de la sortie  $Y(p)$  au soustracteur ;
- le retour de la sortie  $Y(p)$  au sommateur, via les blocs  $H_6$ ,  $H_5$  et  $H_3$ .



Comprendre le troisième chemin permet de « détordre » le schéma-blocs initial et de proposer un schéma-blocs équivalent.



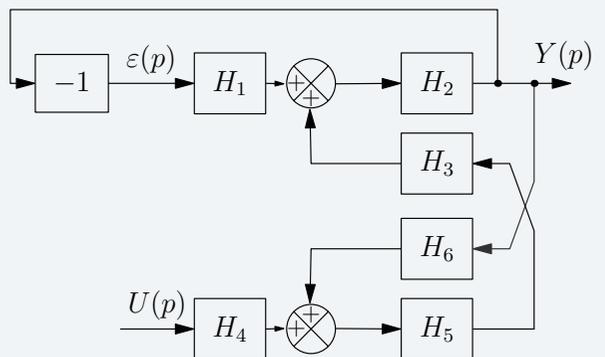
Pour pouvoir réaliser les calculs des fonctions de transfert demandées, il faut déplacer un des deux comparateurs pour avoir deux boucles imbriquées comme par exemple sur le schéma-blocs suivant.



Il reste à réduire les deux boucles imbriquées

$$H_x(p) = \left( \frac{Y(p)}{X(p)} \right)_{U(p)=0} = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 - H_2 H_3 H_5 H_6}$$

2. On s'intéresse à l'influence de l'entrée  $U(p)$  sur la sortie  $Y(p)$  en l'absence de  $X(p)$  ; on pose donc  $X(p) = 0$  sur le schéma-blocs. L'entrée nulle  $X(p) = 0$  entraîne  $\varepsilon(p) = -Y(p)$  ; on peut donc mettre un bloc de gain  $-1$  à la place du soustracteur, avec comme entrée  $Y(p)$ . Le schéma-blocs devient alors



En suivant les différents chemins, on constate comme précédemment qu'il ne reste que deux boucles concentriques à réduire

$$H_u(p) = \left( \frac{Y(p)}{U(p)} \right)_{X(p)=0} = \frac{H_2 H_3 H_4 H_5}{1 + H_1 H_2 - H_2 H_3 H_5 H_6}$$

3. Si on s'intéresse à l'influence simultanée de  $X(p)$  et de  $U(p)$  sur  $Y(p)$ , la linéarité des systèmes étudiés permet de dire que la sortie  $Y(p)$  se met sous la forme

$$Y(p) = H_x(p)X(p) + H_u(p)U(p)$$

**Remarque :** Il est évidemment toujours possible de résoudre algébriquement, en « lisant » le schéma-blocs. On obtient une équation linéaire en  $Y(p)$ ,  $X(p)$  et  $U(p)$  dont on extrait  $Y(p)$

$$Y(p) = H_2 (H_1 [X(p) - Y(p)] + H_3 [H_5 \{H_4 U(p) + H_6(p)Y(p)\}])$$

On factorise les entrées et la sortie...

$$(1 + H_1 H_2 - H_2 H_3 H_5 H_6) Y(p) = (H_1 H_2) X + (H_2 H_3 H_4 H_5) U(p)$$

... pour retrouver le résultat précédent

$$Y(p) = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 - H_2 H_3 H_5 H_6} X(p) + \frac{H_2 H_3 H_4 H_5}{1 + H_1 H_2 - H_2 H_3 H_5 H_6} U(p)$$

## 8.6

1. Les différentes transformées de LAPLACE sont :

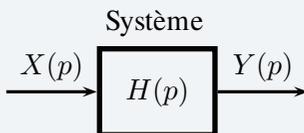
$$\begin{aligned} x(t) &\mapsto X(p) \\ y(t) &\mapsto Y(p) \\ y(t) &\mapsto pY(p) - y_0 \\ y''(t) &\mapsto p(pY(p) - y_0) - y_0' \end{aligned}$$

On obtient alors, après arrangement

$$Y(p) = \underbrace{\frac{21}{p^2 + 10p + 21}}_{Y_1(p)} X(p) + \underbrace{\frac{py_0 + y_0' + 10y_0}{p^2 + 10p + 21}}_{Y_2(p)}$$

La fonction  $Y(p)$  est la somme de deux fonctions  $Y_1(p)$  et  $Y_2(p)$  :

• le terme  $\frac{21}{p^2 + 10p + 21}$  représente la fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$  du système d'entrée  $X(p)$  et de sortie  $Y(p)$  ;



• le terme  $\frac{21}{p^2 + 10p + 21} X(p)$  représente la réponse  $Y_1(p)$  du système à la sollicitation  $X(p)$  en l'absence de conditions initiales ;

$$Y_1(p) = H(p)X(p)$$

• le terme  $\frac{py_0 + y_0' + 10y_0}{p^2 + 10p + 21}$  représente la réponse libre  $Y_2(p)$  du système suite aux conditions initiales, en l'absence d'entrée.

Évaluer les performances d'un système se fait par l'analyse de ses réponses à des entrées connues et maîtrisées. Ces réponses ne peuvent être exploitées que si les conditions initiales sont nulles et n'ont pas d'influence sur le comportement du système étudié.

2. On s'intéresse aux réponses indicielles du système concerné, pour lesquelles  $X(p) = \frac{1}{p}$  :

• Cas des conditions initiales nulles.

Le dénominateur de la fonction de transfert admet deux racines réelles et la sortie s'écrit alors

$$Y(p) = \frac{21}{p(p+3)(p+7)}$$

On décompose cette réponse en éléments simples

$$\frac{21}{p(p+3)(p+7)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+3} + \frac{c}{p+7}$$

– on multiplie par  $p$  les deux membres de l'égalité précédente et on prend la valeur  $p = 0$  pour calculer la valeur du premier coefficient  $a$  ;

– puis on multiplie respectivement par  $p+3$  et  $p+4$  en prenant comme valeur  $p = -3$  et  $p = -4$  pour calculer les valeurs des deux autres coefficients  $b$  et  $c$ .

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{7}{4} \frac{1}{(p+3)} + \frac{3}{4} \frac{1}{(p+7)}$$

Par transformée inverse de LAPLACE, on en déduit l'expression  $y_{00}(t)$  de la réponse avec des deux conditions initiales nulles

$$y_{00}(t) = 1 - \frac{7}{4} e^{-3t} + \frac{3}{4} e^{-7t}$$

• Cas des conditions initiales non nulles.

On a alors à rechercher la transformée inverse de la fonction

$$Y(p) = \frac{2p^2 + 25p + 21}{p(p+3)(p+7)}$$

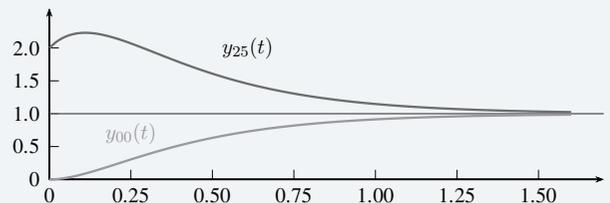
On la décompose en éléments simples de la même manière que précédemment

$$Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{3}{p+3} - \frac{2}{p+7}$$

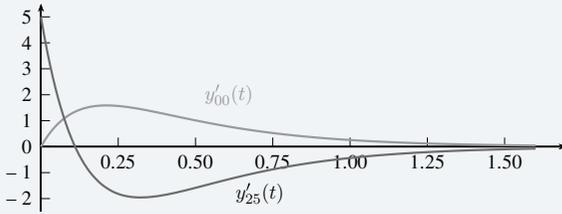
La réponse temporelle correspondante est alors

$$y_{25}(t) = 1 + 3e^{-3t} - 2e^{-7t}$$

On trace alors les courbes des réponses obtenues



On complète ces deux courbes par le tracé des dérivées premières, sur lesquelles on retrouve les conditions initiales concernées



3. La recherche d'une solution sous la forme  $y(t) = S \sin(\omega t + \varphi)$  consiste à rechercher une solution particulière de l'équation différentielle, c'est à dire que l'on ne s'occupe pas du régime transitoire, mais seulement du régime permanent de la réponse forcée.

Le rapport  $\frac{S}{E} e^{j\varphi}$  s'obtient en substituant  $j\omega$  à la variable  $p$  dans la fonction de transfert.

$$\frac{S}{E} e^{j\varphi} = H(j\omega)$$

C'est un nombre complexe dont :

- le module exprime le gain du système ;
- l'argument exprime le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

Leurs valeurs dépendent de celle de la pulsation  $\omega$  de sollicitation.

## 8.7

1. On suppose les conditions initiales nulles et on applique la transformée de LAPLACE aux équations de fonctionnement

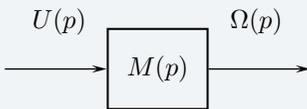
$$u(t)e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \mapsto U(p)E(p) + RI(p) + LpI(p) \quad (1)$$

$$e(t)K_v \omega(t) \mapsto E(p)K_v \Omega(p) \quad (2)$$

$$c_m(t)K_c i(t) \mapsto C_m(p)K_c I(p) \quad (3)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} c_m(t) - c_r(t) - f\omega(t) \mapsto Jp\Omega(p)C_m(p) - C_r(p) - f\Omega(p) \quad (4)$$

2. Comme le moteur est commandé en tension, la variable d'entrée est  $u$ . La sortie du moteur est sa vitesse de rotation soit  $\omega$ . En première approche, on peut représenter le fonctionnement d'un moteur à courant continu par le schéma suivant



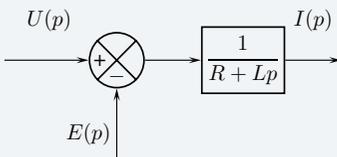
À partir de l'équation (1), on a

$$U(p) - E(p) = (R + Lp)I(p)$$

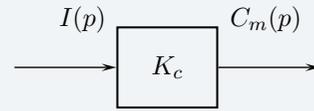
En respectant le principe de causalité, on forme alors la fonction de transfert suivante

$$\frac{I(p)}{U(p) - E(p)} = \frac{1}{R + Lp}$$

Le signal  $U(p) - E(p)$  est obtenu à partir d'un comparateur. On peut alors tracer un début de schéma-blocs.



En tenant toujours compte du principe de causalité, l'équation (3) se représente par

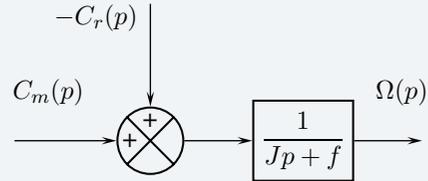


L'équation (4) s'écrit  $C_m(p) - C_r(p) = (Jp + f)\Omega(p)$ .

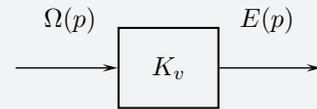
On peut donc à partir de cette expression former la fonction de transfert

$$\frac{\Omega(p)}{C_m(p) - C_r(p)} = \frac{1}{Jp + f}$$

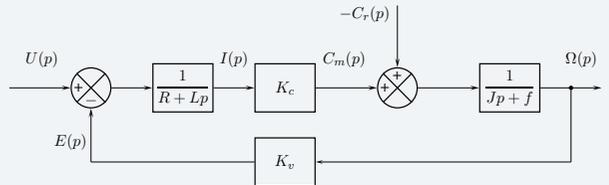
Ce qu'on peut représenter par le schéma-blocs suivant



Il ne reste plus qu'à traiter l'équation (2) qui permet de relier  $E(p)$  à  $\Omega(p)$ .



On en déduit le tracé du schéma-blocs d'un moteur à courant continu commandé en tension



3. Le schéma précédent montre de toute évidence un schéma bouclé. Par contre, comme il n'y a pas d'organe réalisant de signal de commande, on n'est pas en présence d'un système asservi. La rétroaction tracée sur le schéma est due au phénomène d'induction.

On peut calculer une fonction de transfert pour le moteur mais en aucun cas on ne peut parler de fonction de transfert en boucle fermée ou en boucle ouverte.

4. Si on suppose l'entrée de perturbation nulle, on obtient en utilisant les résultats de l'algèbre des schémas

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_c}{(R + Lp)(Jp + f)}}{1 + \frac{K_c K_v}{(R + Lp)(Jp + f)}}$$

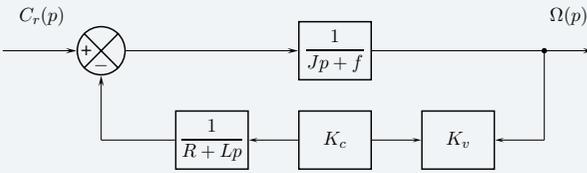
Soit après simplification

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_c}{K_c K_v + (R + Lp)(Jp + f)}$$

On obtient alors en regroupant les différentes puissances de  $p$

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_c}{K_c K_v + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2}$$

Si on suppose l'entrée de consigne nulle, on travaille alors sur le schéma suivant



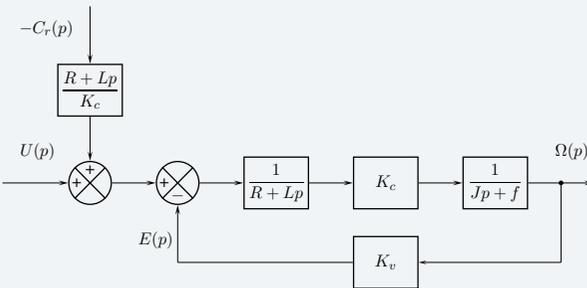
On réduit la boucle pour écrire

$$\frac{\Omega(p)}{C_r(p)} = \frac{R + Lp}{K_c K_v + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2}$$

Le système étant linéaire, on obtient finalement, par superposition

$$\Omega(p) = -\frac{K_c}{K_c K_v + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2} U(p) - \frac{R + Lp}{K_c K_v + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2} C_r(p)$$

Pour trouver l'expression de  $\Omega(p)$  on aurait pu déplacer le sommateur sur lequel est introduit la perturbation et raisonner sur le schéma-blocs équivalent suivant



### Remarque

Comme on ne travaille pas sur un système asservi, on ne peut pas parler de fonction de transfert en poursuite et/ou en régulation.

5. Si on applique un échelon de tension en entrée en l'absence de perturbation, on a

$$U(p) = \frac{U_0}{p} \quad C_r(p) = 0$$

On admet que le moteur tend, en régime permanent, vers un taux de rotation fini noté  $\omega_{1\infty}$ . En utilisant le théorème de la valeur finale, on peut écrire

$$\omega_{1\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Omega(p)$$

On a alors

$$\omega_{1\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{K_c}{K_c K_v + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2} \frac{U_0}{p} \right)$$

Soit

$$\omega_{1\infty} = \frac{K_c}{K_c K_v + Rf} U_0$$

6. On a supposé dans la réponse précédente que le moteur avait un taux de rotation fini en régime permanent s'il était

commandé en échelon de tension. On admet donc que le comportement du moteur est stable puisque pour une entrée bornée la sortie est bornée. Comme une perturbation ne déstabilise pas un système, suite à son introduction le moteur aura toujours un taux de rotation fini en régime permanent. En l'exprimant différemment, on peut dire que la perturbation provoque une variation finie du taux de rotation en régime permanent.

On note  $\omega_{\infty}$  le nouveau taux de rotation en régime permanent après introduction de la perturbation. Comme  $\omega_{\infty}$  est fini alors on peut utiliser, comme précédemment, le théorème de la valeur finale pour trouver sa valeur.

Par ailleurs, la valeur de  $\omega_{\infty}$  est obtenue par différence de deux valeurs finies. Le calcul de la limite peut donc se conduire comme une différence de limites. On a alors

$$\omega_{\infty} = \omega_{1\infty} - \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{R + Lp}{K_c K_v + Rf + (RJ + Lf)p + LJp^2} \frac{C_{r0}}{p} \right)$$

Soit

$$\omega_{\infty} = \omega_{1\infty} - \frac{R}{K_c K_v + Rf} C_{r0}$$

Comme  $C_{r0}$  est un réel positif, le couple résistant s'oppose à la rotation de l'induit. Le résultat trouvé confirme bien que la vitesse du moteur en régime permanent est plus petite après introduction du couple de perturbation.

## 8.8

1. À la lecture du schéma-blocs donné dans l'énoncé, on peut écrire

$$\Omega_1(p) = \frac{1}{J_1 p} (C_{m1}(p) + Bp \Omega_2(p))$$

ou encore

$$J_1 p \Omega_1(p) = C_{m1}(p) + Bp \Omega_2(p)$$

On peut conclure alors que le gain  $B$  doit avoir la même dimension que le moment d'inertie  $J_1$ .  $B$  s'exprime donc en  $\text{kg m}^2$ . On aurait, bien évidemment, pu mener le même raisonnement sur l'expression de la sortie  $\Omega_2(p)$ .

2. Comme le système est supposé linéaire, on travaille par superposition. On commence par poser  $U_2(p) = 0$ . Par une démarche analogue à celle de l'exercice 8.7, on écrit

$$\Omega_1(p) = \frac{K_1}{K_1^2 + R_1 J_1 p} U_1(p) + Bp \left( \frac{R_1}{K_1^2 + R_1 J_1 p} \right) \Omega_2(p)$$

De même, en posant  $U_1(p) = 0$ , on obtient

$$\Omega_2(p) = \frac{K_2}{K_2^2 + R_2 J_2 p} U_2(p) + Bp \left( \frac{R_2}{K_2^2 + R_2 J_2 p} \right) \Omega_1(p)$$

Finalement, par combinaison de ces deux dernières équations, on trouve l'expression de  $\Omega_1(p)$  en fonction de  $U_1(p)$  et  $U_2(p)$ .

$$\Omega_1(p) = \frac{K_1(K_2^2 + R_2J_2p)U_1(p) + K_2R_1BpU_2(p)}{(K_1^2 + R_1J_1p)(K_2^2 + R_2J_2p) - R_1R_2B^2p}$$

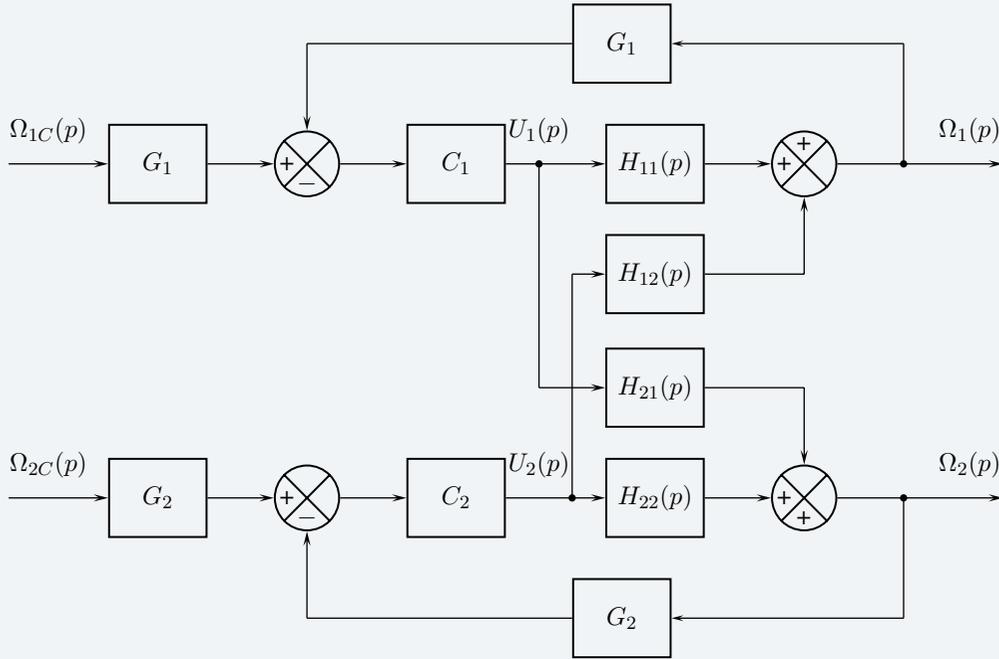
On en déduit

$$H_{11}(p) = \frac{K_1(K_2^2 + R_2J_2p)}{(K_1^2 + R_1J_1p)(K_2^2 + R_2J_2p) - R_1R_2B^2p}$$

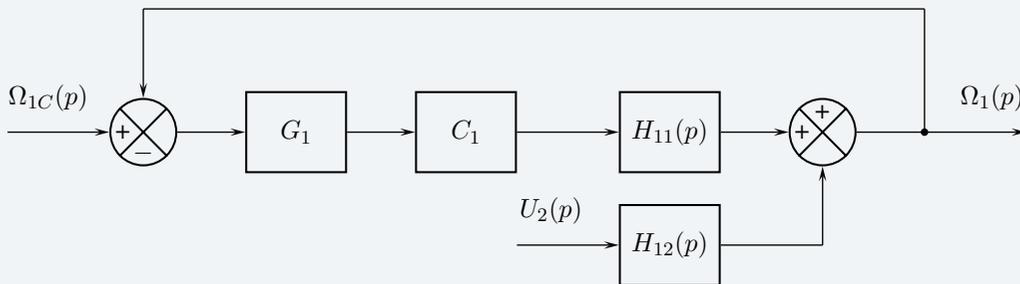
$$H_{12}(p) = \frac{K_2R_1Bp}{(K_1^2 + R_1J_1p)(K_2^2 + R_2J_2p) - R_1R_2B^2p}$$

3. On sait que chaque moteur est asservi en vitesse. La mesure de la vitesse de chaque moteur est réalisée par une génératrice tachymétrique de gains respectifs  $G_1$  et  $G_2$ . Par ailleurs, la commande de chaque moteur est réalisée par un correcteur à partir de l'écart entre l'image de la consigne et la mesure de la vitesse.

Pour pouvoir élaborer l'écart il faut que la consigne de vitesse soit traduite en tension. Et comme cet écart doit être nul lorsque la consigne et la sortie sont égales, la fonction de transfert de l'adaptateur doit être égale à celle de la génératrice tachymétrique. Pour traduire l'asservissement en vitesse des moteurs, on propose alors le schéma-blocs suivant



4. Pour déterminer l'expression de  $\Omega_1(p)$  en fonction de  $\Omega_{1C}(p)$  et  $U_2(p)$ , on trace le schéma-blocs équivalent à retour unitaire



On obtient alors

$$\Omega_1(p) = \frac{G_1C_1H_{11}(p)}{1 + G_1C_1H_{11}(p)}\Omega_{1C}(p) + \frac{H_{12}(p)}{1 + G_1C_1H_{11}(p)}U_2(p)$$

# Exercices d'approfondissement

## 8.9

1. Si on suppose les conditions initiales nulles alors par transformation de Laplace, on obtient :

$$Q(p) = SpY(p) + \frac{V_0}{2B} p \Sigma(p) \quad (1)$$

$$Jp^2 \Theta(p) = RF(p) - C \Theta(p) \quad (2)$$

$$F(p) = S \Sigma(p) \quad (3)$$

$$Y(p) = R \Theta(p) \quad (4)$$

2. En utilisant les notations proposées et en utilisant l'expression de  $\Theta(p)$  issue de l'équation (4), on peut écrire à partir de l'équation (2) :

$$Mp^2 Y(p) = F(p) - kY(p)$$

Par définition de la vitesse et de l'accélération, on a

$$v(t) = \frac{dy}{dt}(t) \quad ; \quad a(t) = \frac{dv}{dt}(t)$$

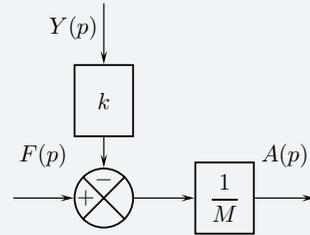
Ou encore par transformation de LAPLACE si on suppose les conditions initiales nulles

$$V(p) = pY(p) \quad \text{et} \quad A(p) = pV(p)$$

On obtient alors

$$A(p) = \frac{1}{M} (F(p) - kY(p))$$

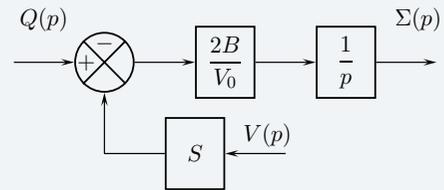
Cette relation peut se représenter par le schéma-blocs suivant



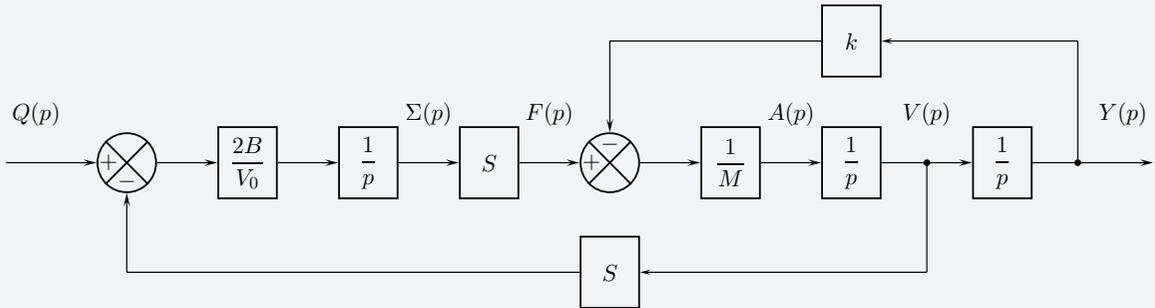
Par ailleurs, l'équation (1) peut s'écrire

$$\Sigma(p) = \frac{2B}{V_0 p} (Q(p) - SV(p))$$

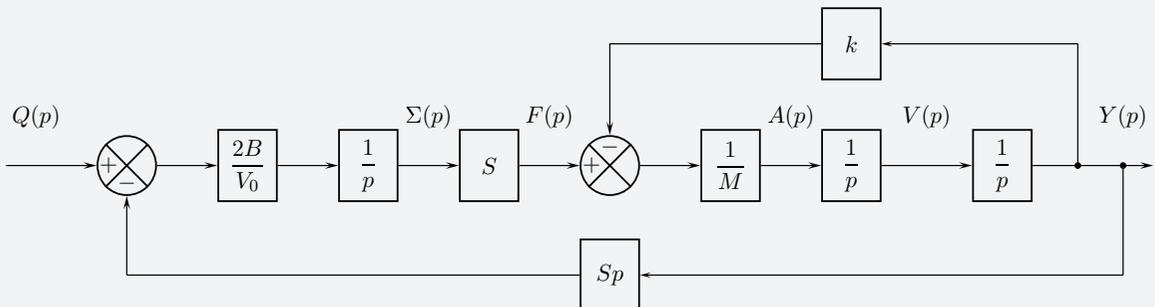
Cela permet de proposer la représentation suivante



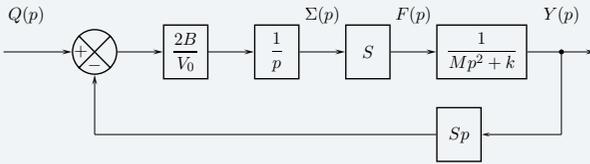
On peut alors compléter le schéma-blocs proposé dans l'énoncé



3. Pour déterminer la fonction de transfert  $\frac{Y(p)}{Q(p)}$ , il faut d'abord retracer le schéma afin d'avoir deux boucles imbriquées. Par déplacement du point de prélèvement, on obtient :



En réduisant d'abord la boucle interne, on trace le schéma suivant



En appliquant les résultats classiques d'algèbre des schémas, on trouve alors

$$\frac{Y(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{2BS^2p + V_0p(Mp^2 + k)}$$

On écrit la fonction de transfert sous forme canonique :

$$\frac{Y(p)}{Q(p)} = \frac{2BS}{2BS^2 + kV_0} \frac{1}{p \left( 1 + \frac{MV_0}{2BS^2 + kV_0} p^2 \right)}$$

On a une fonction de transfert de classe 1 dont les pôles sont

$$\pm j \frac{2BS^2 + kV_0}{MV_0}$$

4. Si on impose un échelon unitaire en entrée, la réponse indicielle du système étudié est :

$$Y(p) = \frac{2BS}{2BS^2 + kV_0} \frac{1}{p \left( 1 + \frac{MV_0}{2BS^2 + kV_0} p^2 \right)} \frac{1}{p}$$

En utilisant le théorème de la valeur finale, voir l'annexe sur la transformée de LAPLACE, on écrit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p)$$

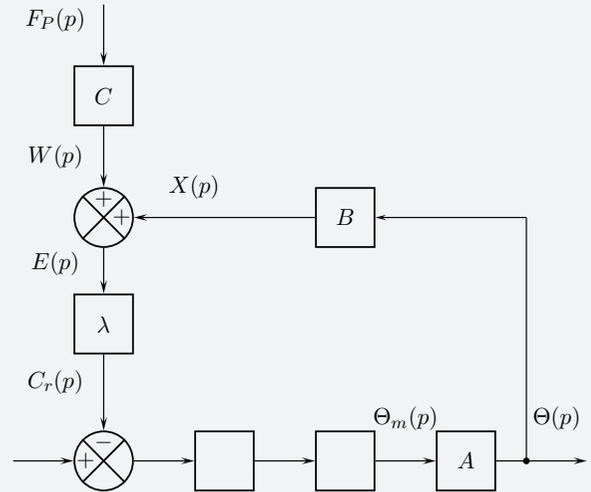
On trouve de manière évidente que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = +\infty$$

On conclut alors sur l'instabilité de l'ensemble vérin + caisse car pour une entrée bornée la sortie n'est pas bornée.

### 8.10

1. Le bloc A possède une entrée  $\Theta_m(p)$  et une sortie  $\Theta(p)$  de même dimension donc A est sans dimension. Le tracé de l'extrait du schéma-blocs ci-dessous permet de définir le signal  $E(p)$ .

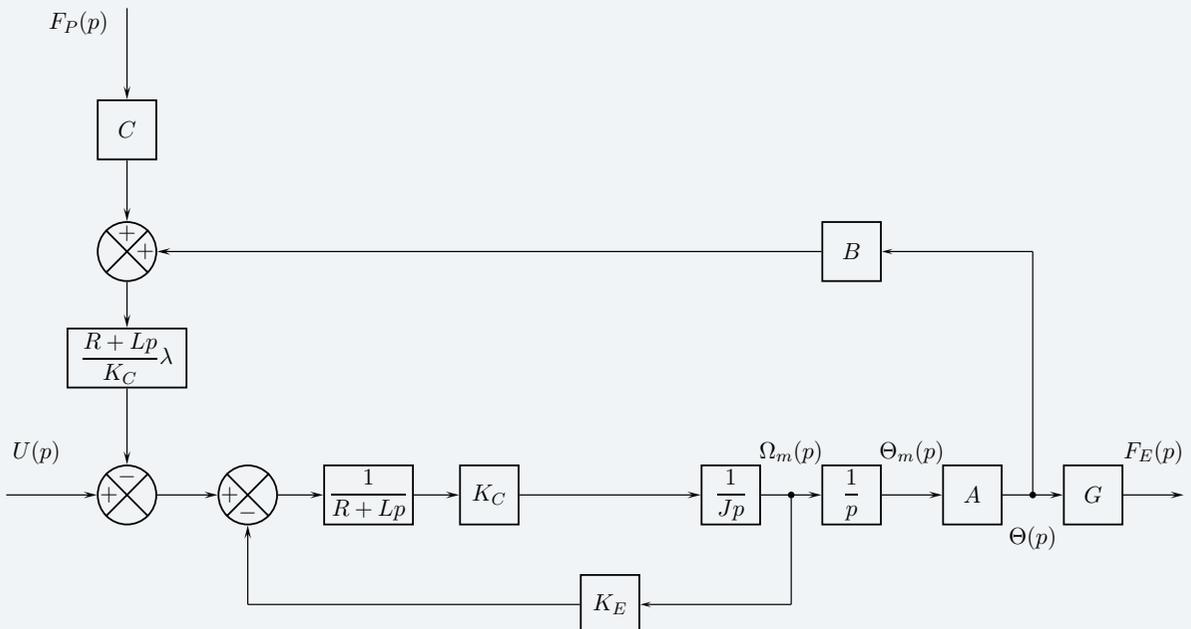


À la lecture de ce schéma, on a

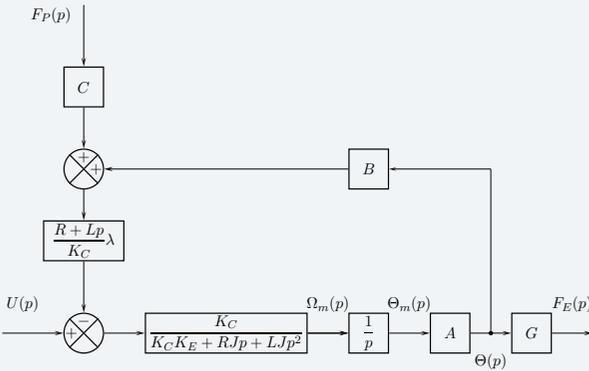
$$E(p) = \frac{C_r(p)}{\lambda}$$

$C_r(p)$  est l'image dans le domaine symbolique d'un couple résistant  $c_r(t)$ . Comme un couple est exprimé en Nm alors le signal  $e$  est homogène à une force, exprimée en Newton. Comme  $E(p)$  est la sortie d'un sommateur,  $W(p)$  et  $X(p)$  sont de même dimension que  $E(p)$ . On en déduit alors que C est sans dimension et que B est en  $N \text{ rad}^{-1}$ .

2. Afin de pouvoir déterminer  $\Delta F(p)$  en fonction de  $U(p)$  et  $F_P(p)$ , il faut faire en sorte que toutes les boucles soient imbriquées. Pour cela on déplace le sommateur réalisant  $C_m(p) - C_r(p)$  en amont du schéma.



On peut alors réduire la boucle interne et tracer un schéma-blocs où il ne reste plus qu'à appliquer la relation des systèmes bouclés pour trouver les fonctions de transfert demandées.



À partir de ce dernier schéma, on peut trouver :

- $R(p) = \frac{F_E(p)}{U(p)}$  en supposant  $F_P(p)$  nulle ;
- $G(p) = \frac{F_E(p)}{F_P(p)}$  en supposant  $U(p)$  nulle.

On pose  $F_P(p) = 0$  ; on écrit alors

$$R(p) = \frac{F_E(p)}{U(p)} = G \frac{A \times \frac{K_C}{K_C K_E + R J p + L J p^2} \times \frac{1}{p}}{1 + A \times \frac{K_C}{K_C K_E + R J p + L J p^2} \times \frac{1}{p} \times B \times \frac{R + L p \lambda}{K_C}}$$

Soit, après réduction

$$R(p) = \frac{G A K_C}{p(K_C K_E + R J p + L J p^2) + A B \lambda (R + L p)}$$

On pose  $U(p) = 0$  ; on trouve alors

$$G(p) = \frac{F_E(p)}{F_P(p)} = -G C \frac{A \times \frac{K_C}{K_C K_E + R J p + L J p^2} \times \frac{1}{p} \times \frac{R + L p \lambda}{K_C}}{1 + A \times \frac{K_C}{K_C K_E + R J p + L J p^2} \times \frac{1}{p} \times B \times \frac{R + L p \lambda}{K_C}}$$

Soit, après réduction

$$G(p) = \frac{-G C A \lambda (R + L p)}{p(K_C K_E + R J p + L J p^2) + A B \lambda (R + L p)}$$

Finalement, on obtient

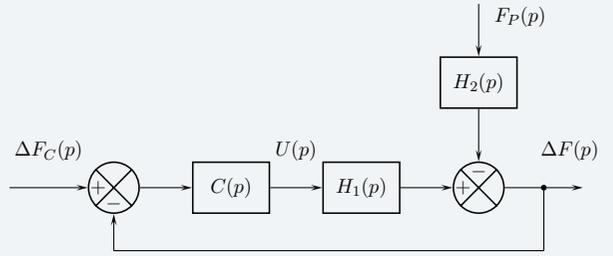
$$F_E(p) = \frac{G A (K_C U(p) - C \lambda (R + L p) F_P(p))}{L J p^3 + R J p^2 + (K_C K_E + A B \lambda) p + A B R \lambda}$$

En revenant au calcul initial, on peut alors identifier  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  :

$$H_1(p) = -\frac{k G A K_C}{L J p^3 + R J p^2 + (K_C K_E + A B \lambda) p + A B R \lambda}$$

$$H_2(p) = 1 + \frac{k G A C \lambda (R + L p)}{L J p^3 + R J p^2 + (K_C K_E + A B \lambda) p + A B R \lambda}$$

3. La grandeur asservie est l'écart d'effort  $\Delta f = f_p - f_e$ . On peut représenter cet asservissement par le schéma suivant où  $C(p)$  représente le correcteur



## 8.11

1. L'équation (4)  $c_{m1}(t) = K i(t)$  permet de voir que le couple moteur  $c_{m1}$  est proportionnel au courant  $i$ . Donc, si on contrôle le courant  $i$  d'alimentation du moteur, l'évolution du couple moteur est également contrôlée. L'asservissement en courant est donc bien équivalent à un asservissement de couple.

2. À la lecture du schéma-blocs de la figure 3, on a

$$H_{m1}(p) = \frac{I(p)}{V_s(p) - K \Omega_m(p)} ;$$

$$H_{m2}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{m1}(p) + C_{op}(p)}.$$

En passant les équations (1), (2), (3) et (4) données dans l'énoncé dans le domaine de LAPLACE, on obtient si on suppose les conditions initiales nulles

$$V_s(p) = E(p) + (R + L p) I(p) \quad (1)$$

$$E(p) = K \Omega_m(p) \quad (2)$$

$$C_{m1}(p) + C_{op}(p) - f \Omega_m(p) = J p \Omega_m(p) \quad (3)$$

$$C_{m1}(p) = K I(p) \quad (4)$$

À l'aide des deux premières équations, on trouve

$$V_s(p) - K \Omega_m(p) = (R + L p) I(p).$$

On en déduit alors l'expression de la fonction de transfert  $H_{m1}(p)$

$$H_{m1}(p) = \frac{I(p)}{V_s(p) - K \Omega_m(p)} = \frac{1}{R + L p}.$$

En exploitant l'équation (3) écrite dans le domaine symbolique, on détermine l'expression de  $H_{m2}(p)$

$$H_{m2}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{m1}(p) + C_{op}(p)} = \frac{1}{J p + f}.$$

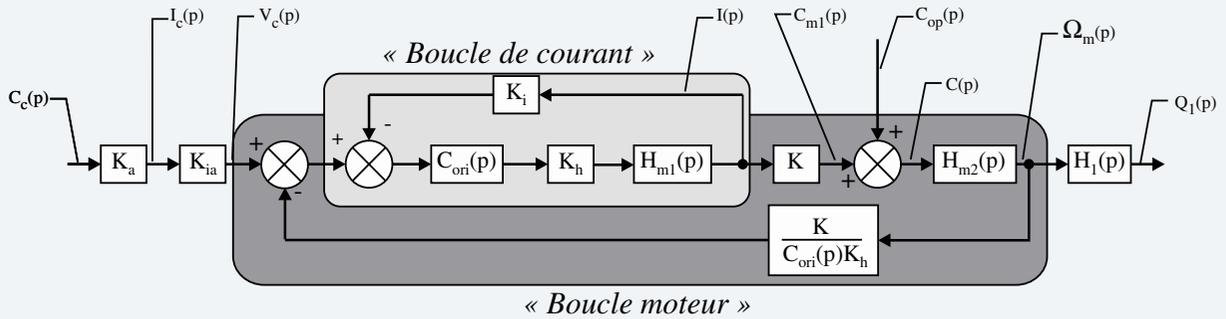
3. On veut que le signal  $c_{m1}$  soit égal au signal  $c_c$  en régime permanent donc on souhaite que  $i_c$  soit égal à  $i$  puisque l'asservissement se fait sur le signal de courant. On doit donc avoir la même conversion entre  $c_c$  et  $i_c$  qu'entre  $c_{m1}$  et  $i$ .

Sur le schéma-blocs de la figure 3, on lit  $C_{m1}(p) = K I(p)$ .

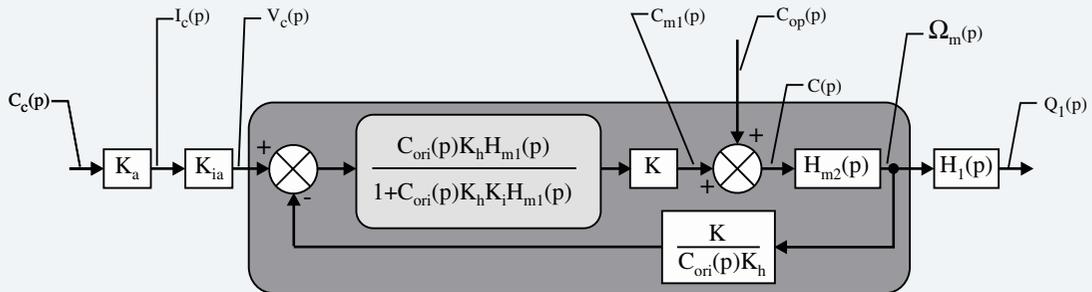
On a alors

$$K_a = \frac{1}{K}$$

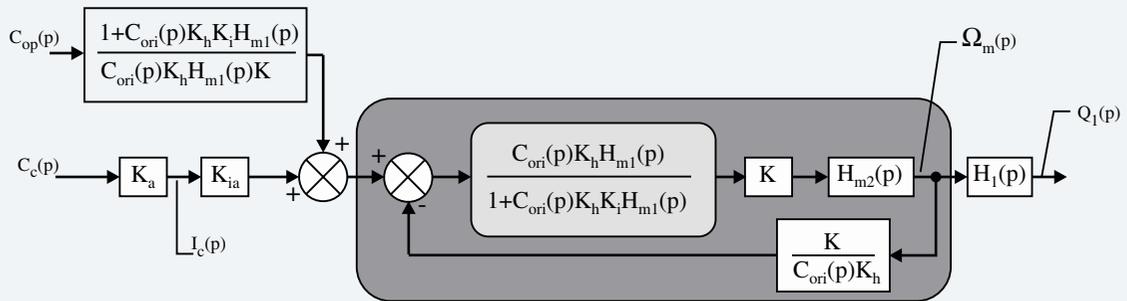
4. Que ce soit pour calculer  $G_1(p)$  ou  $G_2(p)$  il faut tracer un schéma-blocs sur lequel la boucle de courant et la boucle moteur sont imbriquées.



Sur ce schéma, on peut réduire la boucle interne en utilisant la relation des schémas bouclés, on obtient alors le schéma-blocs suivant



Pour rendre le calcul de  $G_1(p)$  aisé, on trace un nouveau schéma-blocs où on déplace vers l'amont le sommateur sur lequel est introduit le couple  $c_{op}$ .



Pour calculer  $G_2(p)$ , on suppose que le couple  $c_{op}$  fourni par l'opérateur est nul. En utilisant la relation des systèmes bouclés, on trouve alors

$$G_2(p) = K_a K_{ia} \frac{\frac{C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h K H_{m2}(p)}{1 + K_i C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h}}{1 + \frac{C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h K H_{m2}(p)}{1 + K_i C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h} K}}{K} H_1(p)$$

en simplifiant, on obtient

$$G_2(p) = K_a K_{ia} \frac{C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h K H_{m2}(p)H_1(p)}{1 + K_i C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h + K^2 H_{m1}(p)H_{m2}(p)}$$

Pour trouver  $G_1(p)$ , il suffit de supposer que le couple  $c_c$  est nul, on trouve alors en utilisant le résultat précédent

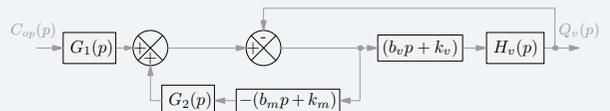
$$G_1(p) = \frac{1 + K_i C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h}{C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h K} \times \frac{C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h K H_{m2}(p)H_1(p)}{1 + K_i C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h + K^2 H_{m1}(p)H_{m2}(p)}$$

Soit après simplification

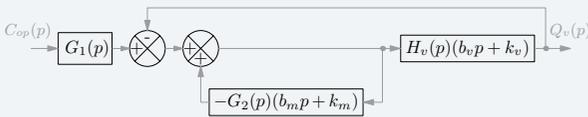
$$G_1(p) = \frac{(1 + K_i C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h)H_{m2}(p)H_1(p)}{1 + K_i C_{ori}(p)H_{m1}(p)K_h + K^2 H_{m1}(p)H_{m2}(p)}$$

On a alors une expression de  $Q_1(p)$  en fonction de  $C_{op}(p)$  et  $C_c(p)$  qui permet de mettre en place la schématisation proposée sur la figure 4.

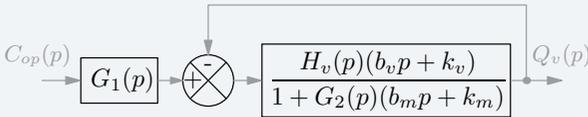
5. Pour trouver l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p)$  on trace un schéma-blocs d'entrée  $C_{op}(p)$  et sortie  $Q_v(p)$  à partir du schéma-blocs initial de la figure 4.



On imbrique les boucles en échangeant les sommateurs.



On réduit la boucle interne.



En utilisant la relation des systèmes bouclés, on obtient

$$\frac{Q_v(p)}{C_{op}(p)} = G_1(p) \frac{\frac{H_v(p)(b_v p + k_v)}{1 + G_2(p)(b_m p + k_m)}}{1 + \frac{H_v(p)(b_v p + k_v)}{1 + G_2(p)(b_m p + k_m)}}$$

Après simplification, on obtient finalement

$$H_m(p) = \frac{G_1(p)H_v(p)(b_v p + k_v)}{1 + G_2(p)(b_m p + k_m) + H_v(p)(b_v p + k_v)}$$

6. Pour trouver l'expression de la position articulaire virtuelle en régime permanent, on calcule

$$Q_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} q_v(t)$$

Comme le système stable alors, pour une entrée en échelon, la sortie  $q_v$  tend vers une valeur finie. On peut donc utiliser le théorème de la valeur finale pour déterminer  $Q_\infty$ .

$$Q_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p Q_v(p)$$

Comme l'opérateur applique un couple en échelon unitaire alors  $C_{op}(p) = \frac{1}{p}$ . En utilisant l'expression de  $Q_v(p)$  trouvée précédemment, on a alors

$$Q_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \frac{G_1(p)H_v(p)(b_v p + k_v)}{1 + G_2(p)(b_m p + k_m) + H_v(p)(b_v p + k_v)} \times \frac{1}{p}$$

soit

$$Q_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{G_1(p)H_v(p)(b_v p + k_v)}{1 + G_2(p)(b_m p + k_m) + H_v(p)(b_v p + k_v)}$$

Les expressions de  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$  et  $H_v(p)$  sont données dans l'énoncé, on trouve alors

$$Q_\infty = \frac{4k_v}{k_m}$$

Comme le couple imposé par l'opérateur est un échelon unitaire et comme  $c_{op}(t) = r q_v(t)$  alors en régime permanent on a

$$1 = r \frac{4k_v}{k_m}$$

d'où

$$r = \frac{k_m}{4k_v}$$

7. Pour vérifier le critère de raideur, il faut que  $r > 20 \text{ N m rad}^{-1}$ , on en déduit alors

$$k_m > 80k_v.$$



### Plan

9.1	Analyse temporelle, analyse harmonique	250
9.2	Le modèle proportionnel	252
9.3	Modèle du premier ordre ou d'ordre 1	253
9.4	Modèle du deuxième ordre ou modèle d'ordre 2	259
9.5	Système intégrateur	271
9.6	Identification de modèles de comportement	272
	Exercices d'application	276
	Exercices d'approfondissement	279
	Solutions des exercices	282

### Introduction

Les modèles de références sont les modèles de connaissances élaborés à partir d'études théoriques basées sur des connaissances mathématiques. Ils sont construits pour trois systèmes dits fondamentaux :

- le modèle d'ordre 1 ;
- le modèle d'ordre 2 ;
- l'intégrateur.

Ces modèles définissent les caractéristiques temporelles et fréquentielles de ces systèmes fondamentaux. Ils permettent ensuite d'exploiter des résultats expérimentaux en vue de proposer des modèles de comportement de système ne pouvant pas être décrits par des équations explicites.

### Prérequis

Ce chapitre s'inscrit dans la suite logique des deux précédents. Il est nécessaire de les avoir suffisamment assimilés pour acquérir sans effort les éléments de référence exposés.

Les modèles étant issus de l'univers des mathématiques, il est difficile de se dispenser des concepts supplémentaires suivants :

- Expressions et calculs avec des nombres complexes.
- Notion de changement de variables.

### Objectifs

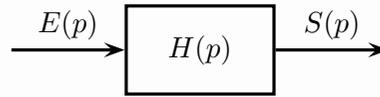
- Acquérir une culture scientifique des modèles :
  - proportionnels ;
  - du premier ordre ;
  - du deuxième ordre ;
  - intégrateurs.
- Lire, voire tracer une réponse temporelle.
- Lire, voire tracer les deux diagrammes de BODE.
- Tracer rapidement les diagrammes de BODE asymptotiques.
- Proposer un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux.

# 9.1 Analyse temporelle, analyse harmonique

Parler d'une réponse sans connaître la sollicitation conduit à dire bien des bêtises !

Caractériser un système veut dire déterminer ses caractéristiques intrinsèques...

On s'intéresse dans ce chapitre à un système d'entrée  $e$ , de sortie  $s$  et de fonction de transfert  $H(p)$ .



Analyser la réponse d'un système nécessite une parfaite connaissance de la sollicitation. Le chapitre 7 a défini les entrées dites canoniques et les deux domaines d'étude correspondants, que l'on rappelle ici :

- les entrées en impulsion, échelon ou rampe sont utilisées pour caractériser un système à partir de son comportement en régime transitoire ;
- une entrée sinusoïdale est utilisée pour caractériser un système à partir de son comportement en régime établi.

## 9.1.1 Étude et courbes temporelles

### Définition

On parle de l'**étude temporelle** d'un système lorsque l'on s'intéresse à sa réponse en régime transitoire.

Le comportement du système étudié peut être illustré par des courbes sur lesquelles figurent des informations importantes :

- une abscisse temporelle, avec une origine et une échelle ;
  - une **date** correspond à un instant particulier ;
  - une **durée** correspond à un intervalle entre deux dates.
- une ordonnée donnant les valeurs de l'entrée et des sorties étudiées.



Bien vérifier que l'abscisse est le temps ! Bien identifier la nature de l'entrée !

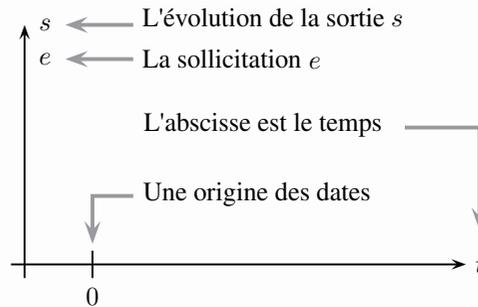


Figure 9.1 Les informations attendues sur une étude temporelle

Des informations implicites sont à proscrire !

En corolaire, l'absence d'une seule de ces informations doit éveiller l'attention :

- L'abscisse est-elle bien le temps ?
- Quelle est la nature de l'entrée ?
- Quelles sont les échelles de représentation ?
- Quelles sont les unités des différentes grandeurs représentées ?

## 9.1.2

## Étude harmonique : les diagrammes de BODE



Lors d'une étude harmonique, l'entrée est TOUJOURS sinusoïdale et on attend TOUJOURS le régime permanent !

La notation complexe est bien adaptée aux calculs à mener ; l'entrée et la sortie en sont les parties imaginaires.

Il s'agit bien du logarithme décimal, noté usuellement log, et non du logarithme népérien !

Les deux diagrammes avec des abscisses sans relation sont inexploitable !

## Définition

On parle de l'**étude harmonique** d'un système lorsque l'on s'intéresse à sa réponse en régime permanent suite à une entrée sinusoïdale.

Une fois le régime permanent atteint, le temps n'a plus d'influence sur la sortie. Lors de la résolution d'une équation différentielle régissant un processus, cela revient à ne s'intéresser qu'à la réponse forcée, c'est à dire à une solution particulière. Dans le cas d'une sollicitation sinusoïdale, l'entrée est de la forme

$$e(t) = E \sin(\omega t) \quad \text{notée} \quad e(t) = Ee^{j\omega t}$$

Les lois de la physique imposent une réponse en régime permanent de la même nature que l'entrée, donc sous la forme

$$s(t) = S \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{notée} \quad s(t) = Se^{j\omega t + \varphi}$$

Quatre paramètres apparaissent dans ces deux expressions, aux propriétés bien caractérisées :

- la pulsation  $\omega$  et l'amplitude  $E$  sont imposées au niveau de l'entrée ;
- la pulsation  $\omega$  se retrouve sur le signal de sortie ;
- on peut observer que l'amplitude  $S$  et le déphasage  $\varphi$  du signal de sortie dépendent de la valeur de la pulsation  $\omega$ .

## Définition

La **réponse harmonique** d'un système est entièrement définie et caractérisée par le nombre complexe  $H(j\omega)$  obtenu en substituant  $j\omega$  à  $p$  dans la fonction de transfert du système considéré.

$$H(j\omega) = \frac{S}{E} e^{j\varphi}$$

Ce nombre  $H(j\omega)$  est un nombre complexe que l'on considère en coordonnées polaires, en s'intéressant à son module et à son argument :

- son module est le rapport d'amplitude  $\frac{S}{E}$ , appelé gain du système et noté  $G$  ;

$$G = \frac{S}{E} = |H(j\omega)|$$

- son argument correspond au retard de la sortie sur l'entrée et a déjà été noté  $\varphi$ .

$$\varphi = \arg(H(j\omega))$$

Les **diagrammes de BODE** sont les représentations graphiques des évolutions du module et de la phase en fonction de la pulsation  $\omega$  de sollicitation :

- l'abscisse est la pulsation d'excitation  $\omega$ , représentée sur une échelle logarithmique ;
- le gain est exprimé en décibels, noté  $G_{dB}$  ;

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

- l'argument est usuellement exprimé en degré.

$$\varphi = \arg(H(j\omega))$$

Les diagrammes de BODE en gain ou en phase ont la même abscisse, ils seront donc toujours :

- soit superposés ;
- soit représentés l'un sous l'autre.

Il n'y a pas d'origine sur une échelle logarithmique !

Il est donc possible de placer en échelle logarithmique les valeurs 1, 2, 4, 5, 8 et 10 sans souci sur une feuille quadrillée...

### Échelle logarithmique

Les échelles utilisées sur les diagrammes de BODE méritent attention, notamment l'échelle logarithmique utilisée en abscisse et illustrée sur la figure 9.2 :

- Repérer sur la figure les trois décades représentées, de 0,1 ( $10^{-1}$ ) à 100 ( $10^2$ ).
- Nommer les graduations :
  - de 1 à 10 ;
  - de 0,1 à 1 ;
  - de 10 à 100.
- Le zoom tracé sur la décade centrale comporte deux échelles que l'on interprète en s'intéressant à la fonction logarithme décimal  $\omega \mapsto \log(\omega)$  :
  - l'échelle des antécédents ( $\omega$ ) est logarithmique ;
  - l'échelle des images ( $\log(\omega)$ ) est linéaire ;
  - en connaissant la valeur  $\log(2) \approx 0,30$ , on repère sur l'échelle logarithmique les graduations 2, 4, 8 correspondant aux puissances successives de 2, en vis à vis des multiples successifs de 0,3 sur l'échelle linéaire des images ;
  - la graduation 5 est positionnée en face de la graduation 0,7 ; cette valeur est calculée à partir de l'égalité

$$2 \times 5 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \log(2) + \log(5) = \log(10)$$

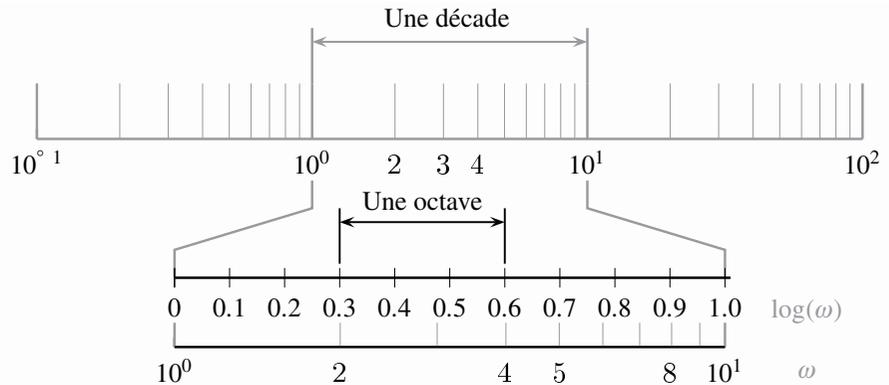


Figure 9.2 Une octave, une décade sur une échelle logarithmique

#### Définition

On appelle **octave** un intervalle séparant deux pulsations dont l'une est le double de l'autre.

On appelle **décade** un intervalle séparant deux pulsations dont l'une vaut dix fois l'autre.

## 9.2 Le modèle proportionnel

Souvent oublié à cause de sa simplicité apparente, le **modèle proportionnel**, ou modèle d'ordre 0, est très souvent utilisé et il permet d'énoncer les premières propriétés.

#### Définition

On appelle **système proportionnel** un système, d'entrée  $e$  et de sortie  $s$ , dont le comportement est régi par une relation de proportionnalité

$$s(t) = K e(t)$$

pour laquelle

- $K$  est le gain statique dont la dimension dépend des grandeurs d'entrée et de sortie.



L'unité d'un gain statique dépend des grandeurs d'entrée et de sortie !

Un modèle d'ordre 0 est un modèle à un seul paramètre, le gain statique.

## 9.3 Modèle du premier ordre ou d'ordre 1

### Définition

On appelle **système du premier ordre** un système, d'entrée  $e$  et de sortie  $s$ , dont le comportement est régi par une équation différentielle du premier degré à coefficients constants qu'on peut mettre sous la forme suivante

$$\tau \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = K e(t)$$

où

- $K$  est le gain statique dont la dimension dépend des grandeurs d'entrée et de sortie
- $\tau$  est la constante de temps du système, exprimée en seconde ;  $c$  est un nombre réel strictement positif

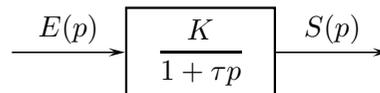
Si on applique la transformation de LAPLACE à l'équation différentielle régissant le comportement d'un système du premier ordre et si on suppose  $s(0) = 0$ , on obtient

$$\tau p S(p) + S(p) = K E(p)$$

On détermine alors la fonction de transfert caractérisant un système du premier ordre

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Un système d'ordre 1 est donc représenté par le schéma-bloc suivant



Un modèle d'ordre 1 est un modèle à deux paramètres : le gain statique et la constante de temps.

### 9.3.1 Étude temporelle – Réponse indicielle

Si l'entrée  $e(t)$  est un échelon unitaire, on a alors  $E(p) = \frac{1}{p}$  dans le domaine symbolique. La réponse correspondante s'écrit alors

$$S(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

En utilisant les tables de transformées de LAPLACE, on obtient l'expression de la sortie temporelle

$$s(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (1)$$

L'évolution des signaux de l'entrée  $e$  et de la sortie  $s$  en fonction du temps sont représentées sur la figure 9.3.

#### Caractéristiques du signal de sortie $s$

On exploite l'équation (1) et l'allure de la courbe de la figure 9.3 pour énoncer les principales propriétés associées à la réponse indicielle d'un modèle d'ordre 1 :



Cette loi de comportement est à connaître par cœur !

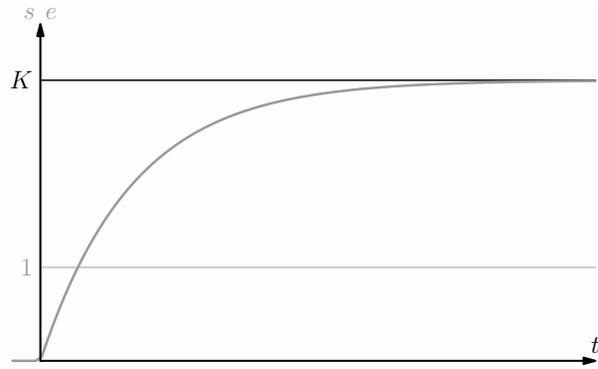


Figure 9.3 Réponse indicielle pour un gain statique  $K = 3$

- Valeur en régime permanent : on note  $s_\infty$  la valeur finale atteinte

$$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K$$

- Pente à l'origine : on cherche la valeur de la dérivée de la fonction  $s$  en 0, soit  $\dot{s}(0)$ . Le théorème de la valeur initiale permet d'écrire :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds}{dt}(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \mathcal{L} \left( \frac{ds}{dt}(t) \right)$$

soit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{K}{\frac{1}{p} + \tau}$$

On obtient ainsi la valeur de la pente à l'origine

$$\dot{s}(0) = \frac{K}{\tau}$$

- Temps de réponse à 5 % noté  $t_{5\%}$  : c'est le temps nécessaire pour que le signal de sortie atteigne la valeur finale à 5 % près. Compte tenu de l'allure de la courbe représentative de  $s$ , on a une seule solution à envisager, exprimée par

$$s(t_{5\%}) = 0,95K$$

La résolution de cette équation permet de trouver

$$t_{5\%} \approx 3\tau$$

- Ordonnée au point d'abscisse  $\tau$  : on exploite l'équation (1) pour calculer

$$s(\tau) \approx 0,63K$$

Ces quatre résultats sont reportés sur la figure 9.4 ci-dessous et sont à énoncer sans hésitation.

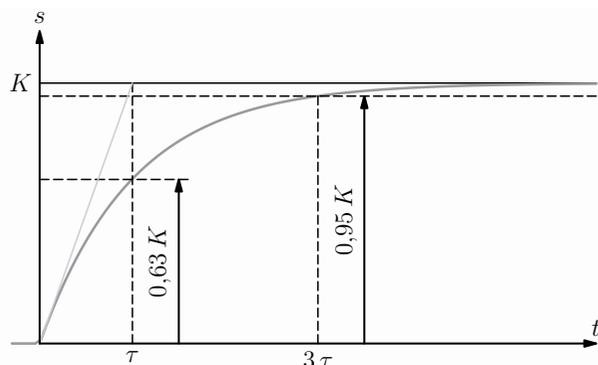


Figure 9.4 Réponse indicielle d'un modèle d'ordre 1



Dériver l'équation (1) par rapport au temps permet également de parvenir au résultat.



La courbe de l'entrée n'est pas dessinée, mais la légende définit la sollicitation !

### Résultats pour un échelon d'amplitude $E_0$

On suppose maintenant l'échelon d'entrée d'amplitude  $E_0$ . Tous les résultats précédents sont conservés, et s'expriment en substituant  $KE_0$  à  $K$  :

- expression de la réponse temporelle ;

$$s(t) = KE_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2)$$

- expression de la valeur finale ;

$$s_\infty = KE_0$$

- pente à l'origine ;

$$\dot{s}(0) = \frac{KE_0}{\tau}$$

- temps de réponse à 5 % inchangé.

$$t_{5\%} \approx 3\tau$$

### Forme la plus générale de la réponse à un échelon

Les équations (1) et (2) ont été obtenues en supposant les conditions initiales nulles, ce qui est facile à écrire en mathématiques, mais rarement rencontré dans le cadre d'une expérimentation.

Soient  $t_0$  l'instant initial et  $s_0$  la valeur de la sortie à cet instant. La réponse d'un modèle d'ordre 1 à un échelon d'amplitude  $E_0$  s'obtient en substituant dans l'équation (1) :

- $KE_0$  à  $K$  ;
- $t - t_0$  à  $t$  ;
- $s(t) - s_0$  à  $s(t)$ .

On obtient alors l'expression la plus générale de la réponse d'un modèle d'ordre 1 à un échelon

$$s(t) - s_0 = KE_0 \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \quad (3)$$

Ces substitutions correspondent à des changements de variables...

## 9.3.2 Étude fréquentielle – Diagrammes de Bode

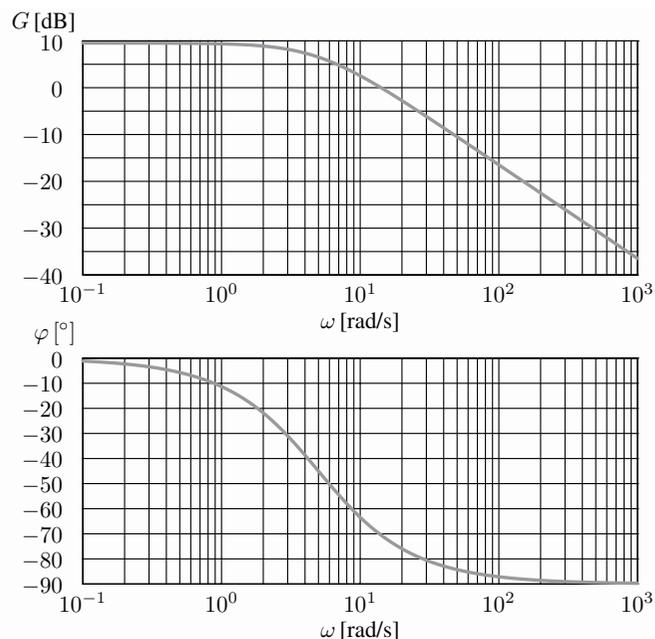


Figure 9.5 Diagrammes de Bode d'un modèle d'ordre 1, avec  $K = 3$  et  $\tau = 0,2$  s.

Le gain est noté  $G$ , avec l'unité (dB) précisé : il s'agit donc bien du gain en décibel noté  $G_{dB}$  lorsque l'unité n'est pas citée !

La fonction de transfert harmonique s'obtient en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans la fonction de transfert  $H(p)$  d'un système d'ordre 1. On a alors

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \text{ avec } K > 0 \text{ et } \tau > 0$$

L'expression de ce nombre complexe permet de détailler les expressions du gain et de la phase :

- On rappelle la définition du gain en décibels

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$$

On exprime le module du nombre complexe  $H(j\omega)$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

La première expression recherchée est alors

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \left( \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \right) \quad (4)$$

- Pour la phase, par définition, on a

$$\varphi(\omega) = \arg (H(j\omega))$$

Par substitution, on obtient

$$\varphi(\omega) = - \arg (1 + j\omega\tau)$$

La pulsation  $\omega$  étant un nombre réel positif, le complexe  $1 + j\omega\tau$  a un argument compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , et on obtient alors

$$\varphi(\omega) = - \arctan (\omega\tau) \quad (5)$$

C'est l'exploitation des deux expressions (4) et (5) qui permet le tracé des diagrammes de BODE, comme le réalise un logiciel sur la figure 9.5.

Lorsque l'on souhaite réaliser le tracé à la main, on procède en deux étapes :

- le tracé asymptotique ;
- l'allure du tracé réel, superposé au tracé asymptotique.

### Diagrammes de BODE asymptotiques

On souhaite approcher le tracé réel des diagrammes de BODE en raisonnant sur deux approximations de la fonction de transfert harmonique :

- la première aux basses pulsations, en considérant  $\omega\tau \ll 1$  ;
- la seconde aux pulsations élevées, pour  $\omega\tau \gg 1$ .

On note  $H_a(j\omega)$  la fonction de transfert approximée :

- Lorsque  $\omega\tau \ll 1$ , on recherche la limite de  $H(j\omega)$  lorsque  $\omega$  tend vers 0

$$H_a(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = K$$

- Lorsque  $\omega\tau \gg 1$ , la partie imaginaire devient prépondérante devant la partie réelle

$$H_a(j\omega) = \frac{K}{j\omega\tau}$$

On donne dans le tableau ci-dessous les expressions du gain et de la phase pour la forme approchée de la fonction de transfert.

#### Définition

On appelle **pulsation de cassure** une pulsation pour laquelle le diagramme asymptotique de BODE en gain se brise et change de direction.



Les expressions  $G_{dB_a}(\omega)$  et  $\varphi_a(\omega)$  sont respectivement les équivalents en zéro et en l'infini des expressions (4) et (5).

$\omega$	$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$	
$H_a(j\omega)$	$K$	$\frac{K}{j\omega\tau}$
$G_{dB_a}(\omega)$	$20 \log K$	$20 \log K - 20 \log(\omega\tau)$
$\varphi_a(\omega)$	$0^\circ$	$-90^\circ$

**Table 9.1 Expressions du gain et de la phase pour la forme approchée de la fonction de transfert**

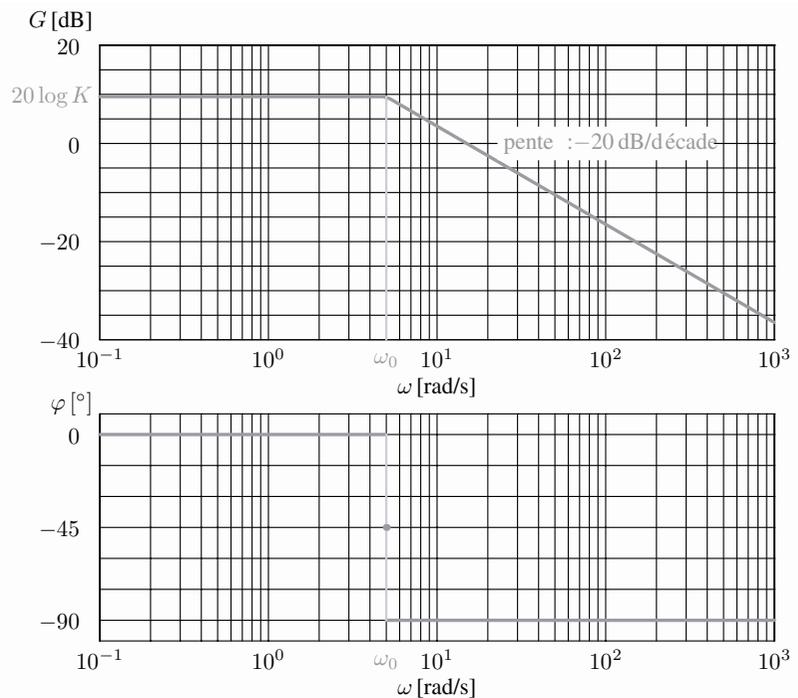
Un modèle d'ordre 1 présente donc une pulsation de cassure, qui correspond au point d'intersection des deux asymptotes, solution de l'équation

$$20 \log(K) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega\tau)$$

Cette égalité est vérifiée pour  $\omega\tau = 1$ . En notant  $\omega_0$  la pulsation de cassure, on a donc

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \quad \text{et} \quad H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

À partir des expressions approchées du gain et de la phase, on reprend le modèle représenté sur la figure 9.5 pour effectuer les tracés de la figure 9.6 :



**Figure 9.6 Diagrammes de Bode asymptotiques du modèle d'ordre 1 de gain statique  $K = 3$  et de pulsation de cassure  $\omega_0 = 5$  rad/s.**

- On repère en premier lieu la position de la pulsation de cassure  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ , et il est conseillé de tracer une verticale traversant les deux figures.
- Pour  $\omega \in ]0; \omega_0]$ , la courbe de gain est approchée par une demi-droite de pente nulle et d'ordonnée  $20 \log K$ , que l'on trace.

Pour  $\omega \in [\omega_0; +\infty[$ , la courbe de gain est approchée par une demi-droite de pente  $-20\text{dB/décade}$  puisque le tracé s'effectue sur une échelle semi-logarithmique. Cette demi-droite est tracée à partir du seul point connu, de coordonnées  $(\omega_0, 20 \log K)$ .

Une décade plus loin :

$$20 \log(10\omega) = 20 \log(\omega) + 20 \log(10)$$

Le segment vertical est tracé pour augmenter la lisibilité et n'est en aucune manière une asymptote !

Ce point est le seul point de référence pour le tracé d'un diagramme de phase, et complète les deux demi-droites.

C'est ce tracé, réalisé à partir des formes approchées de la fonction de transfert harmonique, qui explique l'appellation **diagramme asymptotique**.

- Le diagramme de phase, quant à lui, comporte deux demi-droites horizontales d'ordonnées respectives  $0^\circ$  et  $-90^\circ$ .

Ces deux droites sont habituellement reliés par un segment vertical au niveau de la pulsation de cassure.

Le diagramme de phase peut être complété par la valeur de la phase calculée pour la pulsation de cassure  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ , et on trouve  $\varphi(\omega_0) = -45^\circ$

### Diagrammes de Bode réels

Afin de quantifier l'erreur commise en effectuant le tracé asymptotique, on trace le tableau suivant, en s'intéressant aux valeurs du gain et de la phase pour des octaves successives autour de la pulsation de cassure.

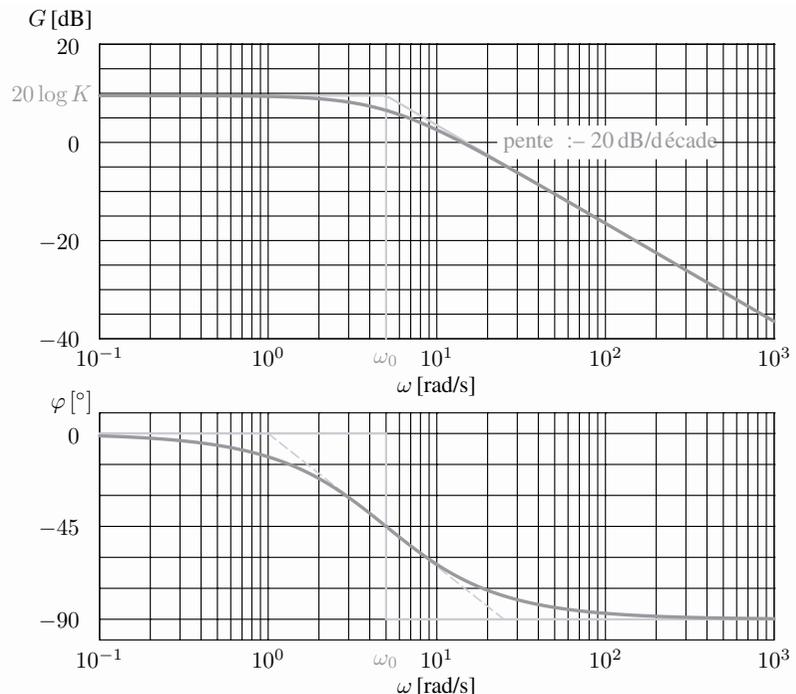
$\omega$	$\frac{1}{16\tau}$	$\frac{1}{4\tau}$	$\frac{1}{2\tau}$	$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$	$\frac{2}{\tau}$	$\frac{4}{\tau}$	$\frac{16}{\tau}$
$ \varphi(\omega) - \varphi_a(\omega) $	$3,5^\circ$	$14^\circ$	$26,5^\circ$	$45^\circ$	$26,5^\circ$	$14^\circ$	$3,5^\circ$
$G_{dB}(\omega) - G_{dB_a}(\omega)$	$\approx 0$ dB		$\approx -1$ dB	$\approx -3$ dB	$\approx -1$ dB	$\approx 0$ dB	

**Table 9.2 Comparaison valeurs réelles – valeurs asymptotiques**

Le calcul des différentes valeurs du gain et de la phase permet de compléter les tracés asymptotiques de la figure 9.6 et d'obtenir les tracés de la figure 9.7 :

- Le diagramme asymptotique de gain fournit une approximation tout à fait acceptable du diagramme de gain puisque l'écart maximal est de 3 dB pour la pulsation de cassure  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ .

Il est à noter que la courbe de gain réelle reste constamment sous le tracé asymptotique.



**Figure 9.7 Diagrammes de Bode réel et asymptotique du modèle d'ordre 1 pris en exemple.**



Cette approche de la tangente n'est dans les faits guère utilisée, car elle n'est plus valable pour les systèmes d'ordre supérieur à 1...

Pour un signal de sortie en tension, la puissance la fait intervenir au carré.



La bande passante est également une performance nécessitant un critère.

- Le diagramme asymptotique de phase est très éloigné du diagramme réel pour les quatre décades autour de la pulsation de cassure :
  - Il est nécessaire de reporter les valeurs calculées dans le tableau 9.2.
  - On peut cependant le compléter ici afin d'obtenir une allure du diagramme réel. En effet, la tangente au point  $(\omega_0, -45^\circ)$  coupe l'asymptote d'ordonnée  $0^\circ$  à  $\omega \approx \omega_0/5$ , et par symétrie coupe l'asymptote d'ordonnée  $-90^\circ$  à  $\omega \approx 5\omega_0$ .

En conclusion, on voit que les tracés asymptotiques des diagrammes de BODE fournissent une bonne idée de l'évolution du gain et qu'il est nécessaire de calculer quelques valeurs pour l'argument autour des pulsations de cassure afin d'avoir également une bonne approximation de l'évolution de la phase.

### Constante de temps et bande passante

L'expression « constante de temps » prend tout son sens lorsque l'on s'intéresse à la rapidité d'un système, par exemple avec le temps de réponse à 5%.

En électronique est utilisée la notion de bande passante, rattachée à l'étude des filtres. On constate pour un modèle d'ordre 1, au vu de la figure 9.7, que le gain est constant et égal au gain statique pour les faibles pulsations et qu'il s'effondre après la pulsation de cassure.

L'atténuation du signal de 3 dB à la pulsation de cassure  $\omega_0$  correspond à une amplitude de sortie à peu près égale à 70 % de l'amplitude d'entrée, soit une puissance en sortie divisée par deux.

C'est pourquoi on définit pour un ordre 1 la **pulsation de coupure à -3 dB**, notée  $\omega_{3dB}$  ou  $\omega_c$ , comme la pulsation pour laquelle on a

$$G_{dB}(\omega_c) = \max(G_{dB}) - 3 = 20 \log K - 3$$

Pour un modèle du premier ordre, la pulsation de coupure adoptée est la pulsation de cassure.

#### Définition

La **bande passante à -3 dB** est l'intervalle de pulsations ou de fréquences sur lequel le gain en décibels est atténué de moins de 3 dB par rapport au gain maximal.

Comme le temps de réponse à 5 % vaut  $3\tau$ , on remarque que la largeur de la bande passante peut qualifier la rapidité du système du premier ordre étudié : plus la constante de temps  $\tau$  est petite, plus le système est rapide et plus la bande passante est large.

## 9.4 Modèle du deuxième ordre ou modèle d'ordre 2

#### Définition

Le comportement d'un **système du deuxième ordre**, d'entrée  $e$  et de sortie  $s$ , est régi par une équation différentielle du deuxième degré à coefficients constants

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s}{dt^2}(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = K e(t)$$

pour laquelle

- $K$  est le **gain statique** dont la dimension dépend des grandeurs d'entrée et de sortie
- $\xi$  est le **coefficient d'amortissement**, sans dimension ; c'est un nombre réel positif
- $\omega_0$  est la **pulsation propre du système non amorti** exprimée en radians par seconde ; c'est un nombre réel positif.

Quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, la pulsation propre du système non amorti est appelée simplement *pulsation propre*.

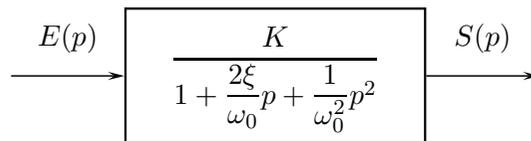
Si on applique la transformation de LAPLACE à l'équation différentielle régissant le comportement d'un système d'ordre 2 en supposant les conditions initiales nulles, à savoir  $s(0) = 0$  et  $\dot{s}(0) = 0$ , alors on obtient

$$\frac{1}{\omega_0^2} p^2 S(p) + \frac{2\xi}{\omega_0} p S(p) + S(p) = K E(p)$$

On détermine alors la fonction de transfert caractérisant un système d'ordre 2

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

Un système d'ordre 2 est donc représenté par le schéma-bloc suivant



Un modèle d'ordre 2 est un modèle à trois paramètres : le gain statique, la pulsation propre du système non amorti et le coefficient d'amortissement.

**Remarque**

Plutôt que de caractériser un système d'ordre 2 par son coefficient d'amortissement  $\xi$ , on utilise dans certains cas d'utilisation le **facteur de qualité**, noté  $Q$ , tel que

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

## 9.4.1 Étude temporelle – Réponse à un échelon

Si l'entrée  $e$  est un échelon d'amplitude  $E_0$ , elle s'exprime par  $E(p) = \frac{E_0}{p}$  dans le domaine symbolique. La réponse dans ce domaine s'écrit donc

$$S(p) = \frac{K E_0}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2 \right)}$$

Pour pouvoir déterminer l'expression de la réponse temporelle du système, il faut d'abord déterminer les racines du polynôme situé au dénominateur. En effet, pour utiliser les tableaux de transformées de LAPLACE, il faut statuer sur la possibilité de factoriser ce polynôme dans  $\mathbb{R}$ . Il faut donc rechercher le signe du discriminant de  $1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2$ .

Soit  $\Delta = \frac{\xi^2 - 1}{\omega_0^2}$  le discriminant de ce polynôme caractéristique. Son signe dépend de la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  et on distingue deux cas :

- les systèmes apériodiques, pour  $\xi \geq 1$
- les systèmes pseudopériodiques, pour  $\xi < 1$

### Les systèmes apériodiques

Les réponses d'un tel système sont tracées sur la figure 9.8.

Si  $\xi \geq 1$  alors  $\Delta \geq 0$ , le dénominateur est factorisable dans  $\mathbb{R}$ . On peut distinguer le cas de deux racines réelles distinctes et le cas d'une racine réelle double :

- $\xi > 1$  : on a 2 racines réelles distinctes et on écrit alors la sortie sous la forme

$$S(p) = \frac{K E_0}{p (1 + \tau_1 p) (1 + \tau_2 p)}$$

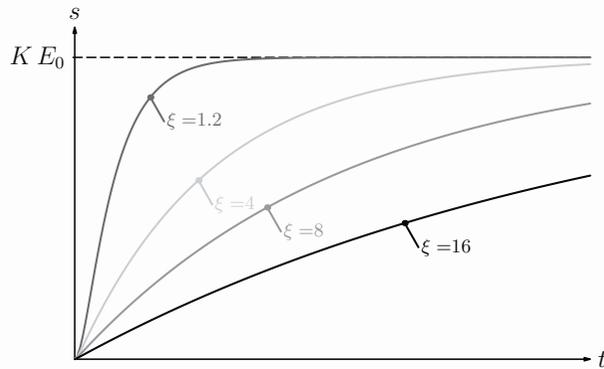


Figure 9.8 Réponses à un échelon d'un système d'ordre 2 apériodique, en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement.

$$\text{avec } \tau_1 = \frac{1}{\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \text{ et } \tau_2 = \frac{1}{\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

Par transformation inverse, on obtient alors

$$s(t) = K E_0 \left( 1 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right)$$

La fonction de transfert est le produit de deux fonctions de transfert d'ordre 1 et la réponse du modèle à un échelon s'écrit par une somme d'exponentielles : c'est pourquoi on parle de système d'*ordre 2 apériodique*.

- $\xi = 1$  : il y a une racine double, on factorise le dénominateur dans l'expression de la sortie et on obtient

$$S(p) = \frac{K E_0}{p (1 + \tau p)^2} \text{ avec } \tau = \frac{1}{\omega_0}$$

En utilisant les tableaux de transformées de LAPLACE, on obtient

$$s(t) = K E_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Dans ce cas, on qualifie ce type de système d'*ordre 2 apériodique critique*.

### Les systèmes pseudopériodiques

Les allures de différentes réponses possibles sont données sur la figure 9.9.

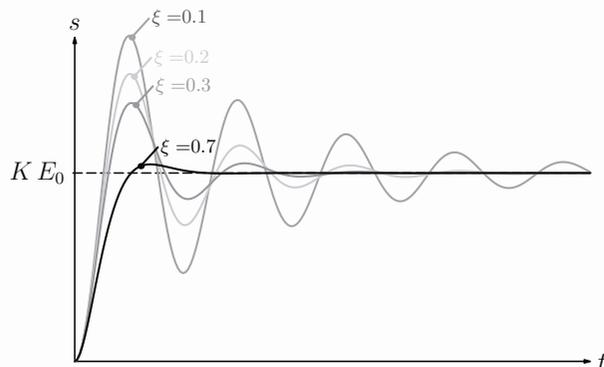


Figure 9.9 Différentes réponses possibles à un échelon d'un système d'ordre 2 pseudopériodique, suivant la valeur du coefficient d'amortissement.

Un tableau des transformées inverses de LAPLACE est donné en annexe.



La réponse indiciale des systèmes apériodiques ne présente pas de dépassement.



La courbe de réponse présente des dépassements.

Plus le coefficient d'amortissement est petit, plus les dépassements sont importants.

Comme  $\xi < 1$ , il n'y a pas de racines réelles. On ne peut donc pas factoriser le dénominateur dans  $\mathbb{R}$ , et on conserve l'expression initiale de la sortie

$$S(p) = \frac{K E_0}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2 \right)}$$

On en déduit alors, en utilisant les tableaux de transformées de LAPLACE

$$s(t) = K E_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right) \quad (6)$$

$$\text{avec } \sin \phi = \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{et } \cos \phi = \xi$$

En observant cette expression de  $s(t)$ , on trouve une période notée  $T_p$  d'expression

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Le signal de sortie est un signal sinusoïdal amorti, c'est pourquoi on parle de système d'**ordre 2 pseudopériodique**.

La période  $T_p$  correspond à la pulsation effectivement observée pendant la durée où le système oscille.

### Définition

On appelle **pulsation propre**, notée usuellement  $\omega_p$ , la pulsation des oscillations observables sur un système du deuxième ordre

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

### Caractéristiques du signal de sortie $s$

La fonction de transfert d'un système d'ordre 2 se note sous forme canonique

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

- Valeur en régime permanent : on note  $s_\infty$  la valeur finale atteinte

$$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K E_0$$

- Pente à l'origine : compte tenu des hypothèses de calcul, on a une pente nulle à l'origine

$$\dot{s}(0) = 0$$

- Dépassements en régime transitoire et temps de réponse à 5 % : ces deux performances nécessitent quelques calculs et font alors l'objet des deux sections suivantes.

### Dépassements en régime transitoire

Pour connaître les instants et les valeurs des dépassements, il faut déterminer les extremums de la sortie  $s$  dans le cas des systèmes pseudopériodiques.

Par le calcul de la dérivée  $\frac{ds(t)}{dt}$  à partir de l'équation (6), on obtient

$$\frac{ds}{dt}(t) = K E_0 \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t \right)$$

Cette dérivée s'annule donc deux fois par période et l'ensemble des solutions s'exprime par



Certain nomme  $\omega_p$  une pseudo-pulsation...



La pulsation propre n'est définie que pour des coefficients d'amortissement plus petit que 1 !



Cette forme est toujours valable, que le système soit pseudopériodique ou apériodique.



On peut également trouver  $s_\infty$  en utilisant le théorème de la valeur finale.



Ce résultat est valable pour tout système de classe 0, quel que soit son ordre !

$T_p$  est la période du sinus mis en évidence à la page 16.

$$t \equiv 0 \left[ \frac{T_p}{2} \right]$$

On définit alors les instants des dépassements successifs par

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

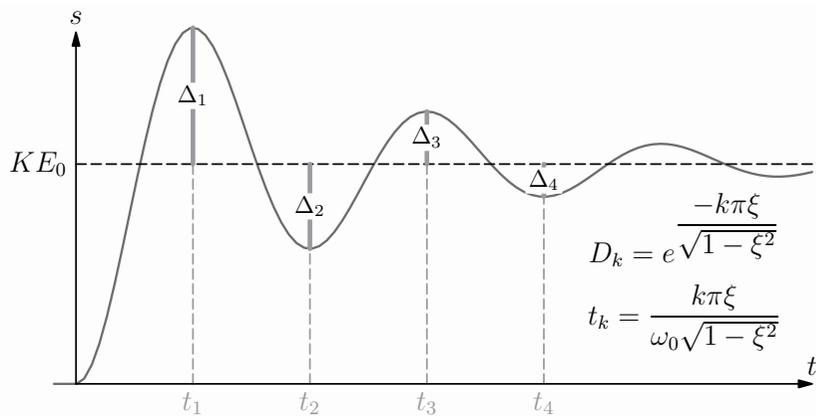
### Définition

On appelle **temps de pic** la durée mise pour atteindre le premier dépassement. Pour un système d'ordre 2, le temps de pic noté  $t_{pic}$  est égal à une demi-période

$$t_{pic} = t_1 - t_0 = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$



Si le premier dépassement est inférieur ou égal à 5 %, le temps de pic peut être choisi comme critère pour caractériser la rapidité.



**Figure 9.10** Les premiers dépassements observés lors de la réponse à un échelon d'un système d'ordre 2 à faible coefficient d'amortissement ( $\xi \approx 0,15$ )

À partir de l'expression  $t_k$ , on peut trouver la valeur du dépassement, notée  $\Delta_k$ , telle que  $\Delta_k = s(t_k)$ . Ces valeurs sont illustrées sur la figure 9.10.

La valeur du dépassement n'est pas en soi intéressante, on préfère calculer le dépassement relatif défini par

$$D_k = \frac{s(t_k) - \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)} = \frac{s(t_k) - KE_0}{KE_0}$$

On trouve ainsi

$$D_k = e^{-\frac{k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

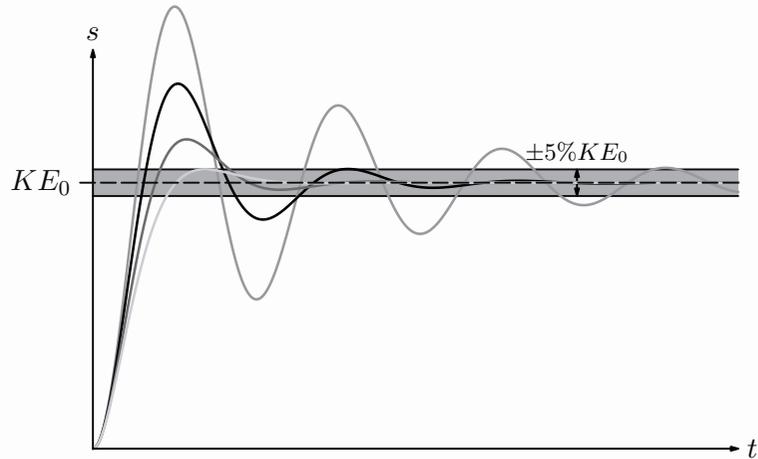
### Temps de réponse à 5 %

Le temps de réponse à 5 %, noté  $t_{5\%}$ , est le temps nécessaire pour que le signal de sortie atteigne la valeur finale à 5 % près :

- Pour un système apériodique, la recherche de ce temps de réponse se traduit par la résolution de l'équation  $s(t_{r5\%}) = 0,95KE_0$ , cette équation ayant une unique solution, comme on peut l'observer sur la figure 9.8.
- Pour les systèmes pseudopériodiques, il faut, cette fois, trouver l'ensemble des solutions de l'équation  $0,95KE_0 \leq s(t) \leq 1,05KE_0$ , comme illustré sur la figure 9.11. Le temps de réponse à 5 % est le majorant de l'ensemble des solutions.



Le temps de réponse réduit est un nombre réel sans dimension !



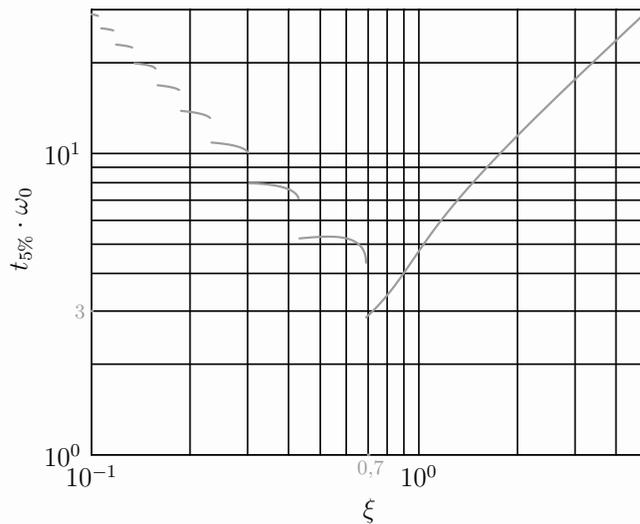
**Figure 9.11 Recherche des points pour lesquels il y a franchissement de la bande  $\pm 5\%$**

La résolution analytique n'est pas possible pour les systèmes pseudopériodiques. Cependant, par résolution numérique, on peut tracer un abaque permettant de déterminer un nombre sans dimension appelé temps de réponse réduit.

**Définition**

On appelle **temps de réponse réduit** le produit du temps de réponse et de la pulsation propre du système non amorti

La figure 9.12 représente l'évolution du temps de réponse réduit  $\omega_0 t_{5\%}$  en fonction du coefficient d'amortissement  $\xi$ .



**Figure 9.12 Abaque du temps de réponse réduit  $\omega_0 t_{5\%}$  en fonction du coefficient d'amortissement  $\xi$**

**Le plus rapide**

L'analyse des courbes des figures 9.8 et 9.11 permet de proposer comme système d'ordre 2 le plus rapide celui qui a un premier dépassement égal à 5%.

$$D_1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,05$$

La résolution de cette équation fournit  $\xi \approx 0,69$ , valeur que l'on retrouve bien sur l'abaque de la figure 9.12.

Le système du deuxième ordre le plus rapide est donc le système pseudopériodique de coefficient d'amortissement  $\xi \approx 0,7$  et on a  $\omega_0 t_{5\%} \approx 3$ .

Si le cahier des charges ne tolère aucun dépassement, le système d'ordre 2 le plus rapide est alors dans ce cas le système apériodique critique.

Synthèse du système d'ordre 2 le plus rapide :

- Dépassements autorisés en réponse indicielle

$$\xi \approx 0,7 \quad \text{et} \quad \omega_0 t_{5\%} \approx 3$$

- Dépassements interdits en réponse indicielle

$$\xi = 1 \quad \text{et} \quad \omega_0 t_{5\%} \approx 5$$

## 9.4.2 Étude fréquentielle

On obtient la fonction de transfert harmonique en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans la fonction de transfert  $H(p)$  d'un système d'ordre 2

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}}$$

Comme  $G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$ , pour avoir l'expression du gain, il suffit de connaître l'expression du module  $H(j\omega)$  qui est

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (7)$$

Pour la phase, par définition, on écrit

$$\varphi(\omega) = -\arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right) \quad (8)$$

Le complexe  $z = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}$  a un argument compris entre 0 et  $\pi$  :

- si  $\omega < \omega_0$ , les parties réelles et imaginaires de  $z$  sont positives donc son argument est compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  ; on en déduit

$$\forall \omega < \omega_0 \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

- si  $\omega = \omega_0$ , la partie réelle de  $z$  est nulle et on a

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$

- si  $\omega > \omega_0$ , la partie imaginaire de  $z$  est toujours positive mais sa partie réelle est négative ; son argument est cette fois compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$  et on en déduit

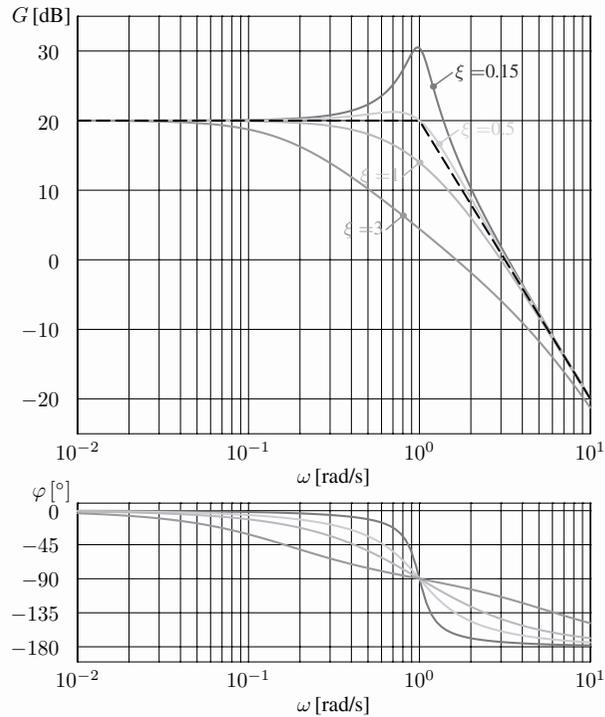
$$\forall \omega > \omega_0 \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) - \pi$$

À partir des expressions du module (7) et de la phase (8), on est en mesure de tracer les deux diagrammes de BODE.

La figure 9.13 propose les diagrammes de BODE de systèmes du deuxième ordre pseudopériodique et apériodique :



Pour un complexe  $z = a + jb$ , la commande `atan2(b,a)`, en langage PYTHON, renvoie une valeur dans  $]-\pi; +\pi[$ , tout comme l'instruction `atan(b,a)` dans SCILAB.



**Figure 9.13 Diagrammes de BODE pour des systèmes d'ordre 2 pseudopériodiques et apériodiques, de gain  $K = 10$  et de pulsation propre  $\omega_0 = 1$  rad/s.**

Le phénomène de résonance est approfondi page 270.

- En première analyse, on voit que la courbe de gain a une pente nulle pour des pulsations faibles et une pente de  $-40$  décibels par décade pour les pulsations élevées. On remarque surtout la présence d'un maximum sur la courbe de gain lorsque le coefficient d'amortissement est petit. Cette particularité traduit l'apparition du phénomène de **résonance**. Le maximum sur la courbe de gain est appelé **pic de résonance**.
- La courbe de phase quant à elle, décroît comme prévue de  $0^\circ$  à  $-180^\circ$ . On peut noter que plus les systèmes sont oscillants, plus le passage de  $0^\circ$  à  $-180^\circ$  se fait rapidement.

### Diagrammes de BODE asymptotiques

On se propose de voir si, comme pour les systèmes d'ordre 1, on peut mettre en place des diagrammes asymptotiques. On détermine alors une approximation de la fonction de transfert harmonique. On réalise cette approximation aux basses pulsations en considérant  $\omega \ll \omega_0$  et aux pulsations élevées pour  $\omega \gg \omega_0$ .

On note  $H_a(j\omega)$  la fonction de transfert approximée.

- Lorsque  $\omega \ll \omega_0$ , on recherche la limite de  $H(j\omega)$  lorsque  $\omega$  tend vers 0

$$H_a(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} H(j\omega) = K$$

- Lorsque  $\omega \gg \omega_0$ , la partie réelle du dénominateur tend vers  $-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$  et la partie imaginaire devient négligeable devant la partie réelle

$$H_a(j\omega) = \frac{-K\omega_0^2}{\omega^2}$$

Le tableau 9.3 récapitule les expressions du gain asymptotique et de la phase asymptotique.

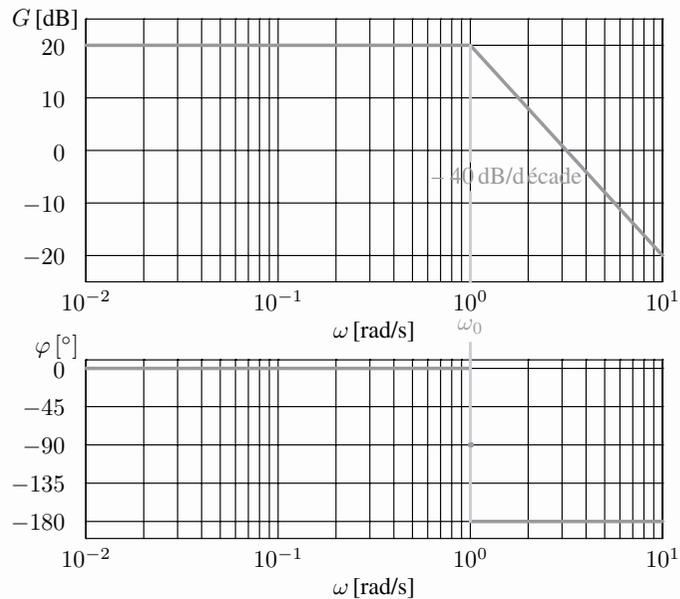


Les expressions  $G_{dB_a}(\omega)$  et  $\varphi_a(\omega)$  sont respectivement les équivalents en zéro et en l'infini des expressions (7) et (8).

$\omega$	$\omega_0$	
$H_a(j\omega)$	$K$	$\frac{-K\omega_0^2}{\omega^2}$
$G_{dB_a}(\omega)$	$20 \log K$	$20 \log K - 40 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$
$\varphi_a(\omega)$	$0^\circ$	$-180^\circ$

**Table 9.3 Expressions du gain et de la phase pour la forme approchée de la fonction de transfert.**

À partir de ces résultats, on reprend le modèle représenté sur la figure 9.13 pour effectuer les tracés de la figure 9.14 :



**Figure 9.14 Diagrammes de BODE asymptotiques du système d'ordre 2 précédent.**

- On repère en premier lieu la position de la pulsation de cassure  $\omega_0$ , et il est conseillé de tracer une verticale traversant les deux figures.
- Pour  $\omega \in ]0; \omega_0]$ , la courbe de gain est approchée par une demi-droite de pente nulle et d'ordonnée  $20 \log K$ , que l'on trace.
- Pour  $\omega \in [\omega_0; +\infty[$ , la courbe de gain est approchée par une demi-droite de pente  $-40\text{dB}$  par décade puisque le tracé s'effectue sur une échelle semilogarithmique. Cette demi-droite est tracée à partir du seul point connu, de coordonnées  $(\omega_0, 20 \log K)$ .
- Le diagramme de phase se résume à deux demi-droites horizontales d'ordonnées respectives  $0^\circ$  et  $-180^\circ$ .

Ce diagramme peut être complété par la valeur de la phase pour la pulsation de cassure  $\omega_0$ , dont on a précédemment déterminé la valeur  $\varphi(\omega_0) = -90^\circ$ .

#### Tracé affiné pour les systèmes aperiodiques

Les diagrammes asymptotiques de BODE de la figure 9.14 sont valables pour tous les systèmes d'ordre 2, qu'ils soient pseudopériodiques ou aperiodiques, mais on peut affiner les tracés pour les systèmes aperiodiques.

En effet, leur fonction de transfert s'écrit comme produit de deux fonctions de transfert d'ordre 1

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}$$

Si on suppose  $\tau_2 < \tau_1$  et en notant  $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$  et  $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$ , on a alors  $\omega_1 < \omega_2$  et on pose

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \times H_2(j\omega)$$

$$\text{avec } H_1(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)} \text{ et } H_2(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega\tau_2)}$$

Compte tenu des propriétés du logarithme et de l'argument d'un complexe, on en déduit que le tracé asymptotique d'un ordre 2 apériodique se réalise comme la somme des deux diagrammes de systèmes d'ordre 1 :

- pour les gains

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log |H_1(j\omega)| + 20 \log |H_2(j\omega)|$$

- pour les phases

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$$

On reprend les expressions du tableau 9.1 de la page 10 pour remplir le tableau 9.4, en simplifiant les écritures ; l'unité de pente est prise égale à 20dB/décade :

- une pente notée (0) correspond à une horizontale ;
- une pente notée (+1) est de +20 dB/décade ;
- une pente notée (-1) est de -20 dB/décade ;
- une pente notée (-2) est de -40 dB/décade ;
- ...

	$\omega$	$\omega_1$	$\omega_2$	
$H_1(j\omega)$	$G_{dB_1}(\omega)$	20 log K		
	pente	(0)	(-1)	
	$\varphi_1(\omega)$	0°	-90°	
$H_2(j\omega)$	$G_{dB_2}(\omega)$	0		
	pente	(0)	(-1)	
	$\varphi_2(\omega)$	0°	-90°	
$H(j\omega)$	$G_{dB}(\omega)$	20 log K		
	pente	(0)	(-1)	(-2)
	$\varphi(\omega)$	0°	-90°	-180°

**Table 9.4 Pente des gains et valeurs des phases pour un système d'ordre 2 apériodique.**

À partir de ce tableau que l'on parcourt de la gauche vers la droite, on peut tracer les diagrammes de BODE asymptotiques, comme sur la figure 9.15 :

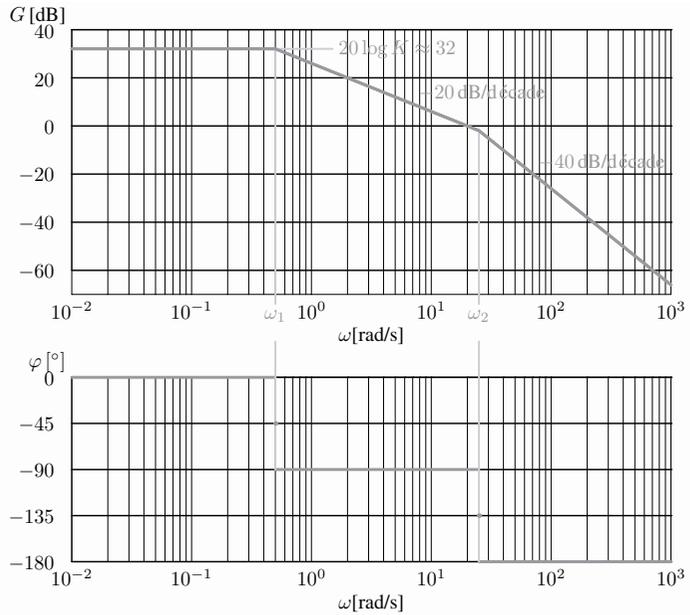
- on commence par le tracé des verticales au niveau des pulsations de cassure, en  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ;
- la première et unique valeur connue pour le gain concerne la plus petite des pulsations de cassure, de valeur  $20 \log K$ , et l'on repère ainsi sur le diagramme en gain le seul et unique point *a priori* connu ;
- du premier point connu, de coordonnées  $(\omega_1, 20 \log K)$  ou  $(\omega_1, 0^\circ)$ , on trace vers la gauche les deux demi-droites, ici de pente (0) pour le gain et d'ordonnée 0° pour la phase ;



Toujours classer les pulsations de cassure de la plus petite à la plus grande !  
Affecter le gain statique au système de plus petite pulsation !

La pente de la demi-droite la plus à gauche ne sera pas toujours nulle...

- toujours du même point connu, on trace vers la droite les segments jusqu'à la verticale d'abscisse  $\omega_2$ , ici de pente  $(-1)$  pour le gain et d'ordonnée  $-90^\circ$  pour la phase ;
- issu du nouveau point repéré sur la verticale d'abscisse  $\omega_2$  pour le gain, on trace vers la droite la demi-droite, ici de pente  $(-2)$ , et on trace pour la phase la demi-droite ici d'ordonnée  $-180^\circ$ .

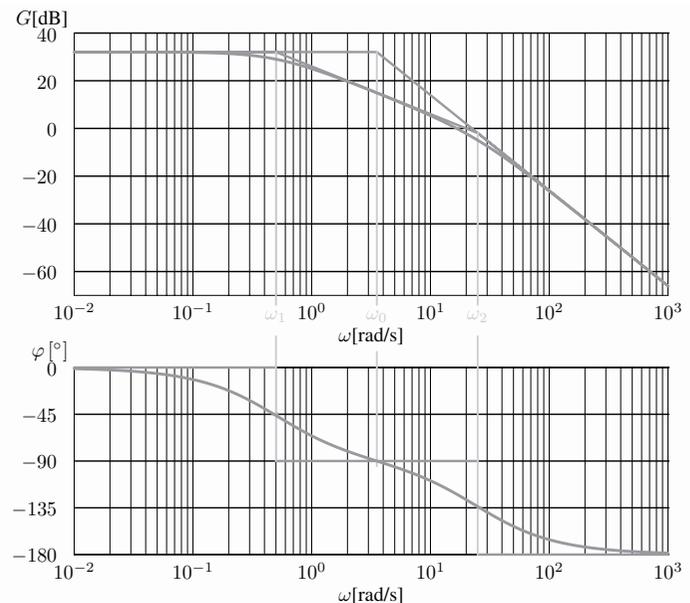


**Figure 9.15 Diagrammes de Bode asymptotiques d'un système d'ordre 2 apériodique, avec  $K = 40$ ,  $\tau_1 = 2$  s et  $\tau_2 = 0,04$  s.**

Avant de terminer cette section, on n'oublie pas que pour la pulsation propre du système non amorti  $\omega_0$ , on a  $\varphi(\omega_0) = -90^\circ$ , avec  $\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$ .

Comme on est sur une échelle logarithmique, la pulsation  $\omega_0$  est au milieu du segment  $[\omega_1; \omega_2]$ . On peut alors ajouter sur le diagramme de phase le point  $(\omega_0, -90^\circ)$ .

La figure 9.16 propose la superposition des tracés asymptotiques et réels et permet de se faire une opinion sur la pertinence des approximations faites.



**Figure 9.16 Diagrammes de Bode asymptotique et réel du système d'ordre 2 apériodique précédent.**

Si  $\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$ , alors  $\log \omega_0 = \frac{1}{2}(\log \omega_1 + \log \omega_2)$

### Résonance

En étudiant la fonction  $G_{dB}$ , on montre que cette fonction possède un maximum si le coefficient d'amortissement  $\xi$  est inférieur à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ce maximum est atteint pour une pulsation appelée **pulsation de résonance**, notée  $\omega_r$ , telle que

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

On peut déterminer alors la valeur du gain maximum

$$G_{dB}(\omega_r) = 20 \log \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Comme aux basses pulsations, le gain tend vers  $20 \log K$ , on trouve alors la hauteur du pic de résonance

$$G_{dB}(\omega_r) - 20 \log K = 20 \log \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

La hauteur du pic de résonance n'étant significative que pour des valeurs de  $\xi$  faible, en général  $\xi < 0,2$ , on peut alors écrire

$$G_{dB}(\omega_r) - 20 \log K \approx 20 \log \frac{1}{2\xi}$$

Pour les systèmes pseudopériodiques, le tracé asymptotique ne rend pas compte de la présence éventuelle d'un maximum sur la courbe de gain. Pour déterminer l'allure du diagramme réel de gain, il faut déterminer les coordonnées  $(\omega_r, G_{dB}(\omega_r))$  du pic de résonance.

Si ce phénomène existe, alors l'amplitude des oscillations du signal de sortie du système étudié est plus importante que celle du signal d'entrée. On a donc amplification du signal. La résonance peut être recherchée dans le cas des oscillateurs harmoniques ou plus simplement dans les instruments de musique. Cependant, ce phénomène est souvent craint car il peut provoquer la destruction du système, comme le montre cet essai sur un hélicoptère. (<http://www.youtube.com/v/RihcJR0zvfM>) C'est également la résonance qui est responsable de l'effet Larsen, bien connu des musiciens.

Pour éviter l'apparition de la résonance, on a *a priori* deux possibilités :

- supprimer la pulsation de résonance en augmentant suffisamment le coefficient d'amortissement ;
- s'assurer que la pulsation de résonance n'est pas dans la gamme des sollicitations possibles du système.

### 9.4.3 Synthèse des différents comportements

Le comportement d'un modèle du deuxième ordre dépend de la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  : le tableau ci-dessous fait ressortir les trois principaux types de systèmes pour les servomécanismes

$\xi$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$+\infty$
réponse indicielle	dépassements			
réponse harmonique	résonance			
	système mal amorti	système amorti	système hyperamorti	

**Table 9.5** Les différents comportements d'un modèle du deuxième ordre.



Si le coefficient d'amortissement  $\xi$  est petit, alors la pulsation de résonance est proche de la pulsation propre du système non amorti.



Pour de petites valeurs de  $\xi$ , on peut approximer le maximum par  $20 \log K Q$ , avec  $Q$  le facteur de qualité.

### Les principales pulsations

- $\omega_0$  : pulsation propre du système non amorti (ou pulsation propre)
- $\omega_p$  : pulsation propre du système (ou pseudopulsation), pour  $\xi < 1$

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

- $\omega_r$  : pulsation de résonance, pour  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

## 9.5 Système intégrateur

### Définition

On appelle **système intégrateur** un système décrit par une fonction de transfert du type

$$H(p) = \frac{K}{p}$$

Ce système est instable. En effet, pour une entrée en échelon d'amplitude  $E_0$  et en supposant les conditions initiales nulles, la réponse  $s$  est de la forme

$$s(t) = K E_0 t$$

Le signal de réponse n'est clairement pas borné, d'où l'instabilité. On ne peut donc pas trouver de caractéristiques temporelles pour ce système.

On peut cependant étudier sa réponse harmonique. En effet, on place en entrée un signal sinusoïdal du type

$$e(t) = E_0 \sin(\omega t)$$

En supposant toujours  $s(0) = 0$ , le signal de sortie est de la forme

$$s(t) = \frac{K E_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t))$$

Le régime est sinusoïdal en sortie. On peut donc trouver le gain et la phase de la réponse harmonique  $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$  d'un intégrateur

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ$$

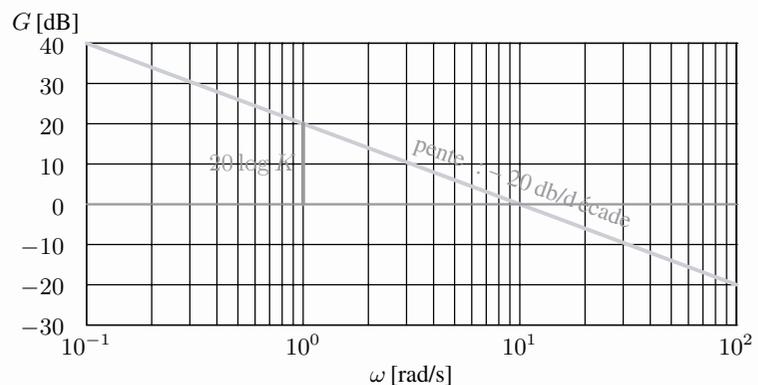


Figure 9.17 Diagramme de Bode en gain d'un intégrateur, de gain statique  $K = 10$ .



Tracés asymptotiques et tracés réels sont confondus pour un intégrateur !

On obtient alors les diagrammes de BODE de la figure 9.17 :

- on détermine les coordonnées d'un point quelconque du diagramme en gain, en calculant son module suivant la valeur de la pulsation  $\omega$ . Par exemple, pour  $\omega = 1$  rad/s, on a

$$G_{dB}(1) = 20 \log K$$

- la courbe en gain est la droite de pente  $-20$  dB/décade passant par ce point ;
- la phase est constante est vaut  $-90^\circ$ .

## 9.6 Identification de modèles de comportement

La première démarche à suivre avant de commencer toute identification c'est de vérifier qu'on est bien en présence d'un système linéaire.

Autant jusqu'ici dans ce chapitre, on est parti d'équations différentielles pour caractériser les modèles, autant on se place pour cette section dans l'univers de l'expérimentation ; le point de départ est une ou plusieurs courbes issues de mesures faites avec des capteurs.

L'analyse des courbes de réponse à un échelon ne permet de proposer que des modèles d'ordre 1 ou 2.

Seule l'analyse de courbe de réponses fréquentielles permet d'élaborer un modèle plus « fin ».

### 9.6.1 Exploitation d'une réponse à un échelon

#### Détermination du gain statique d'un modèle

Quelque soit l'ordre du système étudié, on sait que, pour un système stable, si l'entrée est un échelon d'amplitude  $E_0$ , alors le signal de sortie tend vers  $KE_0$ . La valeur finale permet donc de trouver la valeur du gain statique  $K$  de la fonction de transfert que l'on cherche à identifier.

#### Détermination de l'ordre du modèle

Pour déterminer l'ordre du modèle de la fonction de transfert, on regarde la pente à l'origine de la courbe de réponse :

- si la pente est nulle, alors on propose un modèle d'ordre 2 ;
- sinon, un modèle d'ordre 1 devrait convenir.

Lorsqu'on a déterminé l'ordre du modèle, comme on a par ailleurs trouver la valeur du gain statique, il ne reste donc plus qu'à déterminer la constante de temps  $\tau$  si on a un modèle d'ordre 1 ou le coefficient d'amortissement  $\xi$  et la pulsation propre  $\omega_0$  si c'est un modèle d'ordre 2.

#### Détermination de la constante de temps

On a à notre disposition trois méthodes pour trouver la constante de temps d'un modèle du premier ordre :

- le temps de réponse à 5 % ;
- le temps mis pour atteindre 63 % de la valeur finale ;
- la tangente à l'origine.

Quand les signaux mesurés sont bruités, il est souvent difficile d'exploiter la tangente à l'origine. On utilise plutôt le temps mis pour atteindre 63 % de la valeur finale. En effet, on sait que pour un système du premier ordre on a

$$s(\tau) \approx 0,63KE_0$$

La courbe de réponse est tracée à partir d'une acquisition d'un signal faite à une fréquence donnée, donc la pente à l'origine n'est jamais réellement nulle. Il faut donc comprendre pente nulle comme une pente qui varie peu sur les premiers instants de l'acquisition.



Il est conseillé d'utiliser au moins deux de ces critères pour déterminer la constante de temps.

La lecture de la courbe de réponse permet alors de trouver le constante de temps  $\tau$ , comme l'illustre l'exemple de la figure 9.18.

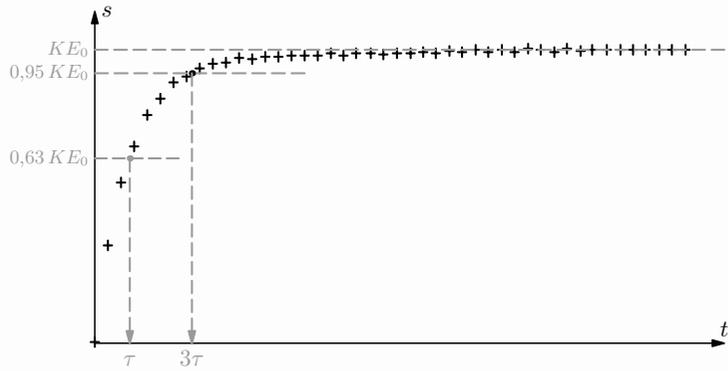


Figure 9.18 Exemple de détermination de la constante de temps  $\tau$

Cette détermination peut être corroborée en exploitant la valeur du temps de réponse à 5 %. On sait en effet que pour un système d'ordre 1

$$t_{5\%} \approx 3\tau$$

Si les deux valeurs trouvées pour  $\tau$  sont très différentes, c'est soit que le système n'est pas linéaire, soit que le système est d'ordre supérieur ou égal à 2.

### Détermination du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre

Cette détermination n'est possible que pour des systèmes pseudopériodiques car la détermination du coefficient d'amortissement se fait à partir des dépassements de la courbe de réponse.

Pour déterminer le coefficient d'amortissement  $\xi$ , on utilise soit l'abaque de la figure 9.19, soit l'expression suivante

$$\xi = \left( 1 + \frac{k^2 \pi^2}{\ln(\Delta_k)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

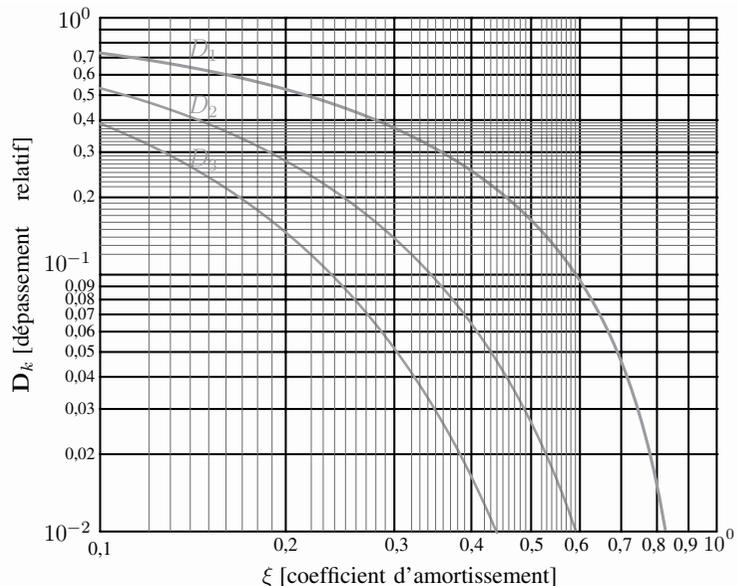


Figure 9.19 Abaque des trois premiers dépassements relatifs



Pour un comportement de type ordre 2 aperiodique, il est possible de proposer un modèle d'ordre 1 lorsque l'amortissement est élevé.

Les dépassements sont cotés sur la figure 10 page 17.

L'unité de pente est prise égale à 20 dB/décade.



S'il n'y a apparemment pas de corrélation entre gain et phase, c'est soit qu'un zéro est identique à un pôle, soit qu'il y a un souci de valeurs...

L'abaque des dépassements relatifs s'utilise de la manière suivante :

- on détermine la valeur du dépassement relatif à la valeur finale, en pourcentage ;
- on reporte sur l'ordonnée la valeur trouvée ;
- on lit en abscisse la valeur du coefficient d'amortissement, qui dépend de plus du rang du dépassement étudié.

Par exemple, un dépassement de 5 % est observé :

- s'il s'agit du premier dépassement,  $\xi \approx 0,70$  ;
- s'il s'agit du deuxième,  $\xi \approx 0,42$  ;
- s'il s'agit du troisième,  $\xi \approx 0,30$ .

Pour trouver la valeur de la pulsation propre, on dispose :

- du temps de pic  $t_{pic} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$  ;
- de l'abaque du temps de réponse réduit, tel celui de la figure 9.12, à la page 18.

## 9.6.2

## Exploitation de la réponse fréquentielle

La lecture de diagrammes de BODE obtenus expérimentalement permet de déterminer la forme de la fonction de transfert du système à modéliser, en s'appuyant sur la forme de référence suivante

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + \dots + a_m p^m}{1 + \dots + a_k p^k}$$

On garde à l'esprit, suite au tracé des diagrammes asymptotiques de Bode, qu'il y a une corrélation entre les pentes des asymptotes en gain et les ordonnées des horizontales sur le diagramme de phase :

- ...
- à une pente (+1) correspond une phase de  $+90^\circ$  ;
- à une pente (0) correspond une phase de  $0^\circ$  ;
- à une pente (-1) correspond une phase de  $-90^\circ$  ;
- à une pente (-2) correspond une phase de  $-180^\circ$  ;
- ...

On procède alors de la manière suivante, en vérifiant à chaque instant la correspondance énoncée précédemment :

- On regarde en premier les diagrammes du côté des pulsations les plus petites et on détermine la classe  $\alpha$  du système étudié en fonction de la pente constatée.
- On regarde en deuxième du côté des pulsations les plus grandes et on détermine la différence entre l'ordre  $n = \alpha + k$  et la puissance du polynôme du numérateur :
  - si on a le couple  $((-2), -180^\circ)$ , alors  $n - m = 2$  ;
  - si on a le couple  $((-3), -270^\circ)$ , alors  $n - m = 3$  ;
  - ...
- On parcourt les courbes de la gauche vers la droite :
  - si la courbe en phase tend à augmenter, accompagnée d'un redressement de la courbe en gain, c'est qu'il faut augmenter la puissance du numérateur ;
  - si seule la courbe de gain présente une bosse, alors la phase plonge probablement de  $180^\circ$  et le dénominateur comporte un ordre 2 résonant ;
  - on propose ainsi d'augmenter la puissance du numérateur et du dénominateur en fonction des variations constatées.

Les valeurs des pulsations se choisissent assez bien lorsque les pulsations de cassure sont suffisamment éloignées les unes des autres, et sont proposées par tâtonnements sinon.

La valeur du gain statique se détermine du côté des basses pulsations.

En conclusion, c'est la superposition des courbes expérimentales et des courbes obtenues à l'aide du modèle proposé qui permet d'émettre un avis sur la pertinence de l'identification effectuée.

## Synthèse

### Connaissances

Je sais définir les mots ou expressions :

- modèle d'ordre 0, 1, 2,  $\dots$ ,  $n$ .
- gain, gain statique
- constante de temps
- modèle d'ordre 2 :
  - apériodique ;
  - pseudopériodique.
- coefficient d'amortissement
- pulsation :
  - de cassure ;
  - propre ;
  - propre du modèle non amorti ;
  - de résonance ;
  - de coupure.
- pseudopulsation
- facteur de qualité
- temps de pic
- pic de résonance
- échelle linéaire, échelle logarithmique
- octave, décade
- décibel
- diagrammes de BODE, diagrammes de BODE asymptotiques

### Savoir-faire

Je sais

- tracer et caractériser la réponse indicielle d'un modèle du premier ordre
- reconnaître les réponses indicielles d'un système d'ordre 1 ou 2
- tracer les diagrammes de BODE asymptotiques d'un système défini par sa fonction de transfert
- superposer un tracé asymptotique à un diagramme réel
- décrire l'évolution d'une grandeur par la lecture d'une réponse
- renseigner les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement

## Exercices d'application

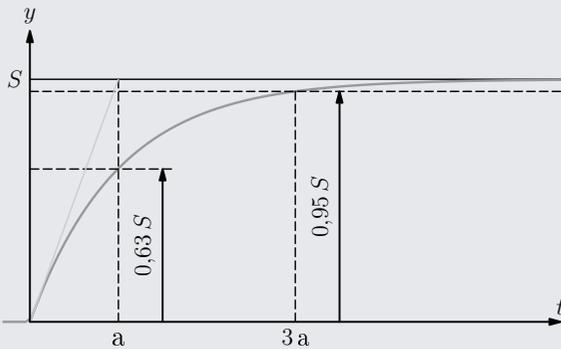
### 9.1 Première tentative d'identification

On considère un système inconnu d'entrée  $x$  et de sortie  $y$ , schématisé comme suit



1. Comment s'appelle un tel schéma ?

Pour avoir une idée de son comportement, on le sollicite et on obtient la courbe de réponse ci-dessous, annotée par le manipulateur



La réponse du système étudié.

2. Proposer un modèle de comportement.
3. Est-il possible de déterminer le temps de réponse à 5 % de ce système ?

### 9.2 Réponses temporelles d'un modèle d'ordre 1

On considère un modèle d'ordre 1 de fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

1. Que représentent les paramètres  $K$  et  $\tau$  ?
2. Donner la forme la plus générale de la réponse  $y_e$  d'un tel modèle à une sollicitation  $x$  en échelon d'amplitude  $A$ .
3. Que devient l'expression de la question précédente en réponse indicielle avec des conditions initiales nulles ?

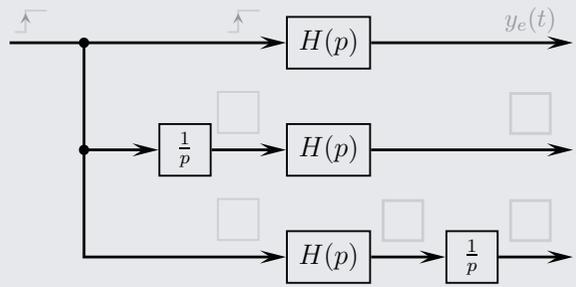
On considère pour la suite de l'exercice les conditions initiales toujours nulles.

4. Quels sont les liens entre les sollicitations par une impulsion de Dirac, un échelon et une rampe ?  
Peut-on alors imaginer une sollicitation en parabole ?

Pour un système linéaire, la fonction de transfert s'exprime à l'aide d'une fraction rationnelle, et on rappelle que la multiplication des polynômes est commutative.

On appelle  $y_d$ ,  $y_e$  et  $y_r$  les réponses du modèle respectivement à un Dirac, à un échelon et à une rampe.

5. Compléter les cinq cases vides de la figure ci-dessous, en prenant la première ligne comme modèle



6. Énoncer la propriété illustrée par la figure précédente.
7. Déterminer et tracer la réponse  $y_d$  du modèle d'ordre 1 à une impulsion de Dirac unitaire, en précisant la valeur de la sortie et la pente à l'origine.
8. Déterminer et tracer la réponse d'un tel modèle à une rampe de pente unitaire, en précisant :
  - la valeur et la pente à l'origine ;
  - l'équation de l'asymptote à l'infini.

### 9.3 Réponse harmonique d'un modèle d'ordre 1

On considère un modèle d'ordre 1, de gain statique  $K$  et de constante de temps  $\tau$ . On nomme  $F$  la fonction de transfert qui lui est associée.

On s'intéresse dans cet exercice à l'influence de ses deux caractéristiques sur sa réponse harmonique.

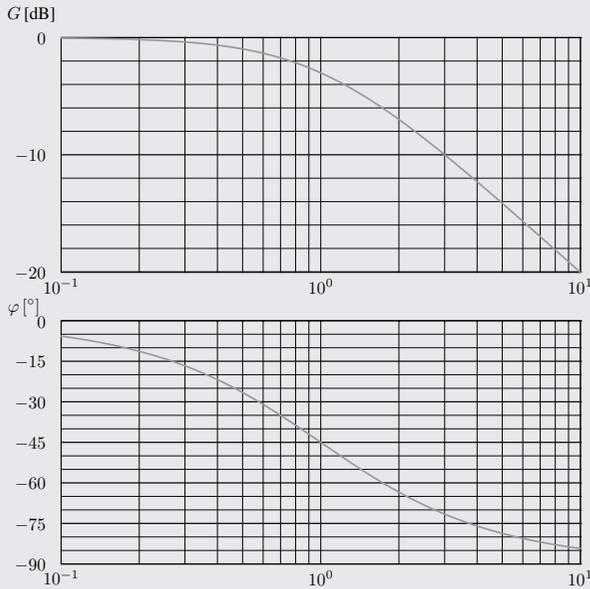
1. Quelle est l'expression de la fonction de transfert harmonique de ce modèle ?
2. Quelles sont les expressions du gain en décibels et de la phase ?  
Déduire de ces expressions l'influence du gain statique  $K$  sur :
  - la courbe en gain ;
  - la courbe en phase.
3. Donner l'expression de la pulsation de cassure notée  $\omega_0$  de ce système ?

On appelle pulsation réduite, que l'on note  $\omega_r$ , la fraction  $\frac{\omega}{\omega_0}$ .

4. Quelle est l'unité de la pulsation réduite ?
5. Exprimer en fonction de la pulsation réduite la fonction de transfert harmonique pour un gain statique unitaire.
6. Calculer à l'aide de cette dernière fonction les valeurs du gain et de l'argument pour les valeurs de la pulsation réduite proposées ci-dessous

$\omega_r$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$G$ [dB]									
$\varphi$ [°]									

7. Retrouver ces valeurs sur la figure ci-dessous et les comparer à celles proposées dans le tableau 9.2 de la page 258.



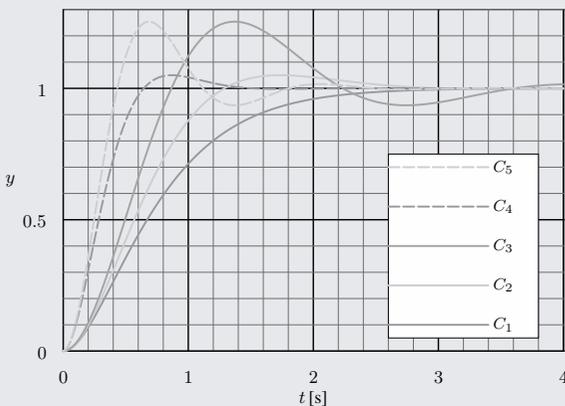
Le diagramme de BODE de référence pour un modèle d'ordre 1.

### 9.4 Recherche des caractéristiques d'un ordre 2

Soit un système décrit par la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{10 + 3,2p + 1,6p^2}$$

On propose les réponses de cinq modèles différents à un échelon d'amplitude 2.

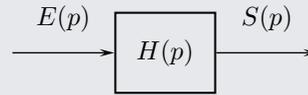


Cinq réponses différentes.

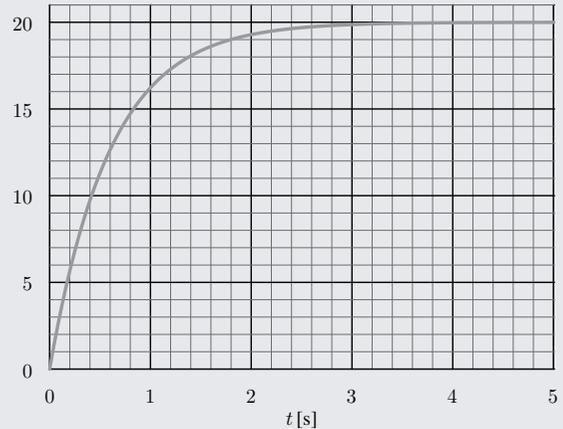
1. Laquelle de ces cinq réponses correspondant au système décrit par  $H(p)$  ?
2. En supposant que tous les modèles utilisés sont d'ordre 2, déterminer les caractéristiques des quatre autres modèles.

### 9.5 Modèle de représentation

Soit un système décrit par le schéma suivant



Afin de trouver son modèle de comportement, on soumet ce système à une entrée en échelon d'amplitude 2.



Réponse du système étudié à un échelon d'amplitude 2

1. Proposer un modèle de comportement possible pour le système testé. Donner la forme de la fonction de transfert correspondante.
2. Déterminer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert envisagée.

### 9.6 Relevés harmoniques d'un système

On réalise une succession d'essais harmoniques sur un système asservi en position angulaire, en faisant varier la fréquence  $f$  du signal d'entrée :

- le signal sinusoïdal d'entrée est tel que

$$e(t) = E_0 \sin(2\pi ft)$$

- son amplitude est fixée à  $5^\circ$ .

Pour chaque essai, on relève la valeur de l'amplitude  $S$  du signal de sortie et son déphasage temporel par rapport au signal d'entrée.

À l'issue de cette campagne d'essais, on établit le tableau de mesures suivant :

Fréquence	S	Déphasage
Hz	degré	ms
0,2	15,0	20
0,8	14,8	18
1,5	14,7	19
6	12,0	18
8	10,5	16
11	8,8	14
15	6,6	11
45	2,4	4,5
80	1,6	3,0
160	0,8	1,5

1. Calculer, pour chaque fréquence testée, la valeur du gain en décibel et de la phase en degré de la fonction de transfert.
2. Tracer les diagrammes de BODE expérimentaux.
3. Donner une forme possible pour la fonction de transfert du système étudié. Déterminer les valeurs numériques caractéristiques de cette fonction de transfert.

### 9.7 Identification d'un système

Un système asservi est décrit par le schéma ci-dessous :

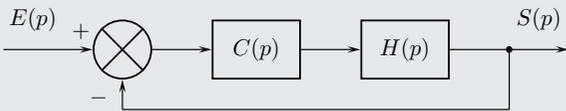


Schéma-bloc du système asservi

avec :

- $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur, tel que

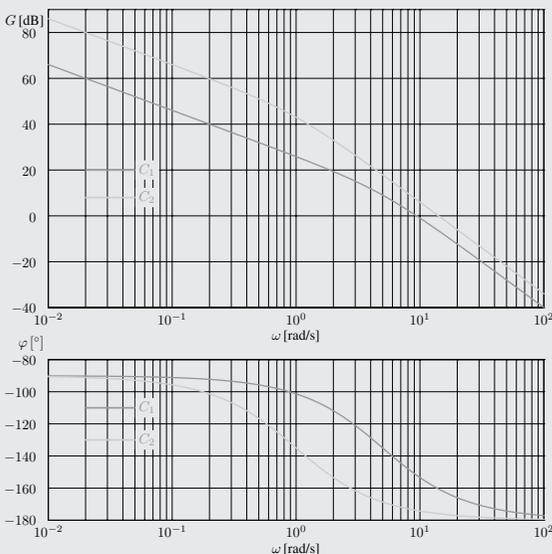
$$C(p) = 20 \left( 1 + \frac{1}{4p} \right)$$

- $H(p)$  la fonction de transfert du système commandé

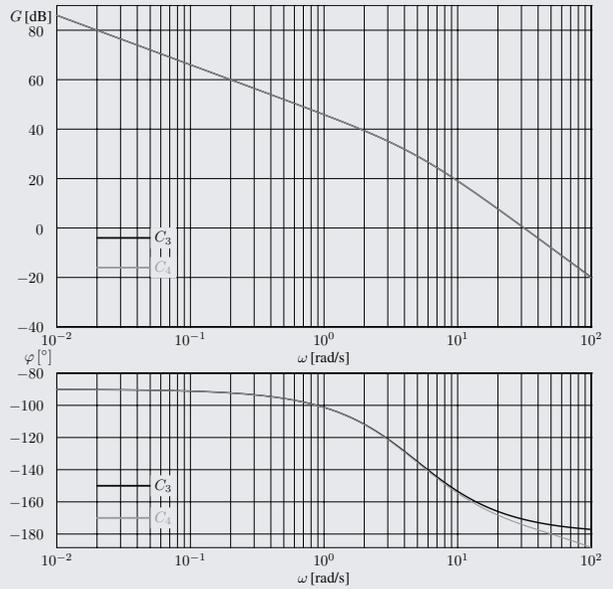
$$H(p) = \frac{40}{1 + 4,2p + 0,8p^2}$$

En vue d'une étude de stabilité, on a tracé les diagrammes de BODE de la fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $B(p)$ .

1. Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte  $B(p)$ .
2. Parmi les quatre couples de diagrammes de BODE proposés ci-dessous, déterminer en justifiant celui ou ceux correspondant à  $B(p)$ .



Les deux premières propositions



Les deux propositions suivantes

### 9.8 Diagrammes de BODE pour un système d'ordre 3

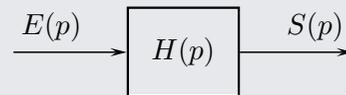
Soit un système d'entrée  $E(p)$ , de sortie  $S(p)$  et de fonction de transfert  $H(p)$  caractérisé par

$$H(p) = \frac{10}{p(1 + 0,6p + p^2)}$$

1. Trouver la classe de la fonction de transfert, puis déterminer la pulsation propre  $\omega_0$  et le coefficient d'amortissement  $\xi$ .
2. Tracer les diagrammes asymptotiques de BODE.
3. Tracer l'allure du diagramme réel de gain, en précisant les valeurs remarquables.

### 9.9 Lieux de transfert 1

Soit un système décrit par le schéma-bloc suivant



avec

$$H(p) = \frac{500}{(1 + 80p)(100 + 400p + 111p^2)}$$

1. Déterminer l'ordre et la classe de la fonction de transfert.
2. *A priori*, quelles sont les pentes de l'asymptote hautes pulsations et de l'asymptote basses pulsations du diagramme asymptotique de gain.
3. Quelles sont les phases aux basses et aux hautes pulsations ?
4. Tracer les diagrammes asymptotiques de BODE.
5. Préciser l'allure des courbes réelles.

**9.10 Lieux de transfert 2**

Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la fonction de transfert suivante

$$H(p) = \frac{2p^2 + 21p + 10}{50p \left(1 + 0,01p + \left(\frac{p}{90}\right)^2\right)}$$

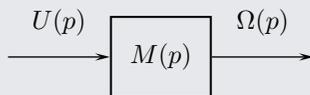
**9.11 Lieux de transfert 3**

Reprendre les questions de l'exercice 9.9 avec comme fonction de transfert

$$H(p) = \frac{70}{p(p^2 + 0,8p + 4)(100p + 7)}$$

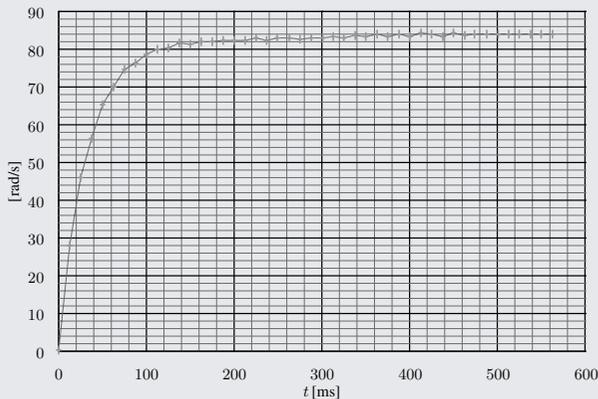
**Exercices d'approfondissement****9.12 Essai avec un moteur à courant continu**

Un moteur à courant continu peut être décrit par le schéma suivant :



On réalise un essai indiciel d'un moteur à courant continu qui met en rotation une charge.

La réponse obtenue est tracée sur la figure ci-dessous.



Échelon d'amplitude 12 Volts  
- fréquence d'acquisition : 80 Hz

1. Le nombre de points tracés correspond-il à la fréquence d'acquisition ?
2. Proposer un modèle de comportement pour le moteur.
3. Déterminer les valeurs des paramètres caractéristiques du modèle de comportement.

Les équations de fonctionnement d'un moteur à courant continu permettent d'établir que son modèle de connaissance est d'ordre 2, et on note

$$M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + Ap + Bp^2}$$

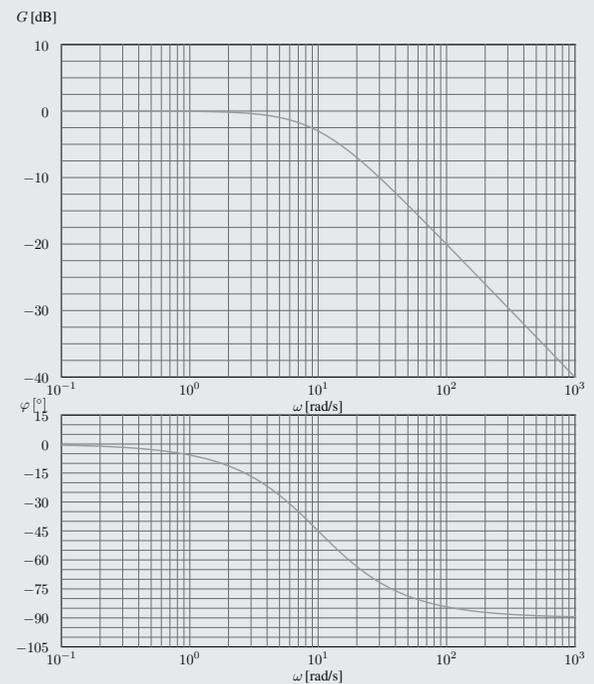
4. À la vue de la réponse du moteur, quel type de modèle d'ordre 2 proposer ?
5. Donner l'expression de la réponse indicelle d'un tel système.
6. Exprimer en conclusion les conditions vérifiées par les caractéristiques d'un modèle du deuxième ordre ayant ce type de réponse.

**9.13 Réponse sinusoïdale**

Soit un système décrit par la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + 0,1p}$$

La représentation du lieu de transfert de  $H(j\omega)$  dans les plans de BODE est fournie sur la figure cidessous.

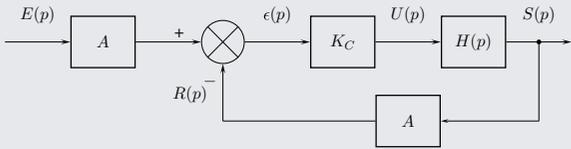


Les diagrammes de BODE

1. Si le signal d'entrée est un sinus de pulsation 0,5 rad/s, l'amplitude du signal de sortie est-elle atténuée par rapport à celle du signal d'entrée ? Justifier.
2. Le signal d'entrée est défini par  $e(t) = 10 \sin(t) + 2 \sin(30t)$ . Déterminer l'expression du signal de sortie. Conclure.

**9.14 Identification à partir d'une boucle fermée**

Le système étudié est modélisé par le schéma suivant :

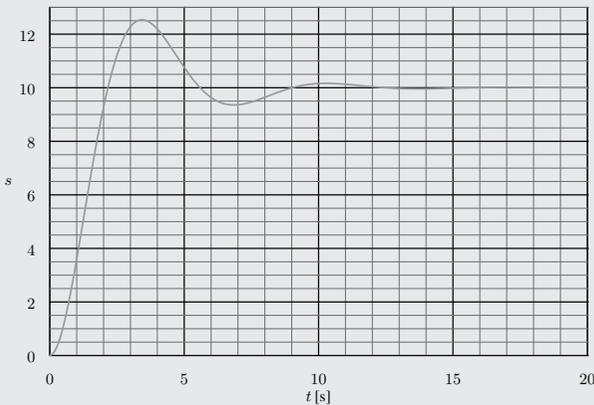


On souhaite déterminer un modèle de comportement du système en boucle ouverte.

La fonction de transfert du capteur et du transducteur est un simple gain tel que  $A = 0,2$ .

- On règle le gain du correcteur à  $K_C = 5$ .
- L'amplitude de l'échelon d'entrée est fixée à 10.

La réponse en boucle fermée du système est donnée sur la figure ci-dessous.



Réponse à un échelon d'amplitude 10

1. Quel peut être l'ordre du système en boucle fermée ?
2. Donner la forme générale de la fonction de transfert en boucle fermée.
3. Déterminer les paramètres caractéristiques de cette fonction de transfert.

4. Proposer une forme générale de  $H(p)$  compatible avec la fonction de transfert en boucle fermée ?
5. On suppose que  $H(p)$  n'a pas de zéro. Déterminer les paramètres caractéristiques de  $H(p)$ .
6. Quelle valeur doit-on donner à  $K_C$  pour que la réponse indicielle en boucle fermée soit la plus rapide possible ? Déterminer le temps de réponse correspondant.
7. Pourquoi n'a-t-on pas réalisé un essai en boucle ouverte ?

---

### 9.15 Transmission

Une transmission électro-hydraulique est schématisée sur la figure 1 et modélisée sous forme de schéma-blocs sur la figure 2 :

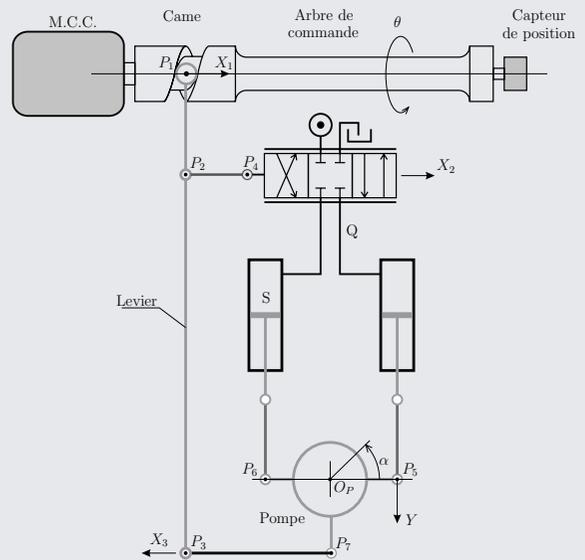


Figure 1 Schéma de la transmission

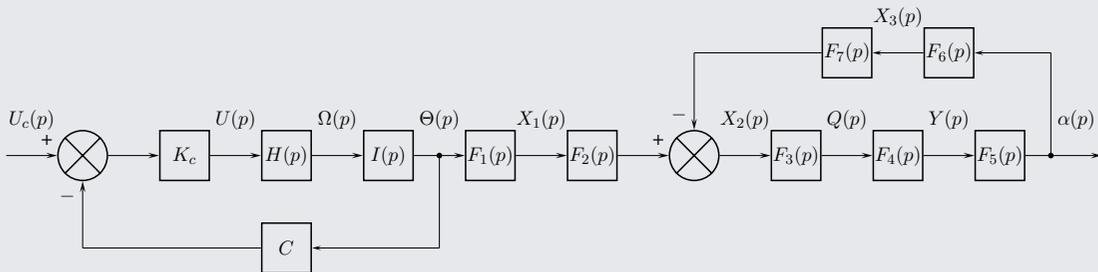


Figure 2 Schéma-blocs de la transmission

#### Éléments du cahier des charges

Deux performances concernent la génération de l'angle  $\alpha$

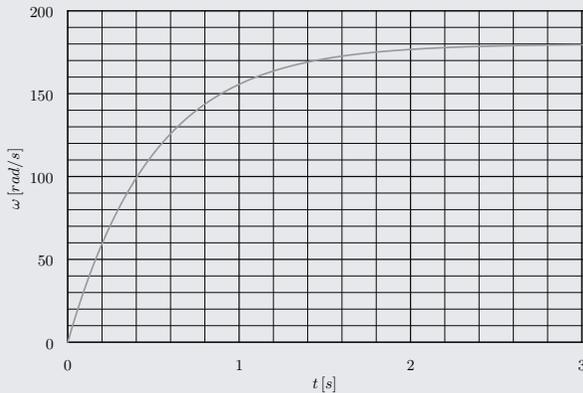
- Rapidité : temps de réponse à 5 % en position inférieur à 1 s ;
- Stabilité : pas de dépassement pour la réponse indicielle.

#### Donnée numérique

- $C = 2 \text{ V/rad}$

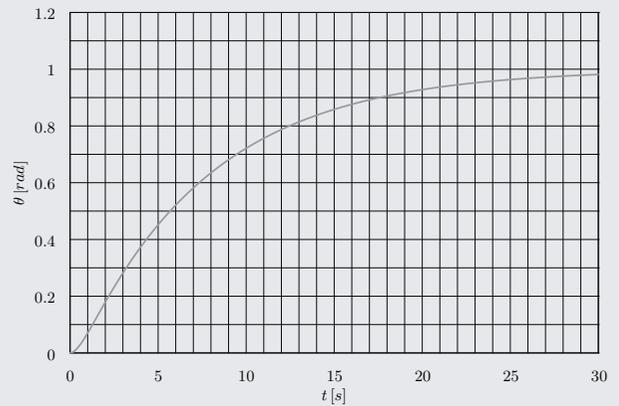
Le résultat d'une sollicitation en échelon du moteur électrique est proposé sur la figure 3.

1. A partir de la courbe de réponse fournie, proposer une expression pour la fonction de transfert  $H(p)$  du moteur.
2. Après avoir rappelé l'équation différentielle liant la position angulaire  $\theta(t)$  au taux de rotation  $\omega(t)$ , déterminer  $I(p)$ .
3. Déterminer la fonction de transfert  $\frac{\Theta(p)}{U_c(p)}$ , puis trouver l'expression et la valeur de son gain statique.



Réponse du moteur seul à un échelon d'amplitude 12 Volts

- La figure 4 représente l'évolution temporelle de  $\theta$  lorsque le signal  $u_c$  est un échelon de 2 Volts. Le gain du correcteur a été réglé lors de cette sollicitation à  $K_c = 4,2 \cdot 10^{-3}$ .
4. La valeur finale est-elle cohérente avec la valeur du gain statique précédemment déterminée ?
  5. Quelle valeur limite peut prendre  $K_c$  pour respecter le cahier des charges du point de vue stabilité ?
  6. Pour la valeur limite de  $K_c$  déterminée, trouver le temps de réponse à 5 %. Conclure.



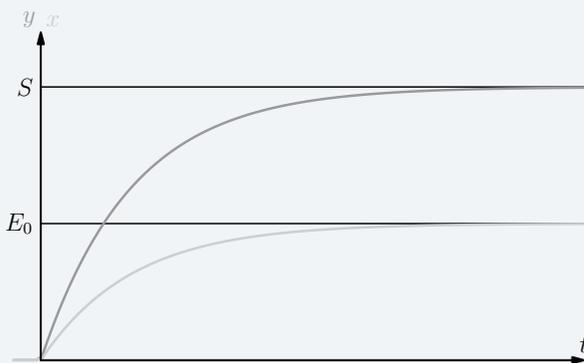
Réponse à un échelon d'amplitude 2 Volts

# Solutions des exercices

## Exercices d'application

### 9.1

- On reconnaît le premier élément graphique d'un schéma-blocs.
- Ce chapitre débute par l'affirmation « Analyser la réponse d'un système nécessite une parfaite connaissance de la sollicitation ». On peut lire et relire autant de fois que nécessaire l'énoncé, on ne connaît pas ici la nature de l'entrée  $x$  ! On demande alors la courbe représentative de la sollicitation superposée à la courbe de sortie et on obtient en réponse



- (Reprise) À première vue, on a alors affaire à un système proportionnel de gain statique  $K$  que l'on ne peut supposer être égal à 2 qu'à la condition d'une représentation des deux courbes avec une même échelle !
- Pour un système proportionnel, il n'y a pas besoin de critère pour qualifier sa rapidité vu qu'il n'y a pas de régime transitoire. On peut répondre si nécessaire que le temps de réponse est dans ce cas nul...

### 9.2

- Le paramètre  $K$  exprime le gain statique du système ; son unité dépend des unités des grandeurs physique d'entrée et de sortie. Le paramètre  $\tau$  est appelé « constante de temps » ; son unité est la seconde.
- On suppose la sollicitation débutant à la date  $t = t_0$ , la sortie valant  $y_e(t_0) = y_0$ . La forme la plus générale pour l'expression est obtenue dans ces circonstances et on a

$$y_e(t) - y_0 = KA \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right)$$

- Les modifications à apporter sont alors :
  - l'expression « réponse indicielle » implique un échelon unitaire, donc  $A = 1$  ;
  - les conditions initiales nulles signifient  $t_0 = 0$  et  $y_e(0) = 0$  L'expression précédente se simplifie et on obtient

$$y_e(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (1)$$

- Les trois entrées cités se déduisent les unes des autres par des relations d'intégration ou de dérivation par rapport au temps :

- par dérivations successives en partant de la rampe, on obtient l'échelon puis le dirac ;

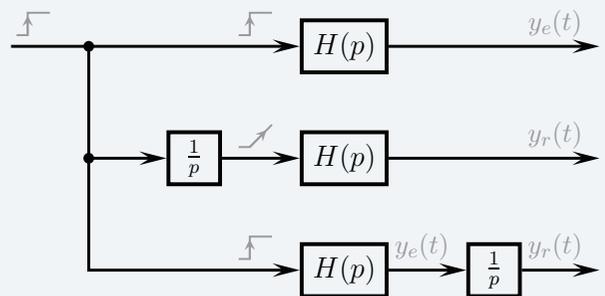
$$\text{rampe} \xrightarrow{\text{dérivation}} \text{échelon} \xrightarrow{\text{dérivation}} \text{dirac}$$

- par intégrations successives en partant du dirac, on obtient l'échelon puis la rampe.

$$\text{dirac} \xrightarrow{\text{intégration}} \text{échelon} \xrightarrow{\text{intégration}} \text{rampe}$$

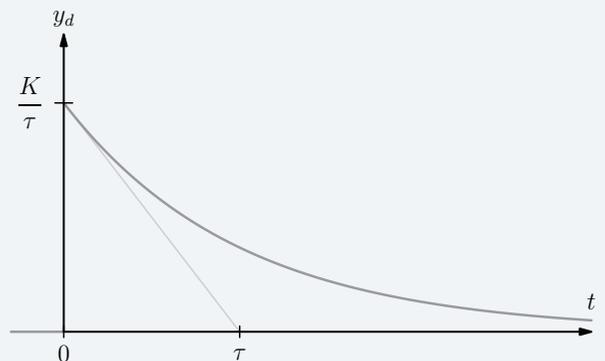
Une entrée en parabole est tout à fait imaginable, obtenue par intégration de l'entrée en rampe par rapport au temps.

- La figure complétée est tracée ci-dessous



- On exprime alors par exemple la propriété suivante : « La réponse d'un système linéaire à l'intégrale d'une sollicitation est exprimée par l'intégrale de la réponse de ce système linéaire à cette sollicitation »
- Le Dirac étant la dérivée de l'échelon, la réponse à un Dirac est obtenu en dérivant par rapport au temps l'équation (1)

$$y_d(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

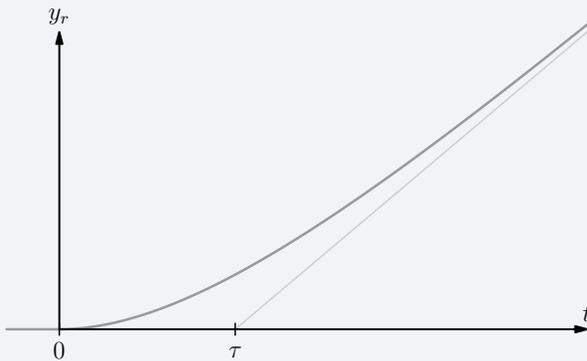


- La réponse à une rampe est obtenue en intégrant par rapport au temps l'équation (1), en supposant de plus  $y_r(0) = 0$

$$y_r = K \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

L'asymptote à l'infini a alors comme équation

$$y_a = K (t - \tau)$$



### 9.3

1. Soit  $F(p) = \frac{K}{1+\tau p}$  la fonction de transfert associé à ce modèle.

L'expression de la fonction de transfert harmonique s'obtient en substituant  $j\omega$  à  $p$  dans la fonction de transfert

$$F(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

2. L'expression du gain en décibels est

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \right)$$

On écrit cette expression différemment

$$G_{dB} - 20 \log(K) = -20 \log \left( \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \right)$$

On en déduit que changer de gain statique se traduit par un simple changement d'échelle pour les ordonnées, par une translation de  $20 \log K$ .

On rappelle l'expression de l'argument de  $F(j\omega)$

$$\arg(F(j\omega)) = \underbrace{\arg(K)}_{=0} - \arg(1 + j\tau\omega)$$

La phase est indépendante du gain statique.

3. La pulsation de cassure, notée ici  $\omega_0$ , est l'inverse de la constante de temps

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

4. La pulsation réduite  $\omega_r = \frac{\omega}{\omega_0}$  est un nombre sans unité.

5. L'expression de la fonction de transfert harmonique devient

$$H(j\omega_r) = \frac{1}{1 + j\omega_r}$$

6. Les valeurs demandées correspondent aux octaves successives autour de la pulsation de cassure localisée par  $\omega_r = 1$ . On les calcule avec les expressions du gain et de la phase

$$G_{dB}(\omega_r) = -20 \log \left( \sqrt{1 + \omega_r^2} \right)$$

$$\varphi(\omega_r) = -\arctan(\omega_r)$$

$\omega_r$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$G$ [dB]	0	0	0	-1	-3	-7	-12	-18	-24
$\varphi$ [°]	-3,5	-7,0	-14	-26,5	-45	-63,5	-76	-83	-86,5

7. On peut tout d'abord constater que les valeurs calculées se retrouvent sur les deux diagrammes fournis.

Les valeurs données lors du cours se retrouvent ensuite en comparant ces valeurs calculées aux valeurs correspondantes des asymptotes :

- pour le diagramme en gain, l'asymptote a une pente nulle avant la cassure et une pente d'environ  $-6$  dB/octave après la cassure :

- un gain de  $-1$  dB pour la première octave avant la cassure correspond bien à un point situé 1 dB sous l'asymptote ;

- un gain de  $-7$  dB pour la première octave après la cassure correspond bien à un point situé également 1 dB sous l'asymptote ;

- un gain nul pour la deuxième octave avant la cassure signifie un point sur l'asymptote, ce qui est le cas également pour la deuxième octave après la cassure.

- pour le diagramme de phase, on retrouve les égalités successives, obtenus pour une abscisse donnée en soustrayant la valeur de la phase correspondante à l'ordonnée de l'asymptote :

$$\begin{aligned} 0 - (-45) &= -(-90 - (-45)) \\ 0 - (-26,5) &= -(-90 - (-63,5)) \\ 0 - (-14) &= -(-90 - (-76)) \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

### 9.4

1. Tout d'abord, on écrit  $H(p)$  sous forme canonique

$$H(p) = \frac{1}{2(1 + 0,32p + 0,16p^2)}$$

On peut alors déterminer les caractéristiques de ce système d'ordre 2.

- gain statique :  $K = 0,5$

- pulsation propre non amortie :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,16}}$  soit  $\omega_0 = 2,5$  rad/s

- coefficient d'amortissement :  $\xi = \frac{0,32}{2} \times 2,5$  soit  $\xi = 0,4$

Comme  $K = 0,5$  et comme l'échelon est d'amplitude 2, alors la valeur finale de la réponse est 1. L'ensemble des courbes convient.

Comme on a un deuxième ordre pseudopériodique car  $\xi \leq 1$ , alors on élimine la courbe 1.

On peut déterminer le temps de pic ou instant du premier maximum :

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

On a donc ici  $t_{pic} \approx 1,37$ s. On élimine les courbes 4 et 5.

Enfin, le dépassement relatif est défini par

$$D = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

On calcule  $D \approx 0,25$ . On enlève la courbe 2 et ne reste que la courbe 3. On vérifie qu'elle remplit bien les trois conditions.

2. On constate à la lecture du jeu de courbes les propriétés suivantes :

- les cinq gains statiques sont identiques ;
- la recherche des dépassements montre que l'on a trois coefficients d'amortissements différents ;
- deux pulsations sont les doubles de deux autres, à chaque fois pour un coefficient d'amortissement donné.

On calcule et on regroupe les différentes caractéristiques dans un tableau.

$K$	$\omega_0$ [rad/s]	$\xi$	
$C_1$	0,5	$\geq 1$	
$C_2$	0,5	5,0	0,7
$C_3$	0,5	5,0	0,4
$C_4$	0,5	2,5	0,7
$C_5$	0,5	2,5	0,4

On constate de plus que les courbes  $C_2$  et  $C_3$  par exemple ont même pulsation propre non amortie, mais des pulsations propres différentes du fait de leurs coefficients d'amortissement respectifs.

## 9.5

1. La pente à l'origine semble non nulle et il n'y a ni dépassement, ni oscillation, on peut raisonnablement envisager un modèle d'ordre 1, dont la fonction de transfert s'écrit

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

2. En régime permanent, la réponse d'un système d'ordre 1 à un échelon d'amplitude  $E_0$  tend vers  $KE_0$ . Ici, comme l'échelon d'entrée a une amplitude de 2 et comme la réponse tend vers 20, on a donc un gain statique de  $K = 10$ .

Le temps de réponse à 5% d'un système du premier ordre est égal à  $3\tau$ .

On relève sur la courbe  $t_{5\%} = 1,8$  s, on en déduit  $\tau = 0,6$  s.

Pour contrôler le modèle envisagé, on vérifie qu'à l'instant  $t = \tau$  le système a atteint 63% de sa valeur finale. Ici, on peut vérifier que  $s(\tau) \approx 12,6$ .

En conclusion, on peut convenir que le modèle proposé convient pour le système testé.

$$H(p) = \frac{10}{1 + 0,6p}$$

Remarque : pour valider le modèle de comportement établi, il faudrait réaliser un essai avec un autre type de signal en entrée, par exemple un signal sinusoïdal.

## 9.6

1. On détermine la pulsation, le gain en décibel et la phase en degré pour chaque essai, en utilisant comme relations :

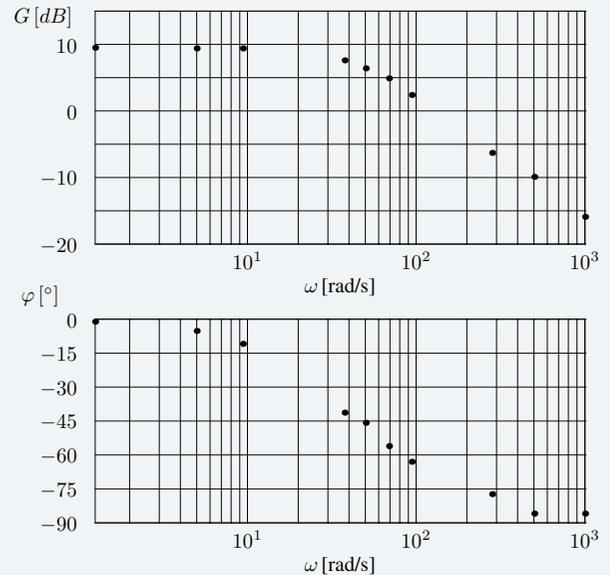
• Pulsation :  $\omega = 2\pi f$

• Gain :  $G_{dB} = 20 \log \left( \frac{S}{E_0} \right)$

• Phase :  $\varphi(\omega) = -\omega T$  avec  $T$  le déphasage temporel.

Pulsation rad s <sup>-1</sup>	Gain dB	Phase degré	Pulsation rad s <sup>-1</sup>	Gain dB	Phase degré
1,2	9,5	-1,1	69,1	4,9	-56
5,0	9,4	-5,2	94,3	2,4	-63
9,4	9,4	-10,9	283	-6,3	-77
38	7,6	-41,3	503	-9,9	-86
50	6,4	-45,8	$1,00 \cdot 10^3$	-16	-86

2. À partir des valeurs calculées, on trace les diagrammes de BODE ci-dessous.



3. La phase variant de  $0^\circ$  à  $-90^\circ$ , on peut envisager un modèle d'ordre 1. Par ailleurs, la courbe de gain ayant une pente nulle pour les basses pulsations et une pente qu'on peut poser à  $-20$  dB/décade pour les pulsations élevées comme montré sur la figure suivante, cela conforte le choix effectué.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

### Détermination des caractéristiques :

• Concernant le gain statique, on sait que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}(\omega) = 20 \log K$$

On relève une valeur de 9,5 dB pour les basses pulsations. On a donc

$$K = 10^{\frac{9,5}{20}}, \text{ soit } K \approx 3$$

• Pour la pulsation de cassure  $\omega_0$ , la phase vaut  $-45^\circ$ . On trouve sur la courbe de phase

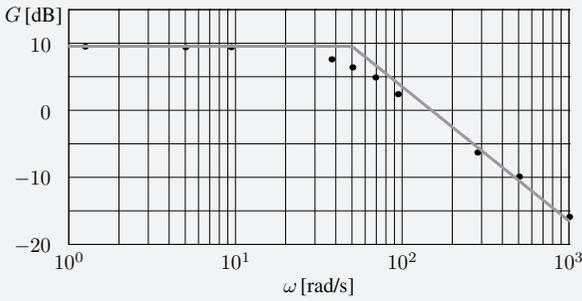
$$\omega_0 \approx 50 \text{ rad s}^{-1}$$

On vérifie sur la courbe de gain que l'on a bien

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K - 3$$

Comme  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ , on calcule alors

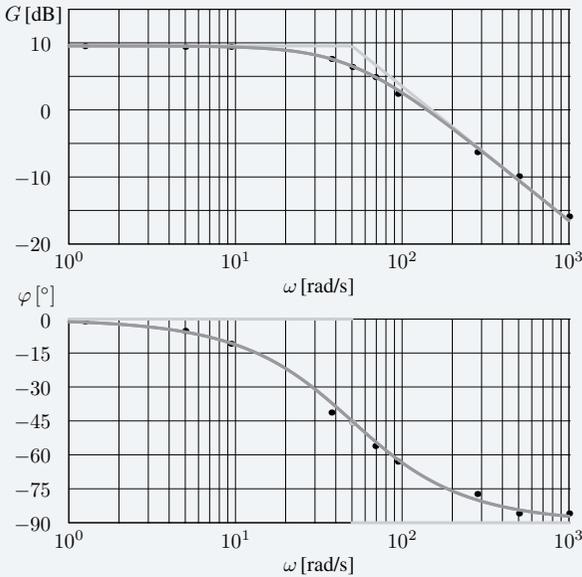
$$\tau \approx 0,02 \text{ s}$$



Finalement, on propose

$$H(p) \approx \frac{3}{1 + 0,02p}$$

On cherche à valider le modèle en superposant le tracé réel et les relevés expérimentaux.



Le modèle établi est valide sur la bande de pulsation  $]0, 1; 1000]$ .

Comme on n'a aucune information pour des pulsations supérieures à  $1000 \text{ rad s}^{-1}$ , on ne peut exclure, par exemple, l'existence d'une constante de temps très petite.

## 9.7

1. L'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $B(p)$  se détermine par lecture du schéma-blocs, en ouvrant la boucle juste avant le retour au comparateur

$$B(p) = 20 \times \frac{1 + 4p}{4p} \times \frac{40}{1 + 4,2p + 0,8p^2}$$

2. Il faut savoir en premier si le système d'ordre 2 qui apparaît dans  $B(p)$  est apériodique ou pseudopériodique. On cherche donc la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  de  $H(p)$ . On trouve  $\xi \approx 2,3$ . Comme l'ordre 2 est apériodique, on peut factoriser  $H(p)$ . On a ainsi

$$H(p) = \frac{40}{(1 + 4p)(1 + 0,2p)}$$

On peut remarquer que le correcteur compense la constante de temps la plus grande et on obtient finalement

$$B(p) = \frac{200}{p(1 + 0,2p)}$$

## Recherche du diagramme :

- Comme  $B(p)$  est composée d'un intégrateur et d'un système d'ordre 1, la phase varie de  $-90^\circ$  à  $-180^\circ$ . On peut exclure le diagramme 4 dont la phase descend en dessous de  $-180^\circ$ .
- La pulsation de cassure de l'ordre 1 est :  $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$ . Comme  $B(p)$  est composée également d'un intégrateur, la phase pour la pulsation  $5 \text{ rad/s}$  vaut alors  $-135^\circ$  ; on élimine le diagramme 2.
- Les courbes de phase des diagrammes 1 et 3 sont identiques. Les courbes de gain de ces diagrammes ont même allure. On calcule la valeur du gain lorsque la pulsation vaut  $1 \text{ rad/s}$ . On trouve  $G_{dB}(1) = 20 \log(200) - 20 \log\sqrt{1 + 0,2^2}$ , soit

$$G_{dB}(1) \approx 46 \text{ dB}$$

On retient donc en définitive le diagramme 3.

## 9.8

1. La fonction de transfert proposée peut se mettre sous la forme générique suivante

$$H(p) = \frac{K}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

Par identification, il s'agit d'un système d'ordre 3 et de classe 1, et on détermine :

- le gain statique  $K = 10$  ;
- la pulsation propre  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$  ;
- le coefficient d'amortissement  $\xi = 0,3$ .

2. On écrit la fonction de transfert harmonique en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans  $H(p)$

$$H(j\omega) = \frac{10}{1 - \omega^2 + 0,6j\omega} \times \frac{1}{j\omega}$$

Pour tracer les diagrammes de BODE, on procède par superposition :

- on trace les diagrammes de BODE de  $H_1(j\omega) = \frac{10}{1 - \omega^2 + 0,6j\omega}$  ;
- on trace ceux de  $H_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$  ;
- les diagrammes attendus sont obtenus par addition des diagrammes de ces deux fonctions  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$ .

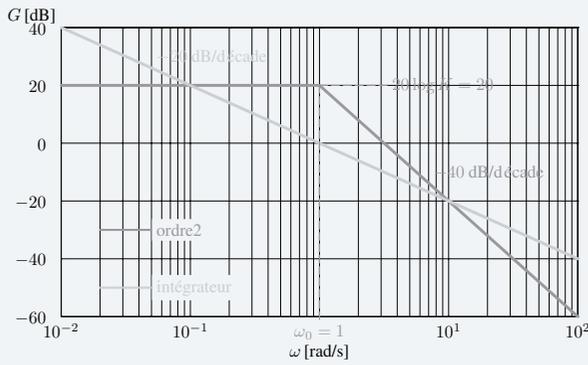
La fonction de transfert  $H_1(j\omega)$  est d'ordre 2, le diagramme asymptotique de gain est connu :

- une droite de pente nulle et d'ordonnée  $20 \log K = 20 \text{ dB}$  pour  $\omega \in ]0; \omega_0]$  ;
  - une droite de pente  $-40 \text{ dB/décade}$  pour  $\omega \in [\omega_0; +\infty[$ .
- Quant au diagramme asymptotique pour la phase :
- une horizontale à  $0^\circ$  pour  $\omega \in ]0; \omega_0]$  ;
  - une valeur particulière de  $-90^\circ$  pour  $\omega = \omega_0$  ;
  - une horizontale à  $-180^\circ$  pour  $\omega \in [\omega_0; +\infty[$ .

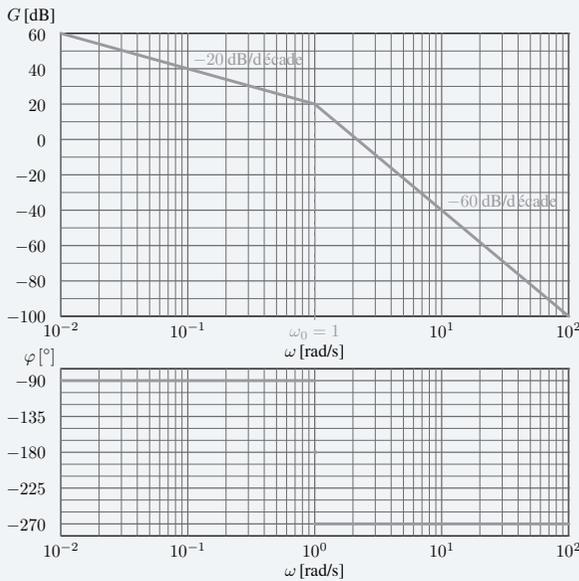
La fonction  $H_2(j\omega)$  est celle d'un intégrateur. On a

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log(\omega) \text{ et } \varphi(\omega) = -90^\circ$$

On obtient les tracés suivants pour le diagramme de gain :



En additionnant les diagrammes de  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$ , on obtient



3. Pour tracer le diagramme réel de gain, il faut déterminer la valeur de la pulsation de résonance du système d'ordre 2. Par définition, on a

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

ce qui donne dans ce cas  $\omega_r \approx 0,9$  rad/s.

On calcule alors la valeur du gain pour cette pulsation :

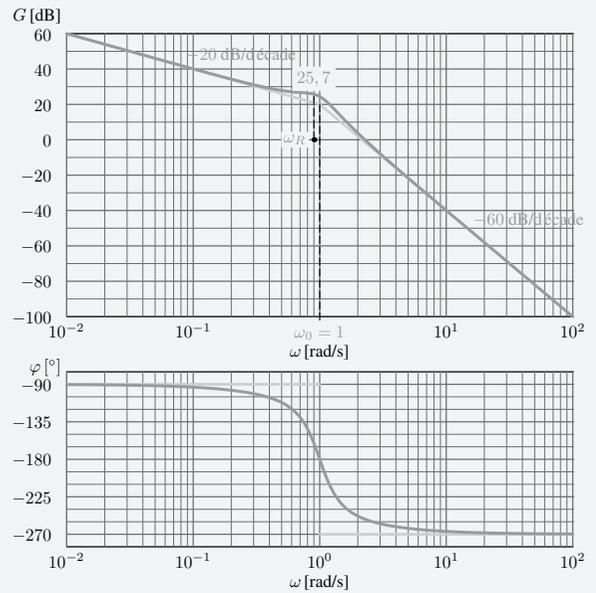
$$G_{dB}(\omega_r) = 20 \log |H_1(j\omega_r)| + 20 \log |H_2(j\omega_r)|$$

soit

$$G_{dB}(\omega_r) = 20 \log K - 20 \log \left( 2\xi \sqrt{1 - \xi^2} \right) - 20 \log(\omega_r)$$

On obtient

$$G_{dB}(\omega_r) \approx 25,7 \text{ rad s}^{-1}$$



## 9.9

1. Le système étudié est d'ordre 3 et de classe 0. La fonction de transfert proposée peut se mettre sous la forme générique suivante

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p) \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

soit ici, en déterminant par identification  $\omega_0 \approx 0,95 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\xi \approx 1,9$ .

$$H(p) = \frac{5}{(1 + 80p)(1 + 3,7p)(1 + 0,3p)}$$

Toujours par identification, on détermine le gain statique  $K = 5$ .

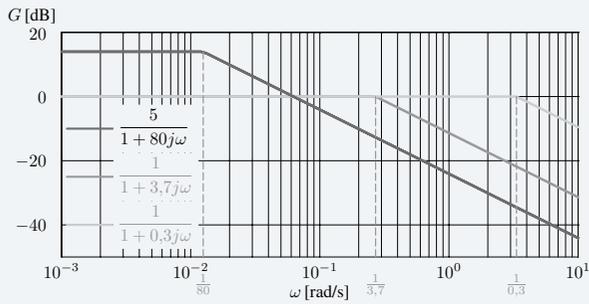
2. Sur le diagramme asymptotique de gain, la pente de l'asymptote basses pulsations est nulle car le système est de classe 0. Le système est d'ordre 3, donc l'asymptote hautes pulsations a une pente de  $-60 \text{ dB/décade}$ .

3. Un raisonnement du même type conduit à affirmer que la phase est nulle pour les pulsations basses et vaut  $-270^\circ$  pour les pulsations élevées.

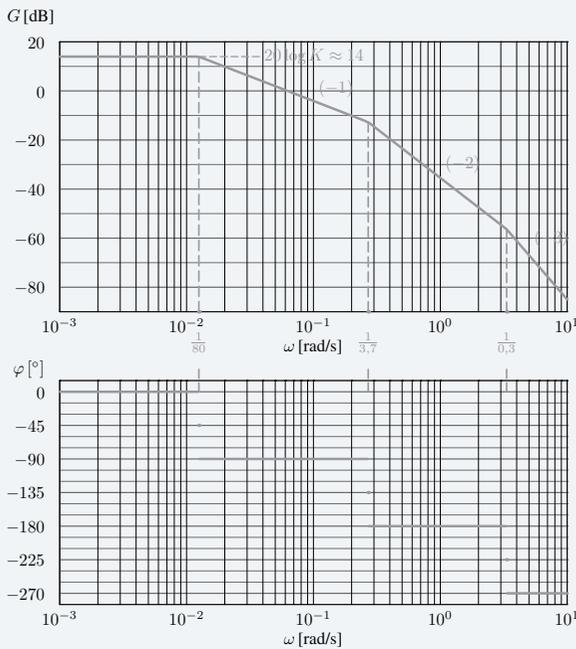
4. On écrit la fonction de transfert harmonique en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans  $H(p)$

$$H(j\omega) = \underbrace{\frac{5}{1 + 80j\omega}}_{F_1(p)} \times \underbrace{\frac{1}{1 + 3,7j\omega}}_{F_2(p)} \times \underbrace{\frac{1}{1 + 0,3j\omega}}_{F_3(p)}$$

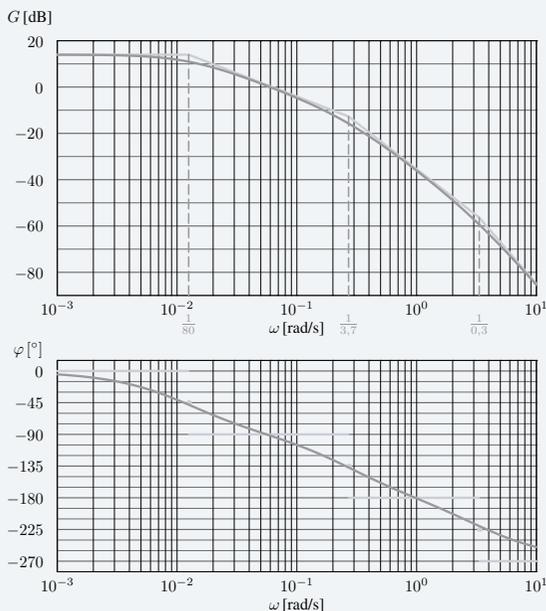
Pour tracer les diagrammes de BODE, on procède par superposition, après avoir tracé les diagrammes des fonctions  $F_i(p)$ .



En additionnant les diagrammes de  $F_1(j\omega)$ ,  $F_2(j\omega)$  et  $F_3(j\omega)$ , on obtient, en notant les pentes  $-20$  dB/décade,  $-40$  dB/décade et  $-60$  dB/décade respectivement  $(-1)$ ,  $(-2)$  et  $(-3)$ .



5. Le diagramme réel de gain suit les asymptotes en étant constamment en dessous de ces asymptotes. Le diagramme de phase est donné pour mémoire.



## 9.10

1. Le système étudié est de classe 1. La fonction de transfert proposée peut se mettre sous la forme générique suivante

$$H(p) = \frac{K}{p} \times \frac{1 + \frac{2\xi_N}{\omega_{0N}} p + \frac{p^2}{\omega_{0N}^2}}{1 + \frac{2\xi_D}{\omega_{0D}} p + \frac{p^2}{\omega_{0D}^2}}$$

soit ici

$$H(p) = \frac{0,2}{p} \times \frac{1 + 2,1p + 0,2p^2}{p(1 + 0,01p + 1234 \cdot 10^{-7} p^2)}$$

Par identification, on détermine le gain statique  $K = 0,2$ .

2. Le système est d'ordre 3 et le numérateur est un polynôme de degré 2 alors l'asymptote hautes pulsations aura une pente de  $-20$  dB/décade sur le diagramme asymptotique de gain. L'asymptote basses pulsations a une pente de  $-20$  dB/décade car on a un système de classe 1.

3. Un raisonnement du même type conduit à affirmer que la phase vaut  $-90^\circ$  pour des pulsations basses et  $-90^\circ$  pour des pulsations élevées.

4. On écrit la fonction de transfert harmonique en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans  $H(p)$

$$H(j\omega) = \frac{0,2}{\underbrace{(1 - 1234 \cdot 10^{-7} \omega^2 + 0,01 j\omega)}_{F_1(j\omega)}} \times \underbrace{(1 - 0,2\omega^2 + 2,1 j\omega)}_{F_2(j\omega)} \times \underbrace{\frac{1}{j\omega}}_{F_3(j\omega)}$$

Pour tracer les diagrammes de BODE, on procède par superposition :

- la fonction  $F_1(j\omega)$  est une fonction de transfert d'ordre 2 avec  $\omega_0 = 90$  rad/s et  $\xi = 0,45$ . Comme  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on a un système d'ordre 2 résonnant dont le diagramme asymptotique est connu ;
- la fonction  $F_2(j\omega)$  est l'inverse d'une fonction d'ordre 2. Comme  $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$  et comme  $\arg\left(\frac{1}{x}\right) = -\arg(x)$ , le diagramme asymptotique de  $F_2(j\omega)$  est alors le diagramme symétrique, par rapport à l'axe des abscisses, de celui d'une fonction  $G_2(j\omega)$  définie par

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1 - 0,2\omega^2 + 2,1 j\omega}$$

cette fonction  $G_2(j\omega)$  est une fonction de transfert d'ordre 2 avec  $\omega_0 \approx 2,24$  rad/s et  $\xi = 2,35$ . On a un système d'ordre 2 apériodique qui s'écrit comme produit de deux modèles d'ordre 1.

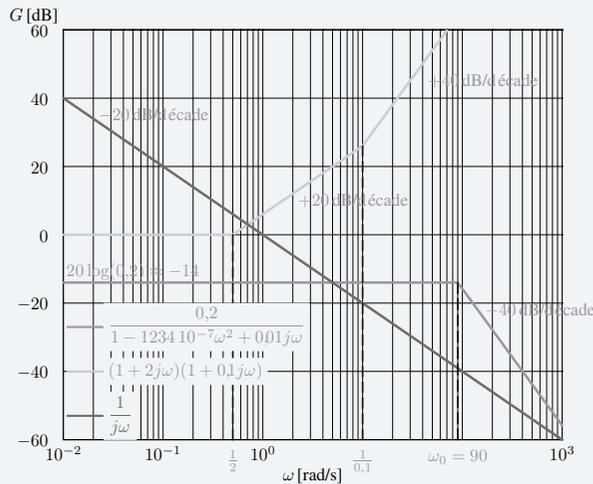
$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\omega} \times \frac{1}{1 + 0,1j\omega}$$

On en conclut alors que le diagramme asymptotique de gain de  $F_2(j\omega)$  commence par une demi-droite de pente nulle pour  $\omega \in ]0; 0,5]$  et d'ordonnée nulle car le gain statique de  $F_2(j\omega)$  vaut 1. Ensuite, il se poursuit par un segment de pente  $+20$  dB/décade pour  $\omega \in [0,5; 10]$  et se termine par une demi-droite de pente  $+40$  dB/décade pour  $\omega \in [10; +\infty[$ .

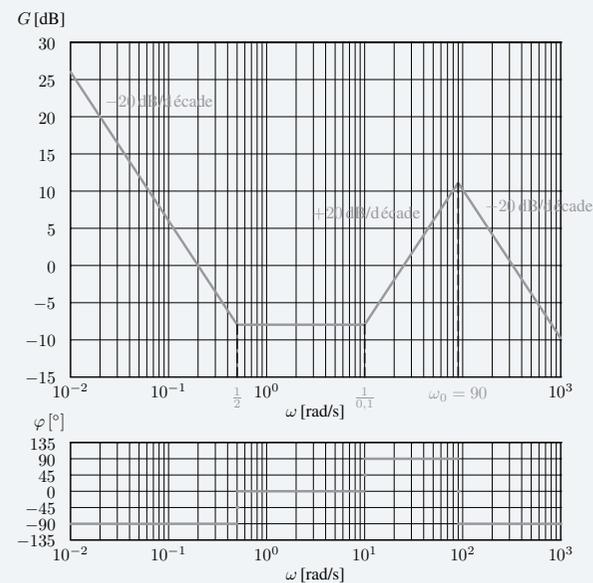
• la fonction  $F_3(j\omega)$  représente un intégrateur.

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log(\omega) \text{ et } \varphi(\omega) = -90^\circ$$

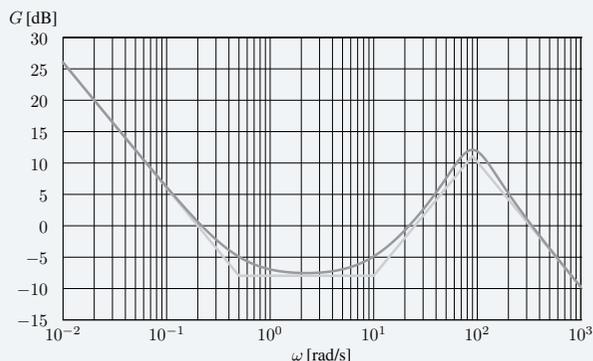
On obtient les tracés suivants pour le diagramme de gain de  $F_1(j\omega)$ ,  $F_2(j\omega)$  et  $F_3(j\omega)$



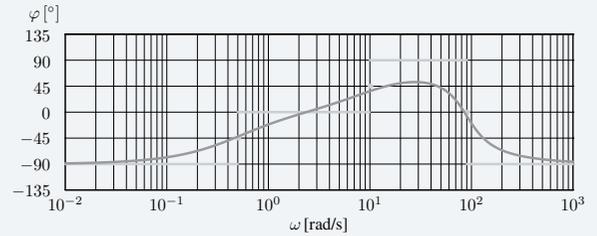
En additionnant les diagrammes de  $F_1(j\omega)$ ,  $F_2(j\omega)$  et  $F_3(j\omega)$ , on obtient



5. Pour préciser l'allure du diagramme réel de gain, comme le système d'ordre 2 est résonnant, on calcule le gain pour la pulsation de résonance. On trouve :  $G_{dB}(\omega_R) \approx 11$  dB.



Pour le diagramme de phase, il faut calculer la valeur de la phase pour quelques pulsations afin de pouvoir compléter le diagramme asymptotique.



## 9.11

1. Le système étudié est d'ordre 4 et de classe 1. La fonction de transfert proposée peut se mettre sous la forme générique suivante

$$H(p) = \frac{K}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right) (1 + Tp)}$$

soit ici

$$H(p) = \frac{2,5}{p(1 + 0,8p + 0,25p^2) \left( 1 + \frac{100p}{7} \right)}$$

Par identification, on détermine le gain statique  $K = 2,5$ .

2. Sur le diagramme asymptotique de gain, comme le système est d'ordre 4 alors l'asymptote hautes pulsations aura une pente de  $-80$  dB/décade. L'asymptote basses pulsations a une pente de  $-20$  dB/décade car on a un système de classe 1.

3. Un raisonnement du même type conduit à affirmer que la phase vaut  $-90^\circ$  pour des pulsations basses et  $-360^\circ$  pour des pulsations élevées.

4. On écrit la fonction de transfert harmonique en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans  $H(p)$

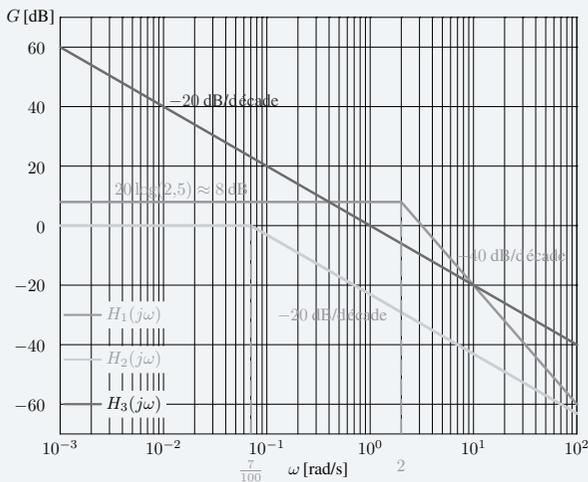
$$H(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{1 - 0,25\omega^2 + 0,8j\omega}}_{F_1(p)} \times \underbrace{\frac{1}{1 + j\frac{100\omega}{7}}}_{F_2(p)} \times \underbrace{\frac{1}{j\omega}}_{F_3(p)}$$

Pour tracer les diagrammes de BODE, on procède par superposition :

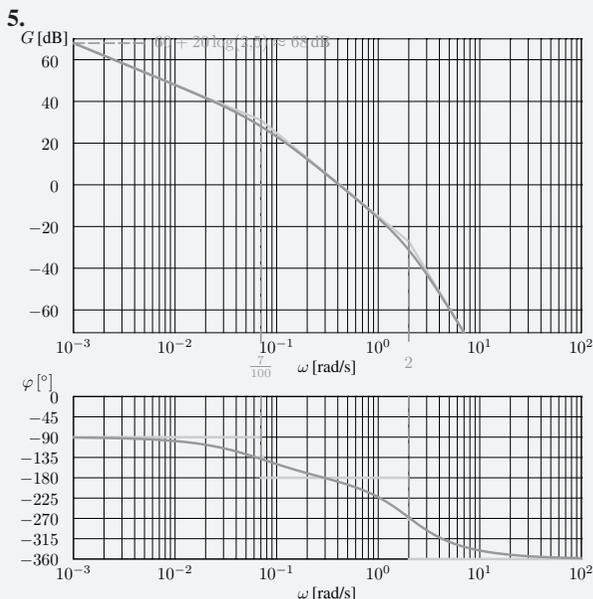
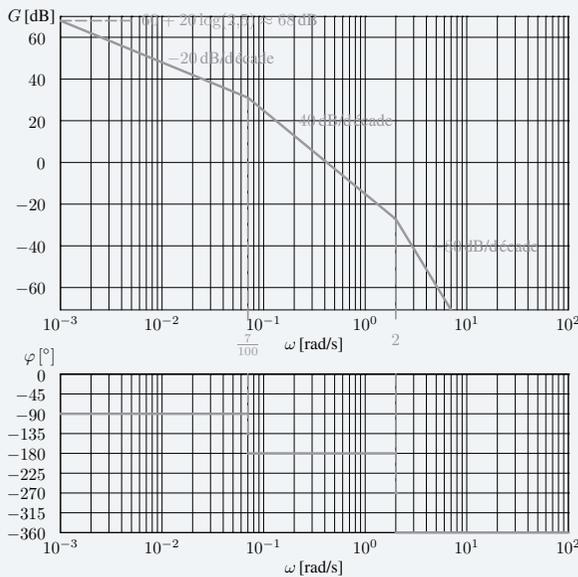
- la fonction  $F_1(j\omega)$  est une fonction de transfert d'ordre 2 avec  $\omega_0 = 2 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\xi = 0,8$ . Comme  $1 > \xi > \sqrt{2}/2$ , on a un système d'ordre 2 pseudopériodique non résonnant dont le diagramme asymptotique est connu.
- la fonction  $F_2(j\omega)$  est une fonction de transfert d'ordre 1 dont le diagramme asymptotique est connu.
- la fonction  $F_3(j\omega)$  représente un intégrateur.

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log(\omega) \text{ et } \varphi(\omega) = -90^\circ$$

On obtient les tracés suivants pour le diagramme de gain de  $F_1(j\omega)$ ,  $F_2(j\omega)$  et  $F_3(j\omega)$



En additionnant les diagrammes de  $F_1(j\omega)$ ,  $F_2(j\omega)$  et  $F_3(j\omega)$ , on obtient



Comme le système d'ordre 2 n'est pas résonnant, le diagramme réel de gain est constamment en dessous des asymptotes. Pour le diagramme de phase, il faut calculer la valeur de la phase pour quelques pulsations afin de pouvoir compléter le diagramme asymptotique.

## Exercices d'approfondissement

### 9.12

1. Une fréquence d'acquisition de 80 Hz permet d'obtenir 80 points de mesure par seconde, soit 8 points pour 100 ms, ce que l'on peut effectivement compter.
2. D'après la pente à l'origine et vu l'absence d'oscillation, on peut opter pour un modèle d'ordre 1, soit

$$F_1(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

3. En régime permanent, le taux de rotation du moteur tend vers  $84 \text{ rad s}^{-1}$ . Le moteur est alimenté avec un échelon de 12 Volts, on a donc comme gain statique

$$K = 7 \text{ rad s}^{-1} \text{V}^{-1}$$

Le temps de réponse à 5 % est d'environ 100 millisecondes. Pour un système d'ordre 1, le temps de réponse est égal à trois fois la constante de temps. On obtient alors pour le moteur testé

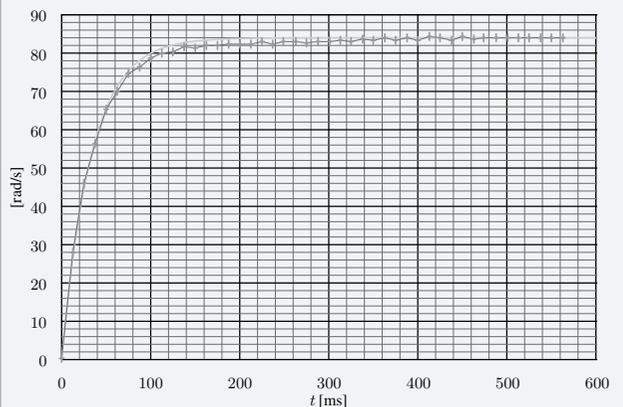
$$\tau \approx 33 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Cela permet de proposer le modèle de représentation suivant

$$M(p) \approx \frac{7}{1 + 33 \cdot 10^{-3} p}$$

Pour un système d'ordre 1, à l'instant  $t = \tau$ , la sortie est égale à 63 % de la valeur finale. Cette propriété est approximativement vérifiée sur la courbe de réponse du moteur.

Pour valider le modèle obtenu, on superpose le modèle de comportement à la courbe expérimentale.



On peut considérer que le modèle déterminé est satisfaisant.

4. Comme il n'y a pas de dépassement, on choisit dans ce cas un modèle d'ordre 2 apériodique ; le coefficient d'amortissement est supérieur à 1.

5. La fonction de transfert d'un ordre 2 apériodique s'exprime comme le produit de deux modèles d'ordre 1

$$F_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Si l'entrée est un échelon unitaire, on a comme expression pour  $\Omega(p)$  dans le domaine symbolique

$$\Omega(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \frac{1}{p}$$

Après décomposition en éléments simples et par transformation inverse, on obtient

$$\omega(t) = K \left( 1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right)$$

6. Si la contribution de  $\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$  est négligeable devant celle de  $\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ , c'est à dire si  $\tau_1$  est petit devant  $\tau_2$ , alors la réponse indicielle peut être approchée par

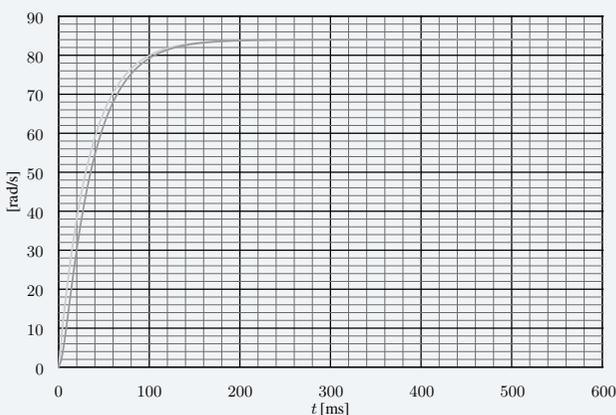
$$\omega(t) \approx K \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

Cette dernière expression est la réponse indicielle d'un système d'ordre 1, de gain  $K$  et de constante de temps  $\tau_2$ .

En conclusion, dans une étude temporelle, un système d'ordre 2 peut être approximé par un système d'ordre 1 s'il est apériodique et si l'une de ses constantes de temps est négligeable devant l'autre.

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \approx \frac{K}{(1 + \tau_2 p)} \text{ si } \tau_1 \ll \tau_2$$

Remarque : La courbe de réponse fournie a été tracée à partir d'une acquisition réalisée à environ 80Hz, donc tout événement survenant dans les 10 premières millisecondes ne peut pas être relevé. La deuxième constante de temps est alors plus petite que 10ms. Si on prend comme constante de temps négligée  $\tau_1 = 5$  ms, on peut tracer les deux courbes suivantes



L'approximation semble raisonnable.

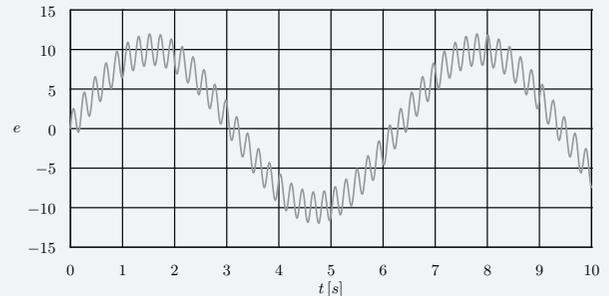
## 9.13

1. La pulsation du signal d'entrée est de 0,5 rad/s. On relève sur le diagramme de BODE en gain

$$G_{dB}(0,5) \approx 0 \text{ dB}$$

Par définition,  $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \frac{S}{E_0} \right)$  où  $S$  et  $E_0$  représente respectivement l'amplitude du signal de sortie et l'amplitude du signal d'entrée. On peut alors conclure que pour une pulsation de 0,5 rad/s, il n'y a pas d'atténuation de l'amplitude du signal de sortie. En effet,  $\frac{S}{E_0}$  est quasiment égal à 1. Ce résultat est logique car la pulsation du signal d'entrée est très inférieure à la pulsation de coupure à  $-3$  dB, notée  $\omega_{3dB}$ .

2. L'évolution du signal d'entrée,  $e(t) = 10 \sin(t) + 2 \sin(30t)$ , est représentée sur la courbe ci-dessous :



On décompose le signal d'entrée en deux signaux :

- $e_1(t) = 10 \sin(t)$  de pulsation  $\omega_1 = 1$  rad/s ;
- $e_2(t) = 2 \sin(30t)$  de pulsation  $\omega_2 = 30$  rad/s.

Le système étant linéaire, la sortie est obtenue par superposition de l'effet des deux signaux d'entrée.

À partir du diagramme de BODE, on peut réaliser une approche qualitative.

- Pour le signal  $e_1$ , la sortie  $s_1$  aura une amplitude comparable à celle du signal d'entrée en tenant un raisonnement analogue à celui conduit à la question précédente
- Pour le signal  $e_2$ , on relève :  $G_{dB}(\omega_2) \approx -10$  dB. On a alors :  $\frac{S}{E_0} \approx 10^{-\frac{10}{20}}$  donc  $S \approx 0,3E_0$ . Cette atténuation est prévisible puisque  $\omega_2 \gg \omega_{3dB}$ .

Qualitativement, on peut affirmer que le signal  $e_2$  est filtré.

La détermination plus précise du signal de sortie se fait en utilisant les expressions analytique du gain et de la phase.

À partir de l'expression de la fonction de transfert harmonique :  $H(j\omega) = \frac{1}{1+0,1(j\omega)}$ , on calcule :

- le gain :  $G_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)|$ , d'où ici

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log \left( \sqrt{1 + (0,1\omega)^2} \right)$$

- la phase :  $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ , soit ici

$$\varphi(\omega) = \arg(1) - \arg(1 + 0,1(i\omega))$$

ce qui donne :  $\varphi(\omega) = -\arctan(0,1\omega)$  car le complexe  $1 + 0,1(j\omega)$  a un argument compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

On calcule alors l'amplitude et le déphasage des deux signaux de sorties et on trouve :

- Pour  $\omega = 1$ , on a :  $G_{dB}(1) = -20 \log(\sqrt{1 + 0,1^2})$  et  $\varphi(1) = -\arctan(0,1)$

$$G_{dB}(1) \approx -0,04 \text{ dB et } \varphi(1) \approx -0,1 \text{ rad}$$

- Pour  $\omega = 30$ , on a :  $G_{dB}(30) = -20 \log(\sqrt{1 + (0,1 \times 30)^2})$  et  $\varphi(30) = -\arctan(3)$

$$G_{dB}(30) \approx -10 \text{ dB et } \varphi(30) \approx -1,25 \text{ rad}$$

D'où les expressions numériques des deux signaux de sortie

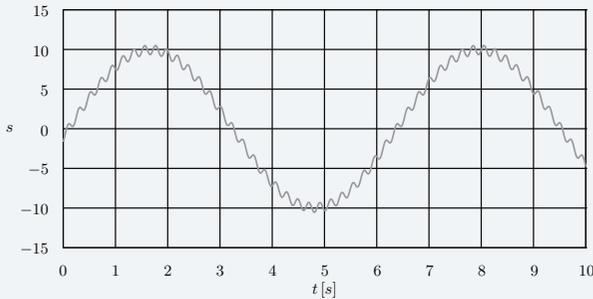
$$s_1(t) \approx 10 \times 10^{-\frac{0,04}{20}} \sin(t - 0,1)$$

$$s_2(t) \approx 2 \times 10^{-\frac{10}{20}} \sin(30t - 1,25)$$

En conclusion :

$$s(t) \approx 9,95 \sin(t - 0,1) + 0,6 \sin(30t - 1,25)$$

L'évolution de  $s(t)$  est décrite ci-dessous :



## 9.14

1. Compte tenu du dépassement constaté, il est nécessaire d'envisager un modèle d'ordre 2 au minimum.

2. Si on retient un modèle d'ordre 2 simple, alors on pose

$$F(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

3. Le dépassement relatif a pour expression

$$D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

On relève sur la courbe proposée un dépassement absolu de 2,5. Comme la valeur finale vaut 10, on a un dépassement relatif de 0,25, soit de 25 %. On trouve alors

$$\xi \approx 0,4$$

L'instant du premier dépassement est égale à la demi pseudo-période, soit

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

Comme on a un temps de pic d'environ 3,5 secondes, on trouve

$$\omega_0 \approx 0,98 \text{ rad s}^{-1}$$

L'amplitude de l'échelon est de 10, la valeur finale est de 10 donc le gain statique  $K$  vaut 1 car en régime permanent la réponse tend vers  $KE_0$ .

$$K = 1$$

Finalement, on propose comme modèle de représentation pour le système bouclé

$$F(p) \approx \frac{1}{1 + 0,81p + 1,04p^2}$$

4. Si on note

$$H(p) = \frac{K(1 + b_1p + \dots + b_kp^k)}{p^\alpha(1 + a_1p + \dots + a_np^n)}$$

alors on obtient pour  $F(p)$  la fonction de transfert en boucle fermée

$$F(p) = \frac{KAK_C(1 + b_1p + \dots + b_kp^k)}{KAK_C(1 + b_1p + \dots + b_kp^k) + p^\alpha(1 + a_1p + \dots + a_np^n)}$$

qu'on peut encore écrire

$$F(p) = \frac{KAK_C(1 + b_1p + \dots + b_kp^k)}{KAK_C + p^\alpha + KAK_C(b_1p + \dots + b_kp^k) + p^\alpha(a_1p + \dots + a_np^n)}$$

Pour avoir un gain statique de 1, il faut  $\alpha \neq 0$ .

Pour avoir une fonction de transfert d'ordre 2, on a :  $\alpha + 1 = 2$  et  $k \leq 2$ .

On peut proposer comme forme générale

$$H(p) = K \left( \frac{1 + b_1p + b_2p^2}{p(1 + a_1p)} \right)$$

5. Si on admet que  $H(p)$  n'a pas de zéro, alors

$$H(p) = K \frac{1}{p(1 + a_1p)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit alors

$$F(p) = \frac{KAK_C}{KAK_C + p + a_1p^2}$$

ou encore

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{KAK_C}p + \frac{a_1}{KAK_C}p^2}$$

Par identification avec la forme générique d'un ordre 2, on trouve

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{KAK_C} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{a_1}{KAK_C} \quad (3)$$

Ce qui permet d'écrire

$$K = \frac{\omega_0}{2\xi AK_C} \quad a_1 = \frac{1}{2\xi\omega_0}$$

À partir des valeurs trouvées, on a

$$K \approx 1,225 \quad a_1 \approx 1,275$$

En conclusion, on propose

$$H(p) = \frac{1,225}{p(1 + 1,275p)}$$

6. Le système d'ordre 2 le plus petit rapide est obtenu lorsque le coefficient d'amortissement vaut 0,69. D'après les relations (2) et (3), on a

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{a_1 KAK_C}} \text{ soit } K_C = \frac{1}{4a_1 KA\xi^2}$$

Pour obtenir le temps de réponse le plus faible possible, il faut donc

$$K_C \approx 1,68$$

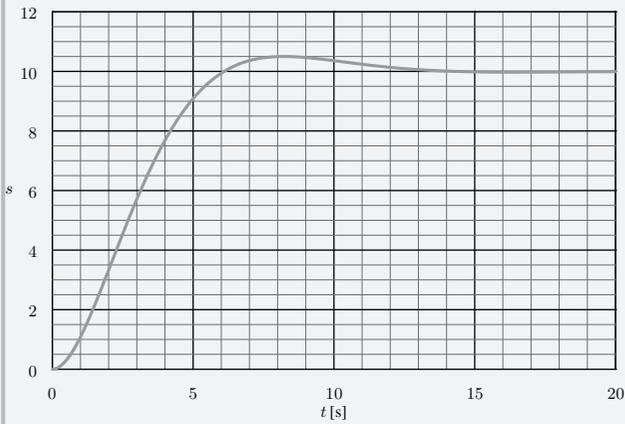
Par ailleurs, lorsque  $\xi = 0,69$  on a  $tr_{5\%}\omega_0 \approx 3$ .

Comme  $\omega_0 = \sqrt{\frac{KAK_C}{a_1}}$ , on en déduit

$$t_{5\%} \approx 3\sqrt{\frac{a_1}{KAK_C}} \text{ soit } t_{5\%} \approx 5,3 \text{ s}$$

On peut vérifier ce résultat sur la courbe ci-dessous.

On diminue le gain de boucle pour avoir un système moins oscillant.



7. La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit

$$BO(p) = \frac{KAK_C}{p(1+a_1p)}$$

Si on réalise un essai indiciel, alors

$$R(p) = \frac{KAK_C}{p(1+a_1p)} \frac{1}{p}$$

ou encore, en décomposant en éléments simples

$$R(p) = \frac{B}{p} + \frac{C}{p^2} + \frac{D}{1+a_1p}$$

Par transformation inverse de LAPLACE, on obtient

$$r(t) = B + Ct + De^{-\frac{t}{a_1}}$$

Le signal  $r$  de sortie du capteur n'est donc pas borné. L'essai en boucle ouverte peut être délicat à mettre en œuvre.

### 9.15

1. La sollicitation est un échelon, la réponse ne présente pas de dépassement et la pente à l'origine n'est pas nul. On propose en conséquence un modèle d'ordre 1

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

Sur la courbe de réponse fournie, on lit un temps de réponse de 1,5 s. Le temps de réponse d'un système d'ordre 1 est égal à  $3\tau$ , donc on trouve  $\tau = 0,5$  s.

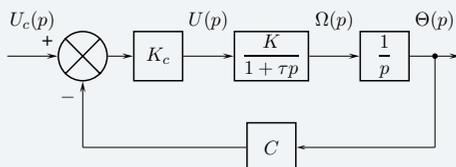
En régime permanent, on atteint la valeur de 180 rad/s. Comme l'échelon d'entrée a une amplitude de 12 Volts, on trouve  $K = 15$ . Finalement, on propose

$$H(p) = \frac{15}{1+0,5\tau}$$

2. On a  $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ , donc dans le domaine symbolique, on obtient :  $\Omega(p) = p\Theta(p)$  si on suppose les conditions initiales nulles et on propose

$$I(p) = \frac{1}{p}$$

3. On raisonne sur le schéma-blocs suivant :



À partir des résultats de l'algèbre des schémas, on écrit

$$\frac{\Theta(p)}{U_c(p)} = \frac{K K_c}{C K K_c + p(1+\tau p)}$$

On arrange cette dernière expression sous forme canonique

$$\frac{\Theta(p)}{U_c(p)} = \frac{1}{C \left( 1 + \frac{p}{C K K_c} + \frac{\tau}{C K K_c} p^2 \right)}$$

Le gain statique, noté  $K_{BF}$ , s'écrit alors :  $K_{BF} = \frac{1}{C}$ .

Application Numérique :

$$K_{BF} = 0,5 \text{ V rad}^{-1}$$

4. Un système d'ordre 2 a pour valeur finale  $K E_0$  si  $E_0$  est l'amplitude du signal d'entrée et  $K$  le gain statique. Ici,  $K = 0,5$  et  $E_0 = 2$  donc la valeur finale doit être égale à 1 et on relève bien une valeur 1 rad en régime permanent pour l'angle  $\theta$ .

5. Le cahier des charges impose une réponse indicielle sans dépassement. Le coefficient d'amortissement doit être supérieur ou égal à 1 pour avoir un ordre 2 apériodique.

La forme canonique de la fonction de transfert d'un ordre 2 étant la suivante

$$\frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

on a par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C K K_c}{\tau}} \text{ et } \xi = \frac{1}{2\sqrt{C K K_c \tau}}$$

Vouloir  $\xi \geq 1$  implique  $\frac{1}{2\sqrt{C K K_c \tau}} \geq 1$ . Finalement, on obtient

$$K_c \leq \frac{1}{4C K \tau}$$

Application numérique :

$$K_c \leq \frac{1}{60}$$

6. Avec la valeur limite de  $K_c$ , on a un modèle d'ordre 2 apériodique critique, avec  $\xi = 1$ . On lit sur un abaque tel que proposé en annexe

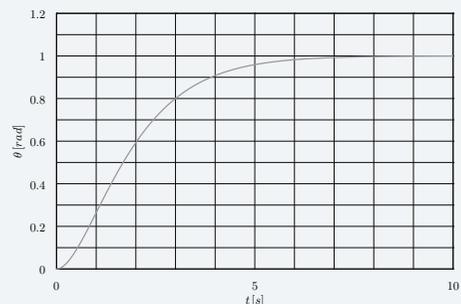
$$t_{5\%} \omega_0 \approx 5$$

Comme  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C K K_c}{\tau}}$  avec  $K_c = \frac{1}{4C K \tau}$ , alors  $t_{5\%} \approx 10\tau$ .

Application numérique :

$$t_{5\%} \approx 5 \text{ s}$$

Une simulation numérique avec les valeurs calculées permet de visualiser et valider ce temps de réponse.



Le temps de réponse obtenu est beaucoup trop élevé, il faut envisager un autre type de correcteur qui permette d'améliorer la rapidité tout en gardant la contrainte du non dépassement.

SysML est un langage graphique de modélisation pour l'analyse, la spécification, la conception, la vérification et la validation de systèmes complexes.

Ce langage est une extension du langage UML développé pour le génie logiciel. Il a pour ambition de pouvoir être appliqué à tout système, qu'il soit matériel, humain, naturel ou artificiel.

L'intérêt d'un tel langage est d'être associé à une plate-forme informatique afin de garantir un échange cohérent d'informations entre des intervenants de métiers très différents.

Dans le cadre du programme des classes préparatoires aux grandes écoles, les diagrammes SysML ne sont proposés à l'étudiant qu'à la lecture, à l'exception des diagrammes d'états, de par leur structure algorithmique. Ces derniers font l'objet d'une section particulière.

## A.1 Vue d'ensemble des diagrammes SysML

Le langage SysML comprend 9 types de diagrammes, que l'on peut classer en trois familles :

- trois diagrammes transversaux ;
- quatre diagrammes dédiés à la description comportementale du système étudié ;
- deux diagrammes pour sa description structurelle.

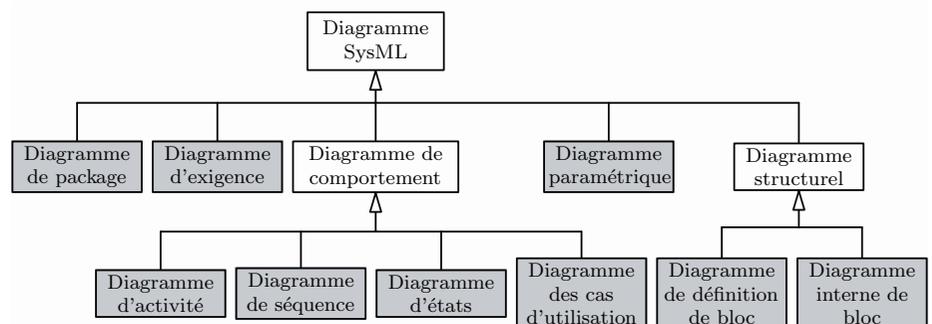


Figure A.1 Les différents types de diagramme SysML

On détaille ci-dessous leurs spécificités respectives :

- **Diagramme de package** (*Package diagram*) : représente l'organisation d'un modèle en terme de « packages » qui contiennent l'ensemble des éléments du modèle nécessaire pour un objectif précis. Cela devient vite nécessaire sur de très grands projets, afin de les fractionner en sous-projets plus accessibles.
- **Diagramme d'exigence** (*Requirement diagram*) : il représente les exigences, c'est-à-dire ce qui est attendu du système et leurs relations entre elles ainsi que les cas de test pour vérifier leur validité. Ce diagramme est la version SysML du cahier des charges fonctionnel.

- **Diagramme d'activité** (*Activity diagram*) : c'est un diagramme de comportement qui représente l'ordre dans lequel les actions s'exécutent et comment ces actions définissent les sorties à partir des entrées.
- **Diagramme de séquence** (*Sequence diagram*) : c'est un diagramme de comportement qui représente de façon ordonnée les messages échangés avec le système ou les messages échangés entre des parties du système.
- **Diagramme d'état** (*State Machine diagram*) : c'est un diagramme de comportement qui représente les transitions entre les différents états possibles et les événements qui déclenchent leurs évolutions.
- **Diagramme de cas d'utilisation** (*Use case diagram*) : c'est un diagramme qui montre comment un système est utilisé par les différentes entités extérieures.
- **Diagramme de définition de bloc** (*Block definition diagram*) : c'est un diagramme qui décrit la structure du système par des sous-systèmes représentés sous forme de blocs. Il précise également leurs compositions et leur classification.
- **Diagramme interne de bloc** (*Internal block diagram*) : représente les interconnexions et interfaces entre les parties d'un bloc.
- **Diagramme paramétrique** (*Parametric diagram*) : ce diagramme pose les équations entre les variables présentes dans le système. Il est utile pour la simulation.

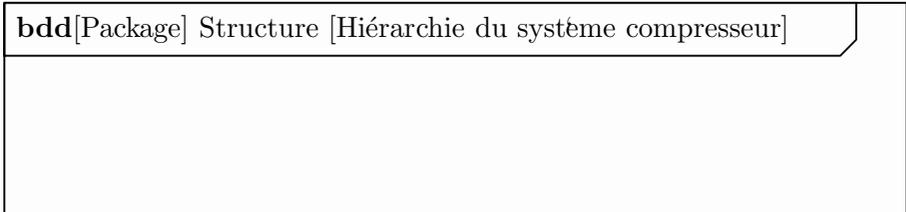
Lorsque l'on modélise un système en utilisant SysML, il n'est pas obligatoire d'utiliser tous les types de diagrammes.

Par contre, il est indispensable d'utiliser une plate-forme informatique pour qu'une information introduite à un endroit soit immédiatement diffusée dans tous les diagrammes utilisés, et soit ainsi rendue accessible à tous les utilisateurs concernés.

## A.2 Constitution d'un diagramme SysML

Un diagramme est constitué d'un cadre avec un cartouche pour l'identifier. Ce dernier est situé en haut et à gauche et comporte :

- un entête à quatre ou cinq éléments :
  - le type de diagramme, écrit en gras, que l'on énumère en suivant l'ordre de la liste de la section précédente **pkg**, **req**, **act**, **sd** ou **seq**, **stm**, **uc** ou **ucd**, **bdd**, **ibd**, **par** ;
  - [le type d'élément de modèle] dépend du diagramme. Par exemple, pour un diagramme de type exigence, cela peut être package, modèle, exigence ;
  - le nom de l'élément du modèle représenté ;
  - [le nom du diagramme] choisi par l'utilisateur ;
  - dans le cas d'une utilisation particulière, la destination du diagramme est ajoutée entre guillemets.



**bdd**[Package] Structure [Hiérarchie du système compresseur]

Figure A.2 Exemple de cadre avec son cartouche

- le contenu du diagramme, dont les deux éléments de base sont :
  - les nœuds qui contiennent du texte ou des symboles graphiques ;
  - les chemins qui sont des lignes reliant les nœuds, complétées quand c'est nécessaire par du texte et des symboles aux extrémités.

## A.3 Quelques exemples de diagrammes

### A.3.1

On s'intéresse pour ces exemples à un compresseur, qui permet d'alimenter en air comprimé des outils utilisant cette énergie.

Dans cette section sont exposés cinq des neuf types de diagrammes SysML.

### Diagramme d'exigence

Ce diagramme définit des caractéristiques couramment observées pour un compresseur.

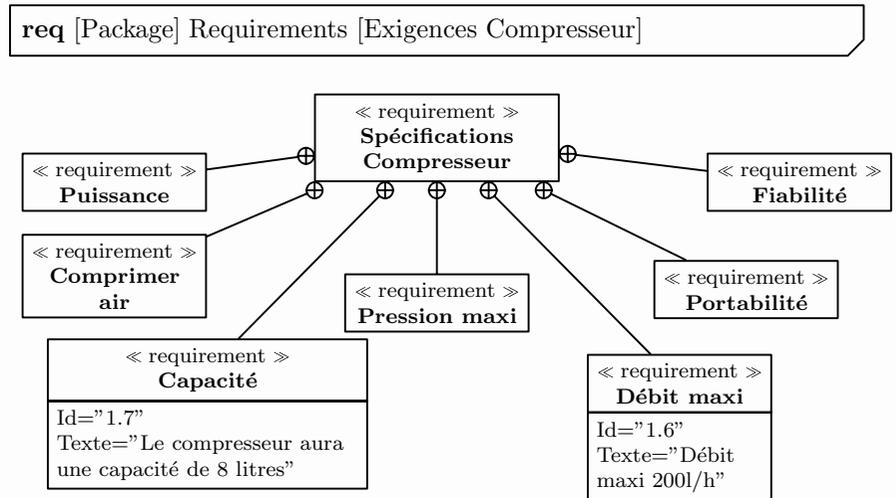


Figure A.3 Une ébauche de diagramme d'exigences

Le formalisme des boîtes et liens contenus dans ce type de diagramme suit des règles :

- L'élément au sommet du diagramme nommé *Spécifications compresseur* correspond à l'exigence fonctionnelle de comprimer de l'air. C'est ici l'élément parent du diagramme, d'où partent des liens commençant par le symbole  $\oplus$  vers des exigences induites.
- Les autres éléments, issus de l'élément parent, expriment des exigences de performances ; seul les contenus de deux éléments ont été ici détaillés.

Des liens annotés peuvent également apparaître dans un diagramme d'exigence :

- un lien nommé « satisfy » est utilisé si une exigence est réalisée par un composant bien précis. On comprend ceci comme « le composant satisfait à cette exigence ».
- un lien nommé « verify » détaille comment une procédure, une norme définie dans une boîte test permet de vérifier le critère associé à une exigence.
- un lien nommé « refine » permet d'affiner l'exigence, par exemple suivant le cas d'utilisation.

### A.3.2

### Diagramme des cas d'utilisation

Le diagramme de la figure A.4 fait apparaître sous forme synthétique des différentes tâches que doit accomplir l'utilisateur du compresseur pris en exemple.

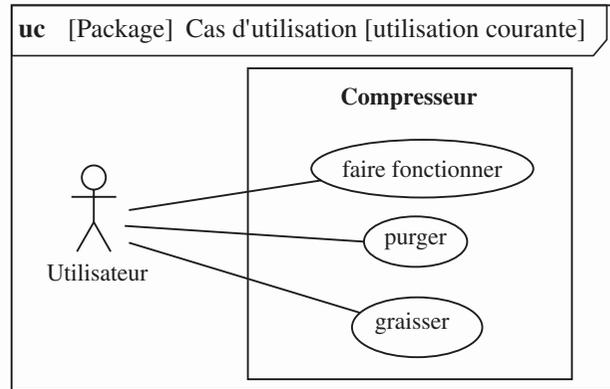


Figure A.4 Si on ne s'intéresse qu'au seul utilisateur du compresseur

### A.3.3 Diagramme de définition de blocs

Ce diagramme relève d'une analyse descendante, en hiérarchisant les composants du système.

La nature des liens est spécifiée par la forme de leurs extrémités, et le lien standard est le lien d'association composite :

- il montre le lien de l'ensemble à ses parties ;
- un diamant noir ♦ est à l'extrémité du lien du côté du contenant ;
- une flèche pointe chaque élément du contenu.

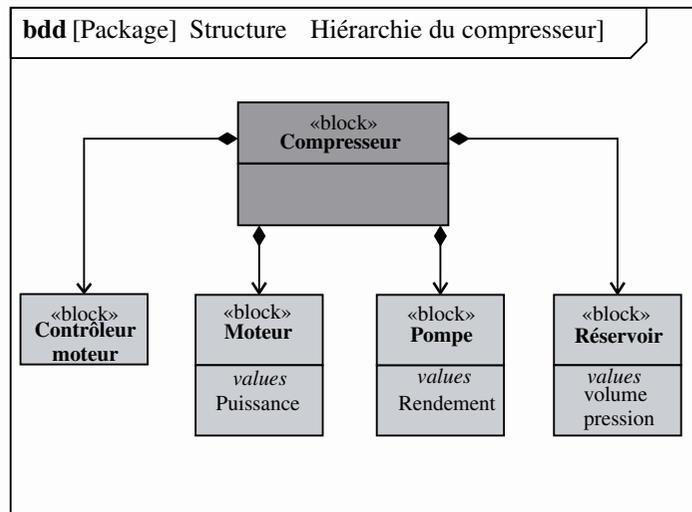


Figure A.5 Première approche d'un système asservi

Les blocs sont détaillés par certaines de leurs caractéristiques.

Pour des systèmes complexes, les blocs composants peuvent aussi être décomposés.

### A.3.4 Diagramme interne de bloc

Ce diagramme explicite comment les éléments internes à un bloc montré par un diagramme de définition de blocs sont inter-connectés par leurs ports, schématisés par des carrés blancs, et comment ils échangent des flux d'information, de matière ou d'énergie.

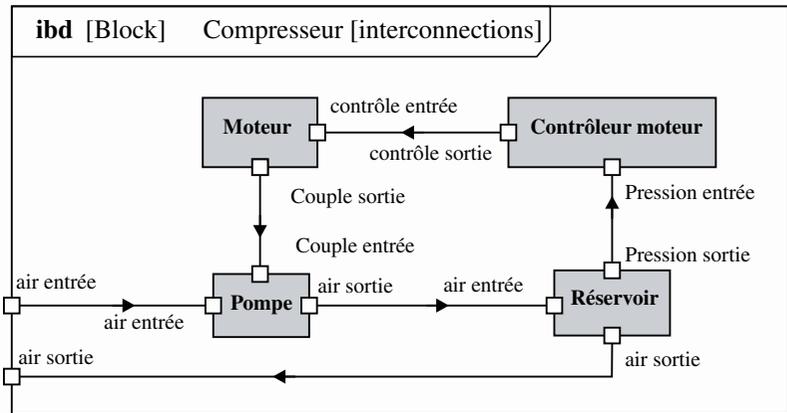


Figure A.6 Diagramme interne de bloc

### A.3.5 Diagramme paramétrique

Ce diagramme est utile pour réaliser des simulations. Il permet de lister les variables qui entrent dans les équations et de définir ces dernières. Détailler les équations concernant le compresseur déborde du cadre de cette annexe. On illustre alors ce diagramme par une équation connue de chacun : la loi de chute d'un corps dans le vide.

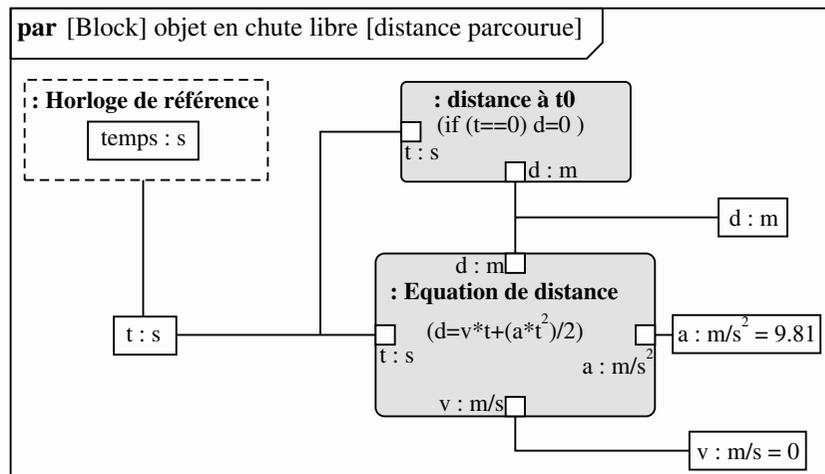


Figure A.7 Première approche d'un système asservi

## A.4 Les diagrammes d'états

Ces diagrammes méritent une attention particulière, de par leur structure algorithmique.

*Les auteurs s'excusent de l'indisponibilité de cette section au moment de l'impression de cet ouvrage ; le lecteur la trouvera sur le site Internet [www.jdotec.net](http://www.jdotec.net)*

## — A.5 Quelques sigles associés

INCOSE : International Council On Systems Engineering  
OMG : Object Management Group  
UML : Unified Modeling Language  
SysML : OMG Systems Modeling Language

SysML est essentiellement une extension de UML version 2 avec des diagrammes spécifiques.

UML est un langage de modélisation utilisé pour la conception de logiciel ; il permet de visualiser, spécifier, construire et documenter des éléments de logiciels.

La première version de SysML date de 2007, la version en cours est la 1.3

## A.1 Présentation

Le comportement d'un système complexe soumis aux lois de la physique peut être décrit par un système d'équations différentielles liant les entrées aux sorties. Les systèmes étudiés étant continus, linéaires et invariants les équations différentielles sont à coefficients constants.

L'analyse du comportement d'un système impose donc de rechercher les solutions d'un système d'équations différentielles à coefficients constants. Une méthode possible, pour contourner les difficultés que peut présenter cette résolution, consiste à substituer au système d'équations différentielles écrites dans le domaine temporel un système d'équations algébriques écrites dans un domaine dit symbolique. Dans ce domaine, on résout le problème ainsi transposé. Il reste alors à traduire cette solution du domaine symbolique dans le domaine temporel.

Le passage du domaine temporel au domaine symbolique s'effectue en utilisant la transformation de Laplace. La transformation inverse permet d'effectuer le passage du domaine symbolique au domaine temporel. Ce dernier outil difficile d'utilisation est avantageusement remplacé par l'utilisation de tableaux de transformée de Laplace.

La figure A.1 décrit les méthodes de résolution d'une équation différentielle.

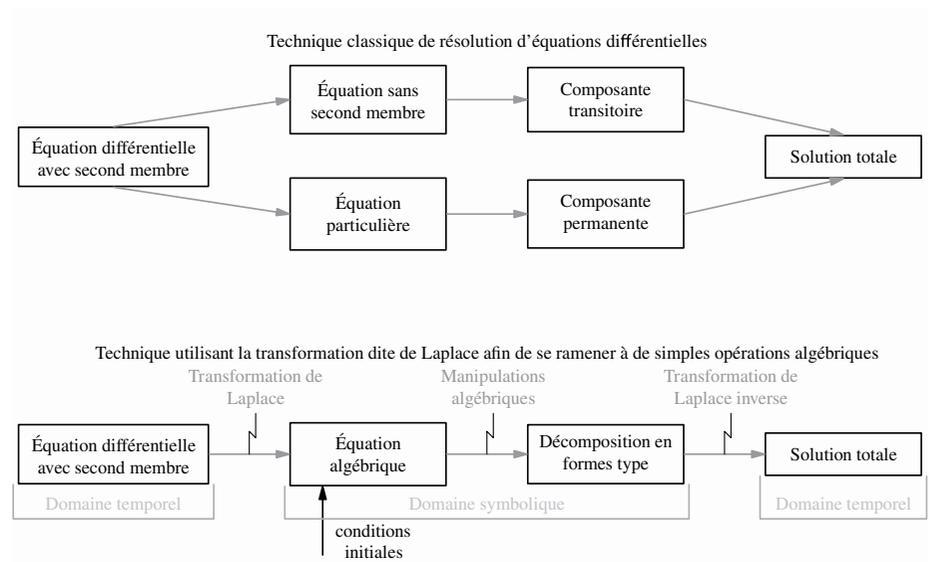


Figure 7.12 Première approche d'un système asservi

**Définition**

Soit  $f$  une fonction de la variable réelle  $t$  définie sur  $[0; +\infty[$  et nulle pour  $t < 0$ .

La **transformée de Laplace** de la fonction  $f$ , si elle existe, est l'**unique** fonction  $F$  de la variable complexe  $p$  définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$p$  est appelée variable de Laplace.

**Notations**

- La variable de Laplace  $p$  est également notée  $s$ , notamment dans l'application Xcos de Scilab.
- Conventionnellement, la transformée de Laplace d'une fonction  $f$  est notée  $F$ , celle d'une fonction  $\omega$  est notée  $\Omega$ .

La condition d'existence de la transformée de Laplace n'est pas étudiée ici. On admet que toutes les fonctions utilisées par la suite vérifient cette condition d'existence qui peut être traduite par  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-pt} = 0$ .

Si  $t$  représente le temps alors  $|p|$ ,  $\text{Im}(p)$  et  $\text{Re}(p)$  sont homogènes à une fréquence. Comme on utilise  $\mathcal{L}(f(t))$  pour désigner la transformation de Laplace d'une fonction  $f$ , on note la transformation inverse  $\mathcal{L}^{-1}(F(p))$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

La définition de la transformée inverse n'est pas abordée ici ; elle fait appel à une intégrale à bornes complexes.

## A.2 Propriétés et théorèmes

### A.2.1

### Linéarité

Si  $f$  et  $g$  admettent une transformée de Laplace alors

$$\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = aF(p) + bG(p) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes réelles.}$$

### A.2.2

### Dérivation

Si  $f$  est dérivable et si elle admet une transformée de Laplace, on montre à partir de la définition de la transformée de Laplace et en utilisant les propriétés de l'intégration par parties

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = pF(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2f}{dt^2}(t)\right) = p^2F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0)$$

En utilisant un raisonnement par récurrence, on montre alors

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right) = p^n F(p) - \sum_{i=1}^n p^{(n-i)} \frac{d^{(i-1)} f}{dt^{(i-1)}}(0)$$

**Remarque**

- Ce résultat sur la transformée de la dérivée d'une fonction permet notamment de transformer une équation différentielle en équation polynomiale.
- La transformée de Laplace prend en compte les conditions initiales.

**Cas particulier**

Si les conditions initiales sont nulles, tout au moins celles suffisantes pour établir la transformation des dérivées utilisées, alors l'expression de la transformée de la dérivée d'une fonction se traduit par

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right) = p^n F(p)$$

On peut traduire cette relation par : à la dérivation dans le domaine temporel se substitue la multiplication par  $p$  dans le domaine symbolique.

Ce résultat est fondamental pour le traitement des problèmes d'automatique continue.

**A.2.3 Intégration**

À partir de la relation établie pour la transformation de la dérivée première d'une fonction  $f$ , on montre si  $f(0) = 0$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du\right) = \frac{1}{p} F(p)$$

La division par  $p$  dans le domaine symbolique est la transformation de l'intégration du domaine temporel.

**A.2.4 Théorème du retard**

Une cause ne générant pas instantanément une conséquence, l'effet du signal d'entrée du système peut être considéré comme un signal retardé produisant le signal de sortie. Le théorème du retard établit la transformation de Laplace d'un signal retardé d'une durée  $T$

$$\mathcal{L}(f(t - T)) = e^{-Tp} F(p)$$

**A.2.5 Théorème de la valeur finale**

À partir de la relation établie pour la transformation de la dérivée première d'une fonction  $f$  et si cette fonction a une limite en régime permanent, on établit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

**Remarque**

- Cet énoncé permet de trouver la valeur de la limite à l'infini d'une fonction temporelle sans connaître la forme explicite de cette fonction. La connaissance de  $F(p)$  suffit.

Ce théorème est particulièrement intéressant en automatique car il permet de connaître la valeur en régime permanent du signal de sortie d'un système sans connaître l'expression temporelle de ce signal de sortie.

- Ce théorème ne s'utilise que si l'existence de la limite temporelle est connue. On ne peut pas démontrer l'existence de la limite temporelle en utilisant le théorème de la valeur finale.

Par exemple :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(\omega t)$  n'existe pas. En utilisant la transformation de Laplace, on montre que

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2}$$

On a alors

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p \mathcal{L}(\sin(\omega t))) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = 0$$

Le théorème de la valeur finale ne peut s'utiliser que si l'existence de la limite temporelle est avérée.

## A.2.5

On voit donc que si la limite est finie dans le domaine symbolique cela n'implique pas une limite finie dans le domaine temporel.

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = C \text{ avec } C \text{ constante} \not\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = C$$

Par contre, si la limite dans le domaine symbolique est infinie alors on peut conclure sur le fait que la limite temporelle est, elle aussi, infinie.

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = +\infty \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$$

- L'existence de la limite temporelle peut être déterminée, dans le cas des réponses indicelles, en raisonnant sur la stabilité du système étudié, voir stabilité .....

## Théorème de la valeur initiale

À partir de la relation établie pour la transformation de la dérivée première d'une fonction et si  $f$  a une limite en régime permanent, on établit

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{|p| \rightarrow +\infty} pF(p)$$

**Remarque**

Ce théorème ne s'utilise que si l'existence de la limite temporelle est connue.

## A.3 Tableaux de transformées de Laplace

Les transformées de Laplace des signaux tests sont à connaître.

$f(t)$ pour $t \geq 0$	$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
échelon d'amplitude $A$	$\frac{A}{p}$
rampe de pente $a$ : $at$	$\frac{a}{p^2}$
sinus de pulsation $\omega$ : $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

Ce tableau est à compléter par quelques transformées utiles.

$f(t)$ pour $t \geq 0$	$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p + a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$

Tous ces résultats se démontrent simplement en appliquant la définition de la transformée de Laplace aux différentes fonctions considérées. La démonstration de ces résultats n'est pas exigée en classes préparatoires.

En automatique, la transformée de Laplace va permettre de transposer le problème du domaine temporel au domaine symbolique. Dans ce domaine symbolique, on sait résoudre le système d'équations trouvé. La solution de ce système étant dans le domaine symbolique, il faut alors utiliser la transformée inverse pour exprimer la solution du problème dans le domaine temporel.

## A.4 Transformation inverse

On démontre que si  $F(p)$  a une transformée inverse, alors celle-ci est unique et on note

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$$

Comme on n'a pas accès au calcul direct de la transformée inverse, le passage du domaine symbolique au domaine temporel s'effectue en utilisant des tableaux de transformations de fonctions usuelles comme celui de la figure A.2.

On peut être amené à manipuler l'expression du domaine symbolique pour pouvoir utiliser les résultats proposés à la figure A.2. On fait appel alors à la décomposition en éléments simples.

$F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$ pour $t \geq 0$
$\frac{1}{1 + \tau p}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1 + \tau p)^2}$	$\frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$
$\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t \right)$ avec $0 < \xi < 1$
$\frac{1}{p(1 + \tau p)}$	$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{p(1 + \tau p)^2}$	$1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$	$1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$
$\frac{1}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \quad \right)$ avec $\quad = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$ et $0 < \xi < 1$
$\frac{1}{p^2(1 + \tau p)}$	$t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\frac{1}{p^2(1 + \tau p)^2}$	$t - 2\tau + (t + 2\tau) e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{p^2(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$	$1 - \tau_1 - \tau_2 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_1^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2^2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$
$\frac{1}{p^2 \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$	$t - \frac{2\xi}{\omega_0} - \frac{1}{\sqrt{\omega_0(1 - \xi^2)}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + 2 \right)$ avec $\quad = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$ et $0 < \xi < 1$

Figure A.2 Tableau de transformées inverses de Laplace

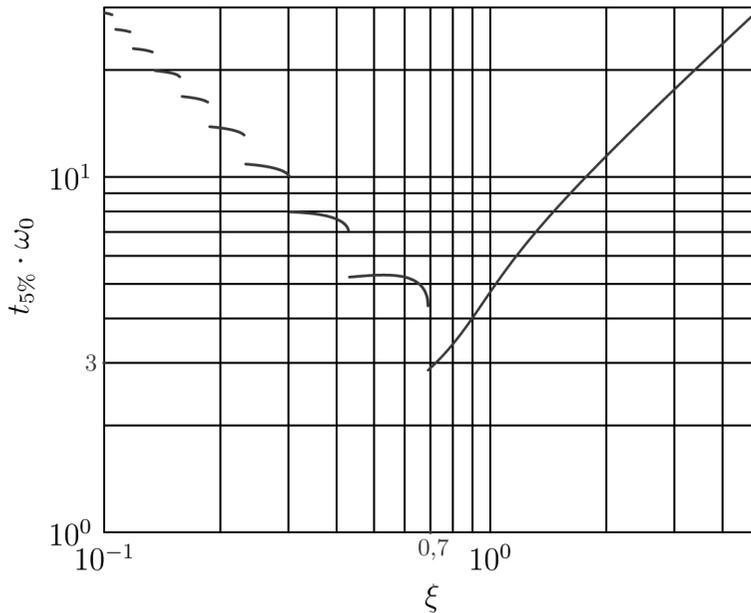


Figure A.1 Abaque du temps de réponse réduit  $\omega_0 t_{55\%}$  en fonction du coefficient d'amortissement  $\xi$

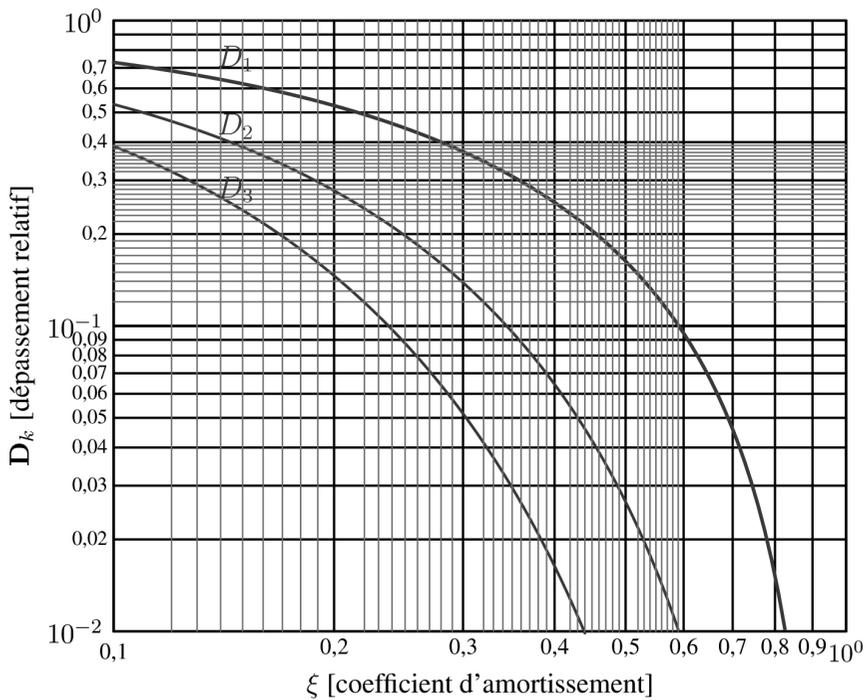


Figure A.2 Abaque des trois premiers dépassements relatifs



# Index

## A

accélération de Coriolis 61  
action mécanique 118  
    extérieure 153  
    intérieure 153  
action réciproque 119  
actionneur 11  
analogiques 191  
appui-plan 79  
arc-boutement 162  
automatique 2  
axe 17  
    central 29  
    de rotation 17

## B

bande passante 259  
bloc 214

## C

Cahier des Charges Fonctionnel 5  
calculateur 194  
came 90  
capteur 11  
centre instantané de rotation 64  
chaîne  
    complexe 77  
    d'action 194  
    directe 194  
    fermée 76  
    ouverte 76  
champ  
    de vecteurs 27  
    des vecteurs accélération 60  
    des vecteurs vitesse 54  
cinématique 46  
classe 216  
coefficient  
    d'amortissement 259  
    de frottement d'adhérence 134  
    de frottement de glissement 133  
coincement 163  
coïncidants 49  
commande 189, 190  
comparateur 194  
comportement  
    automatisé 190  
    mécanisé 190

composition  
    des mouvements 57  
    des torseurs cinématiques 60  
    des vecteurs accélérations 61  
    des vecteurs rotations 60  
    des vecteurs vitesses 58  
cône de frottement 135  
consigne 189  
continu 191  
correcteur 194  
critère 5  
cycle de vie 4  
cylindre-plan 82

## D

date 46, 250  
décade 252  
degré de liberté 77  
dépassement 200  
diagramme  
    asymptotique 258  
    de Bode 251  
direct 17  
direction 16  
durée 46, 250

## E

écart 194, 199  
échelon 196  
échelon unitaire 196  
effecteur 11  
éléments de réduction 27  
engrenage 94  
équilibre 152  
équiprojectif 27  
erreur  
    de traînage 200  
    dynamique 200  
    en position 200  
    statique 200  
espace 53  
    euclidien 46  
étude  
    harmonique 251  
    temporelle 250

## F

facteur de qualité 260  
flexion 139

- fonction  
   de service 5  
   de transfert 214  
   de transfert en boucle fermée 220  
   de transfert en boucle ouverte 220  
   globale 4  
 forme canonique 216  
 formule de dérivation vectorielle 32  
 frottement 132
- G**
- gain statique 216, 259  
 générateur de commande 194  
 glissière 78  
 graphe  
   de structure 76  
   des contacts 76  
   des liaisons 76
- H**
- hélicoïdale 82
- I**
- impulsion de Dirac 197
- J**
- jerk 65
- L**
- liaison 77  
   à axe 83  
   à centre 85  
   à direction 80  
   équivalente 86  
   usuelle 78  
 ligne d'action 131  
 limite du glissement 135  
 linéaire  
   annulaire 89  
   rectiligne 89  
 loi horaire 50
- M**
- machine 2  
 matière d'oeuvre 3  
 mécanique 2  
 mécanisme 2  
 milieu environnant 2  
 modèle 6  
   de connaissance 226  
   de Coulomb 133  
   de description 226  
   proportionnel 252  
 modélisation 7  
 moment central 29  
 moteur 2
- motopompe 189  
 mouvement 46  
   plan 63
- N**
- non orientée 16  
 nutation 22
- O**
- octave 252  
 ordre 215  
 ordre 2 apériodique 261  
   critique 261  
 ordre 2 pseudopériodique 262  
 orientée 16
- P**
- partie  
   commande 9  
   opérative 9  
 perturbation 189  
 pic de résonance 266  
 pivot 80  
 pivot-glissant 81  
 pivotement 88  
 points de fonctionnement 192  
 pôles 215  
 polynôme caractéristique 215  
 positif 17  
 poursuite 195  
 poutre 139  
 préactionneur 10  
 précession 22  
 précision 199  
 principe de superposition 192  
 produit  
   mixte 25  
   scalaire 23  
   vectoriel 24  
 pulsation  
   de cassure 256  
   de coupure à 259  
   de résonance 270  
   propre 259, 262  
   propre du système non amorti 259
- R**
- rampe 198  
   unitaire 198  
 rapidité 201  
 référentiel 46  
 régime  
   établi 196  
   permanent 199  
   transitoire 196, 199  
 régulateur 194  
 régulation 195

repère 46, 53  
 d'espace 46  
 galiléen 152  
 réponse 189  
 harmonique 197, 251  
 impulsionnelle 197  
 indicielle 197  
 résonance 266  
 retour unitaire 221  
 rotation 47, 62  
 rotation propre 22  
 roues de friction 91  
 roulement 88  
 sans glissement 89

## S

schéma-blocs 188, 218  
 section droite 138, 139  
 signaux canoniques 196  
 sinusoïdale 197  
 solide 53  
 indéformable 53  
 soustracteur 194  
 sphere-cylindre 84  
 sphère-plan 83  
 sphérique 83  
 sphérique-à-doigt 85  
 stable 198  
 statique 152  
 système 2  
 asservi 193, 194  
 commandé 190  
 du deuxième ordre 259  
 du premier ordre 253  
 intégrateur 271  
 invariant 192  
 linéaire 192  
 matériel 152  
 monovariable 188  
 multivariable 188  
 proportionnel 252

## T

taux de rotation 32  
 temps  
 de montée 202  
 de pic 263  
 de réponse 201  
 de réponse réduit 264  
 tension 128  
 torseur 27  
 cinématique 56  
 couple 30  
 des actions mécaniques 121  
 glisseur 30  
 nul 30  
 trajectoire 49  
 transformée de Laplace 300  
 translation 47, 63  
 transmetteur 11  
 tribologie 132  
 trigonométrie 17

## U

uniforme 27

## V

valeur ajoutée 3  
 valeur finale 199  
 vecteur 23  
 accélération 52  
 moment 27  
 nodal 22  
 position 50  
 résultante 27  
 vitesse 51  
 vitesse de glissement 88

## Z

zéros 216

